

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2016.S2.005

# 水平弹性支撑抛物线拱在均布荷载与热载 荷作用下的屈曲特性

刘辉, 马幸, 闫冬, 边登鹏, 陈逸飞

(陕西省土地工程建设集团, 西安 710000)

**摘要:**分析了水平弹性支撑抛物线拱在均布荷载与热负荷共同作用下的屈曲特性,通过变分原理推导了弹性支撑抛物线拱的非线性平衡方程,得到了外荷载与径向位移和轴力的关系,用数值法分析了弹性支撑抛物线拱在均布荷载与热负荷共同作用下屈曲特性。

**关键词:**抛物线拱;面内屈曲;弹性支撑;热负荷

**中图分类号:**TU399 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2016)S2-0021-03

## The bucking of parabolic arches under uniform load and thermal loading with horizontal elastic support

Liu Hui, Ma Xing, Yan Dong, Bian Dengpeng, Cheng Yifei

(Shaanxi Provincial Land Engineering Construction Group, Xi'an 710048, P. R. China)

**Abstract:** This paper investigate the bucking of parabolic arches under uniform Load and Thermal Loading with horizontal elastic support, The equilibrium equation of horizontal elastic support parabolic arches are deduced from the variation principle in this paper. And the relations between external load and radial displacement, axial forces are determined; using the numerical method analyzed the elastic support Parabolic arch buckling characteristic under uniformly distributed load and thermal load.

**Key words:** parabolic arches; in-plane buckling; elastic support; thermal loading

拱结构以其良好的受力特性,在土木、机械和航天航空工程中有着广泛的应用。国内外学者对拱结构展开了大量的研究。Schreyer 和 Masur 通过解析法对浅拱的屈曲特性进行了分析; Lee 和 Murphy 则用数值法对浅拱的面内弹塑性屈曲特性进行了分析。卫星等探讨了矢跨比、拱轴线形、边界条件和荷载形式等参数对拱结构考虑二阶效应时弹性屈曲特性的影响;程鹏和童根树对径向均布荷载下圆弧拱的面内屈曲特性研究进行了综述;韩强等人从非线性动力学角度研究了动力冲击荷载作用下弹性浅拱的跳跃屈曲;拱结构的理论研究的工程实践均表明,不同的拱结构形式以及深浅程度将会对拱结构的承载能力有不同程度的影响,另外,实际

工程中拱的边界条件在某些情况下不能简单的视为铰支或者固支。比如,柔性系杆拱桥存在于推力平衡的系杆张力,它的力学模型可以抽象为弹性支撑拱。同时研究也表明,矢跨比较小时,圆弧拱与其他线形拱的面内稳定系数相差很小;矢跨比加大时,通过圆弧拱的分析可以更好的研究其他拱的稳定性。本文作者以水平弹性支撑的抛物线拱为研究对象,通过变分原理以及数值法来分析在热负荷作用下弹性支撑等因素对抛物线拱的面内屈曲特性的影响。

$$y = \frac{1}{2R} \left[ z^2 - \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right] \quad z \in \left[ \frac{-L}{2}, \frac{L}{2} \right], R = \frac{L^2}{8f} \quad (1)$$

式中:  $f$  为拱的失径;  $L$  为拱的跨径;  $R$  为抛物线拱

收稿日期:2016-06-08

作者简介:刘辉(1988-),男,硕士,主要从事结构动力学研究,(E-mail)942187321@qq.com。

的焦点半径。

横断面上任意点  $P$  的应变以及薄膜应变和  $\epsilon_m$  弯曲应变

$$\epsilon_b \epsilon = \epsilon_m + \epsilon_b, \epsilon_m = \bar{w}' - \bar{v} + \frac{1}{2}(\bar{v}')^2, \epsilon_b = -\frac{y\bar{v}''}{R} \quad (2)$$

式中:  $\bar{v} = v/R, \bar{w} = w/R, \theta$  为任意点开口角。  $v$  和  $w$  为任意点  $P$  沿  $oy, oz$  方向的位移。

