

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2016.S2.011

# 车桥耦合在稳定型悬索桥上的性能

柳鑫<sup>1</sup>, 屈本宁<sup>1</sup>, 王晓春<sup>2</sup>

(1. 昆明理工大学呈贡校区 建筑工程学院, 昆明 650500; 2. 中建钢构有限公司, 广州 510000)

**摘要:** 稳定型悬索桥是在普通悬索桥的基础上增加了反张索结构, 以增加桥整体的稳定性。运用有限元软件分别在稳定型悬索桥和普通悬索桥中, 进行移动力、移动荷载质量作用下和 1/4 弹簧质量车辆模型作用下 3 种车桥耦合的有限元分析, 得出相应的位移响应图和加速度响应图。得出稳定型悬索桥在刚度和稳定性方面更加优于普通悬索桥, 为稳定性悬索桥的分析研究提供一定的参考价值。

**关键词:** 稳定型悬索桥; 车桥耦合; 有限元

**中图分类号:** U441.3    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1674-4764(2016)S2-0054-06

## Vehicle-bridge coupling for stable type suspension bridge

Liu Xin<sup>1</sup>, Qu Benning<sup>1</sup>, Wang Xiaochun<sup>2</sup>

(1. Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P. R. China;

2. Zhongjian Steel Structure Company Limited, Guangzhou 510000, P. R. China)

**Abstract:** The Stable Type Suspension Bridge is on the basis of the general suspension bridge increases the inverse-tensional system, in order to improve the stability of the whole bridge. Using finite element software respectively in Stable Type Suspension Bridge and ordinary suspension bridge under the action of movement, moving load under the action of quality and a quarter spring quality vehicle model under the action of three kinds of vehicle bridge coupling finite element analysis, draw the corresponding displacement response and acceleration response. In stable suspension stiffness and stability more is better than that of normal suspension bridge, for the analysis and research of the stability of suspension Bridges provide certain reference value.

**Key words:** stable type suspension bridge; vehicle-bridge coupled; the finite element

在 19 世纪初期就有学者对移动车辆作用下的桥梁进行了动力和承载力的研究。1844 年, 著名的 Britannia 桥就做了相关的模型试验。英国的一些铁路和桥梁相继失事后, 1847 年, Wmis<sup>[1]</sup> 推导出了在移动荷载作用下不考虑质量的桥梁振动方程, 开辟了一条理论分析车桥振动的先路, 之后又于 1849 年系统地进行了模型试验。1896 年时 GGStokes<sup>[2]</sup> 得到了 Willis 方程的相关幕级数解。1911 年, Timoshenko<sup>[3-4]</sup> 进一步研究了移动周期作

用力下的动力响应问题。近些年来, 中国桥梁振动的研究逐渐成熟。单德山等<sup>[5]</sup> 在研究车桥耦合振动中建立了基于非线性振动的一种数值计算方法。王刚<sup>[6]</sup> 则建立了基于有限元的车桥动力学方程。王元丰等<sup>[7]</sup> 导出的 Raleigh-Ritz 法, 计算了在移动荷载作用下的多跨曲线梁的动力响应控制方并推出了理论解。

稳定型悬索桥<sup>[8-9]</sup> 是从普通悬索桥发展演化而来的, 它是在普通悬索桥的加劲梁下方加一个反向

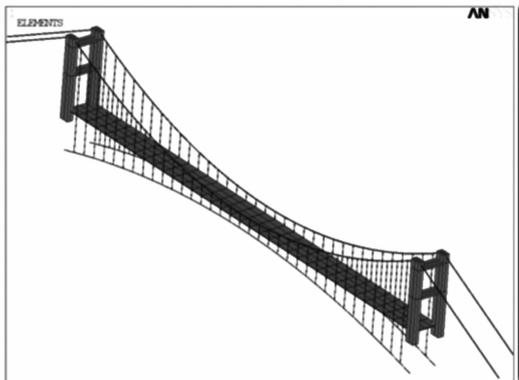


图 1 稳定型悬索桥

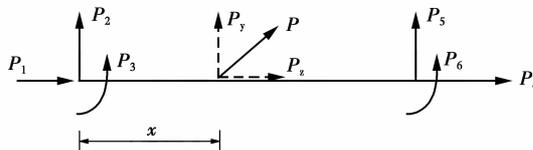


图 2 移动力作用下单元作用力分配图

$$P = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5 \ P_6]^T \quad (1)$$

该节点力向量可以通过下式计算得到

$$P = \{P_x \ P_y\}^N \quad (2)$$

式中:  $P_x$  和  $P_y$  分别为  $P$  在  $x$  和  $y$  方向的分力,  $N$  为插值函数。

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L}; N_2 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3;$$

$$N_3 = x\left[1 - 2\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]; N_4 = \frac{x}{L};$$

$$N_5 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; N_6 = x\left[-\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