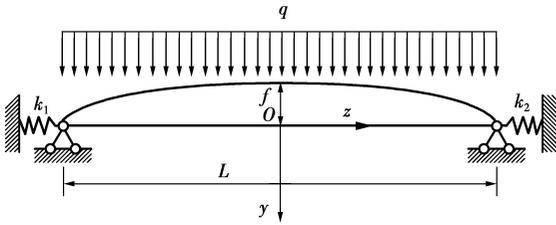


图 1 水平弹性支撑抛物线拱

由拱的变形理论可知:  $\epsilon$  为任意一点  $P$  的纵向正应变,  $(\cdot)' = d(\cdot)/d\theta, (\cdot)'' = d^2(\cdot)/d\theta^2, k_1$  和  $k_2$  分别为两端弹性支撑刚度,  $y$  为  $P$  在截面上的竖向坐标。其中  $1/2(\bar{v}')^2$  是考虑几何非线性的部分。

对于浅拱,由热弹性力学定律可知当温度为  $\Delta T$  时它的纵向正应力  $\sigma$  为

$$\sigma = E(\epsilon - \alpha\Delta T) \quad (3)$$

用虚功方程研究浅拱面内弹性屈曲,并且考虑拱屈曲前弯曲位移和非线性的影响,由虚功原理可以得出拱平面内非线性平衡方程

$$\delta V = \int_v \sigma \delta \epsilon dV - \int_{-\theta}^{\theta} qR^2 \delta \bar{v} d\theta + k_1 w_{-L/2} \delta w_{-L/2} + k_2 w_{L/2} \delta w_{L/2} = 0 \quad (4)$$

式中:  $w_{-L/2}$  和  $w_{L/2}$  分别是  $z = \pm L/2$  处的位移。

把式(2), (3)代入式(4)可得出

$$\delta V = \int_{-\theta}^{\theta} [-\bar{N}R(\delta \bar{w}' - \delta \bar{v} + \bar{v}'\delta \bar{v}') - M\delta \bar{v}'' - qR^2 \delta \bar{v}] d\theta + k_1 w_{-L/2} \delta w_{-L/2} + k_2 w_{L/2} \delta w_{L/2} = 0 \quad (5)$$

式中:  $\alpha_{v-\theta}$  为拱实际的轴向压力;  $M$  为拱的弯矩。

$$\bar{N} = -\int_A \sigma dA = AE(\alpha\Delta T - \epsilon_m) \quad (6)$$

$$M = \int_A \sigma y dA = -\frac{EI_x \bar{v}''}{R} \quad (7)$$

对式(5)进行一阶变分并采用分部积分可得到径向和轴向的平衡方程

$$\bar{N}' = 0 \quad (8)$$

$$-M' + \bar{N}R\bar{v}'' + \bar{N}R - qR^2 = 0 \quad (9)$$

对应的边界条件为

$$\bar{w} = 0, \theta = \pm \Theta \quad (10)$$

$$\bar{v} = \bar{v}' = \bar{v}'' = 0, \theta = \pm \Theta \quad (11)$$

定义的无量纲轴向力参数为

$$\mu = \sqrt{\frac{N}{EI_x}} \quad (12)$$

定义的无量纲荷载参数为

$$\bar{q} = \frac{qR - \bar{N}}{N} \quad (13)$$

把式(7)代入式(9)可得到垂直方向的平衡方程为

$$\frac{v^{iv}}{\mu^2} + v'' = \frac{\bar{q}}{R} \quad (14)$$

将式(2), (6)代入式(8)可得到轴向的方程为

$$AE(\bar{w}'' - \bar{v}' + \bar{v}'\bar{v}'') = 0 \quad (15)$$

## 2 弹性支撑圆弧拱的稳定性

### 2.1 非线性平衡方程

由式(14)可以得到满足边界条件  $k_{v-\theta}$  的垂直方向的位移  $k_{v-\theta}$  为

$$\bar{v} = \frac{\bar{q}}{\mu^2} \left\{ \frac{[\cos(\mu\theta) - \cos(\mu\Theta)]}{\cos(\mu\Theta)} + \frac{1}{2} [(\mu\theta)^2 - (\mu\Theta)^2] \right\} \quad (16)$$

把式(16)代入式(15),则轴向平衡方程变为

$$\bar{w}'' - \frac{\bar{q}}{\mu} \left( \mu\theta - \frac{\sin(\mu\theta)}{\cos(\mu\Theta)} \right) + \frac{\bar{q}^2}{\mu} \left( \mu\theta - \frac{\sin(\mu\theta)}{\cos(\mu\Theta)} \right) \left( 1 - \frac{\cos(\mu\theta)}{\cos(\mu\Theta)} \right) = 0 \quad (17)$$

解方程(17)并结合边界条件(10)和(11)可以得出

$$\bar{w} = \frac{A_1 \bar{q}^2}{\mu^3} - \frac{A_2 \bar{q}}{\mu^3} \quad (18)$$

其中

$$A_1 = \left( \frac{\sin(\mu\theta)\cos(\mu\theta)}{4\cos^2(\mu\Theta)} + \frac{3\mu\theta\tan(\mu\Theta)}{4\mu\Theta} \right) + \left( \frac{\sin(\mu\theta)}{\cos(\mu\Theta)} - \frac{\mu\theta\cos(\mu\theta)}{\cos(\mu\Theta)} - \frac{2\mu\theta\tan(\mu\Theta)}{\mu\Theta} \right) - \frac{\mu\theta}{6} (\mu^2\theta^2 - \mu^2\Theta^2) \quad (19)$$

$$A_2 = \left( \frac{\sin(\mu\theta)}{\cos(\mu\Theta)} - \frac{\mu\theta\tan(\mu\Theta)}{\mu\Theta} \right) + \frac{\mu\theta}{6} (\mu^2\theta^2 - \mu^2\Theta^2) \quad (20)$$

把式(2), (16), (18)分别代入式(6)可以得到浅拱水平弹性支撑的非线性平衡方程

$$B_1 \bar{q}^2 + B_2 \bar{q} + B_3 = 0 \quad (21)$$

$$B_1 = \frac{1}{4(\mu\Theta)^2} [5(\mu\Theta) - 5\tan(\mu\Theta) + (\mu\Theta)\tan^2(\mu\Theta) + \frac{2(\mu\Theta)^2}{3}] \quad (22)$$

$$B_2 = \frac{1}{(\mu\Theta)^2} \left[ 1 - \frac{\tan(\mu\Theta)}{\mu\Theta} + \frac{(\mu\Theta)^2}{3} \right] \quad (23)$$

$$B_3 = \left( \frac{\mu^2\Theta^2}{\lambda^2} - \frac{\alpha\Delta TS^2}{4\lambda^2 r_x^2} \right) (1 + \alpha_{L/2} + \alpha_{-L/2}) \quad (24)$$

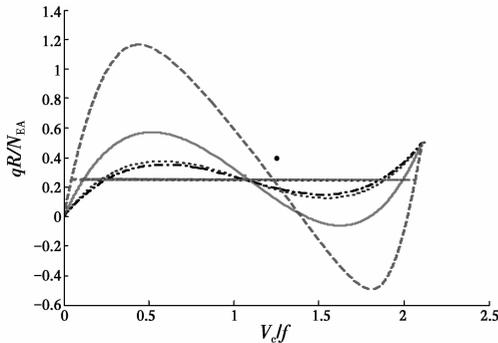
拱的长细比  $\mu$  以及横截面的回转半径为可以表示为

$$\lambda = \frac{R\Theta^2}{r_x} = \frac{S\Theta}{2r_x}, r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (25)$$

式中  $N_{EA} = \frac{\pi^2 EI_x}{(S/2)^2}$  为相应的二阶侧倾稳定荷载。

### 3 算例分析

通过算例分析水平弹性支撑抛物线拱在热负荷作用下面内屈曲特性,其中,  $L=R=6$  m,  $r_x=0.108$  m,  $A=0.0054$  m<sup>2</sup>,  $\lambda=6$ 。



注:  $\Delta$  T=100 °C ---  $a_{v,\Theta}=a_{v,-\Theta}=0$  —  $a_{v,\Theta}=a_{v,-\Theta}=1/20$  m<sup>2</sup> .....  $a_{v,\Theta}=a_{v,-\Theta}=1/10$  m<sup>2</sup> - - -  $a_{v,\Theta}=a_{v,-\Theta}=1/5$  m<sup>2</sup>