预应力倒张索,通过给加劲梁产生一个初始向下的预拉力,使其产生一定程度的一个预变形来提高结构的刚度和稳定性。刘北辰等<sup>[10-11]</sup>根据广义变分原理推导出了关于稳定型悬索桥的相关非线性的有限元平衡方程和动力问题理论,并通过有理近似法解决了汽车通过桥梁的非线性动力的响应问题。进而分析了稳定型悬索桥在系统阻尼、固有频率、车辆过桥速度影响下的动力响应问题<sup>[12]</sup>。

## 1 车桥耦合有限元分析理论<sup>[13-15]</sup>

目前,研究车桥耦合问题存在着 2 种思路:一种是忽略质量点本身的质量,将其对桥梁的作用化简为移动力,跟随时间变化来移动集中力;另一种是考虑正在运动的质量点将与桥梁做整体的振动分析。但是还可以通过使用移动质量与弹簧相结合的方式建立车辆模型进行车桥耦合模拟。大量实验和分析表明,1/4 车辆模型对预测模拟车辆垂直振动时的加速度是相当稳妥的,能够准确的表现车桥耦合相互作用,没有必要建立更为复杂的如多自由度车辆模型来进行分析,为此可以把车辆简化为双自由度 1/4 车辆模型。所以也从上述 3 种思路分别来进行车桥耦合的计算分析,以便于比较。

### 1.1 移动力作用下车桥耦合的有限元分析

如果移动力的质量比梁的质量小很多时,此时可以不考虑荷载的质量惯性力,就相当于仅考虑移动荷载的重力作用,将其用一个移动的力  $P(t)$  来表示<sup>[16]</sup>。集中荷载  $P$  在一根梁上以速度  $v$  移动时,假设荷载移动到第  $i$  个单元,计算荷载作用点距离  $i$  节点的距离  $x$ ,由此可以算出其插值函数,进而将作用在该单元上的荷载转化为节点力。根据有限元理论,与力  $P$  相作用的单元的节点力向量如图 2 所示。

### 1.2 质量作用下车桥有限元耦合分析

如果移动力的质量与桥的质量相比较无法将其忽略,那么此时就必须要考虑模型质量产生的影响以及模型质量和桥耦合时的惯性力,可简化移动质量的车桥耦合模型。

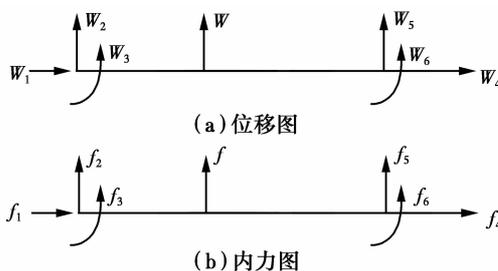


图 3 质量作用下单元两端受力图

有限元计算中应首先考虑到移动质量  $M$ 。对于结构作用力  $P$  在时刻  $t$  作用在单元上时,可根据插值函数得到它的节点向量

$$P = -M_1 g [0 \ N_2 \ N_3 \ 0 \ N_5 \ N_6]^T \quad (4)$$

梁单元上面的节点位移向量

$$w = \{w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_5 \ w_6\}^T \quad (5)$$

梁单元上的动力方程为

$$M\ddot{w} + C\dot{w} + kw = P \quad (6)$$

式中:  $M$  为梁质量矩阵;  $C$  为梁阻尼矩阵;  $K$  为梁刚

度矩阵。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EA}{L^3} & \frac{6EA}{L^2} & 0 & -\frac{12EA}{L^3} & \frac{6EA}{L^2} \\ 0 & \frac{6EA}{L^2} & \frac{4EA}{L} & 0 & -\frac{6EA}{L^2} & \frac{2EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EA}{L^3} & -\frac{6EA}{L^2} & 0 & \frac{12EA}{L^3} & -\frac{6EA}{L^2} \\ 0 & \frac{6EA}{L^2} & \frac{2EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L^2} & \frac{4EA}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$$

若移动质量  $M_1$  正在梁上运动,  $F$  为移动质量  $M_1$  与梁相互作用的力,  $y_1$  是移动质量  $M_1$  的竖向位移, 如图 4 所示。