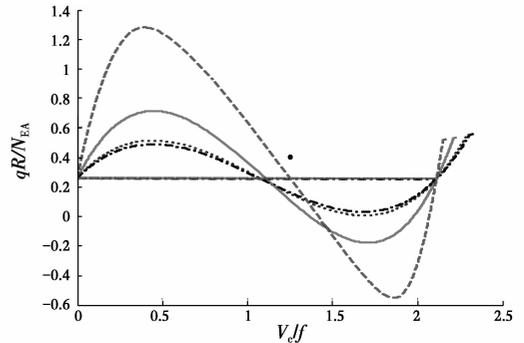
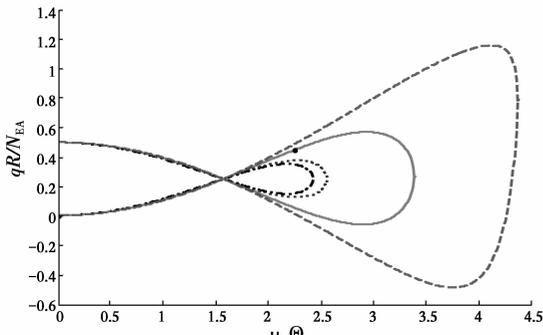


图 2 拱中央无量纲位移与无量纲荷载的变化曲线



注:  $\Delta$  T=100 °C ---  $a_{v,\Theta}=a_{v,-\Theta}=0$  —  $a_{v,\Theta}=a_{v,-\Theta}=1/20$  m<sup>2</sup> .....  $a_{v,\Theta}=a_{v,-\Theta}=1/10$  m<sup>2</sup> - - -  $a_{v,\Theta}=a_{v,-\Theta}=1/5$  m<sup>2</sup>

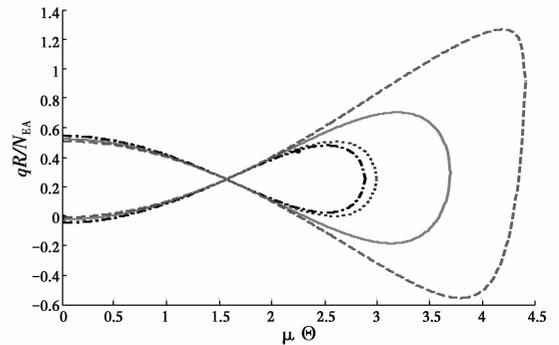


图 3 无量纲荷载与轴力参数的变化曲线

### 4 结论

基于变分原理和数值法分析了水平弹性支撑抛物线拱在热负荷作用下的平面内稳定性。研究表明,弹性支撑对抛物线拱的屈曲路径以及临界值荷载有显著的影响,同时在热负荷作用下会使得拱产生内部应力,产生的应力会影响拱的屈曲特性,表明热负荷作用下同样会影响拱的屈曲路径以及屈曲特性。

#### 参考文献:

- [1] 项海帆,刘光栋. 拱结构的稳定与振动[M]. 北京:人民交通出版社,1991.
- [2] 程鹏,童根树. 圆弧拱平面内弯曲失稳一般理论[J]. 工程力学,2005,22(1):93-101.
- [3] 韩强,黄怀纬,樊学军. 弹性浅拱的非线性动力屈曲[J]. 华南理工大学学报:自然科学版,2010,38(3):1-7.
- [4] 卫星,李俊,李小珍,等. 考虑二阶效应的拱结构面内弹性屈曲[J]. 工程力学,2007,24(1):147-152.
- [5] 易壮鹏,赵跃宇. 圆弧拱考虑一般缺陷的面内屈曲[J]. 应

用力学学报,2009,26(4):721-724.

- [6] 鹭津久一郎. 弹性和塑性力学中的变分法[M]. 北京:科学出版社,1984.
- [7] PI Y L, LOI F T. Nonlinear analysis and buckling of elastically supported circular shallow arches [J]. International Journal of Solids and Structures,2007,44(7/8):2401-2425.
- [8] SCHREYER H L, MASUR E F. Buckling of shallow arches [J]. Journal of Engineering Mechanics Division, 1968,94(3):225-239.
- [9] BRADFORD M A, PI Y L, GILLBERT R I. Nonlinear elastic analysis of shallow, pinned parabolic arches [C]// Proc. 17<sup>th</sup> Engineering Mechanics Conf., ASCE, Reston, Va.:1-8.
- [10] PI Y L, BRADFORD M A. Nonlinear in-plane elastic buckling of shallow circular arches under uniform radial and thermal loading [J]. International Journal of Mechanical Sciences,2010,52(1):75.