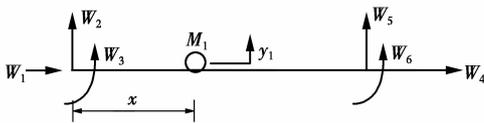


图 4 移动质量下的节点位移图

$$F = M_1 \ddot{y}_1 \quad (7)$$

一般认为移动质量和接触点位移是同等的, 因此移动质量  $M_1$  的移动位移为

$$y_1 = Nw \quad (8)$$

式中:  $N$  为梁单元形函数;  $y_1$  为关于位移  $x$  和时间  $t$  的函数, 对时间  $t$  的函数, 其一阶和二阶导数为

$$\dot{y}_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y_1}{\partial t} = N'w\dot{x} + N\dot{w} \quad (9)$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t \partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} =$$

$$N''w\dot{x}^2 + 2N'\dot{w}\dot{x} + N''w\ddot{x} + N\ddot{w} \quad (10)$$

式中:  $\dot{x}$  为移动质量的水平速度;  $\ddot{x}$  为移动质量的水平加速度;  $N\ddot{w}$  为惯性加速度;  $2N'\dot{w}\dot{x}$  为科氏加速度;  $N''w\dot{x}^2$  为离心加速度;  $N''w\ddot{x}$  为水平加速度效应。

在此只考虑了垂直桥面作用的力, 所以将作用力分解到了各个节点上, 如式(11)。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \{f\} \quad (11)$$

即  $\mathbf{P} = \mathbf{N}\{f\}$

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{N}\{\ddot{\mathbf{w}}\} + 2\mathbf{N}'\{\dot{\mathbf{w}}\}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}''\{\mathbf{w}\}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}''\{\mathbf{w}\}\dot{\mathbf{x}}^2 \quad (12)$$

平衡方程式分布节点力  $\{f\}$  为

$$\{f\} = [\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{w}}\} + [\mathbf{c}]\{\dot{\mathbf{w}}\} + [\mathbf{k}]\{\mathbf{w}\} \quad (13)$$

式中:  $[\mathbf{m}] = \mathbf{m}\mathbf{N}^T\mathbf{N}$ ;  $[\mathbf{c}] = 2\mathbf{m}\dot{\mathbf{x}}\mathbf{N}^T\mathbf{N}'$ ;  $[\mathbf{k}] = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}\mathbf{N}^T\mathbf{N}'' + \mathbf{m}\dot{\mathbf{x}}^2\mathbf{N}^T\mathbf{N}''$ 。  $[\mathbf{m}]$  为移动质量  $M_1$  的惯性力的质量矩阵;  $[\mathbf{c}]$  为移动质量  $M_1$  的惯性力的阻尼矩阵;  $[\mathbf{k}]$  为移动质量  $M_1$  的惯性力的刚度矩阵。

将式(6)和式(13)相加, 得

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{M} + \mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{w}}\} + [\mathbf{C} + \mathbf{c}]\{\dot{\mathbf{w}}\} + [\mathbf{K} + \mathbf{k}]\{\mathbf{w}\} \quad (14)$$

### 1.3 1/4 车辆模型作用下车桥耦合的有限元分析

对于 1/4 车辆模型, 车体相对应的簧上质量用  $m_s$  表示, 簧下质量用  $m_t$  表示。悬挂系统由线性弹簧和的线性尼来表示, 刚度为  $k_s$ , 阻尼为  $c_s$ 。轮胎同样由线性弹簧和线性尼来表示, 刚度为  $k_t$ , 阻尼为  $c_t$ 。1/4 车辆模型中, 车体总质量为  $m_s$ , 车轮质量为  $m_t$ , 车体悬架参数设为  $k_s$  和  $c_s$ , 轮胎参数为  $k_t$  和  $c_t$ 。1/4 车辆模型得到了广泛的应用。图 5 为 1/4 弹簧车辆模型示意图。

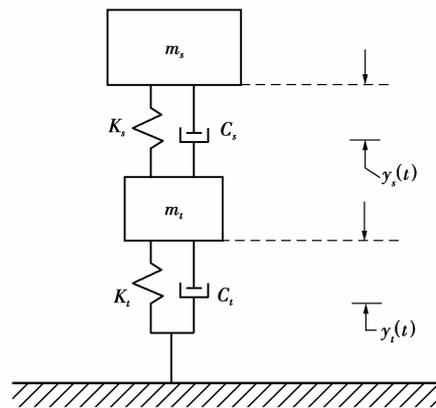


图 5 1/4 弹簧车辆示意图

1/4 弹簧车辆的动力方程

$$\begin{aligned} m_s \ddot{y}_s(t) + c_s [\dot{y}_s(t) - \dot{y}_t(t)] + k_s [y_s(t) - y_t(t)] &= 0 \\ m_t \ddot{y}_t(t) + c_t \dot{y}_t(t) - c_s [\dot{y}_s(t) - \dot{y}_t(t)] + k_t y_t(t) - k_s [y_s(t) - y_t(t)] &= (m_s + m_t)g \end{aligned}$$

矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} m_s & \\ & m_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_s(t) \\ \ddot{y}_t(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_t + c_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_s(t) \\ \dot{y}_t(t) \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_t + k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_s(t) \\ y_t(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (m_s + m_t)g \end{Bmatrix}$$

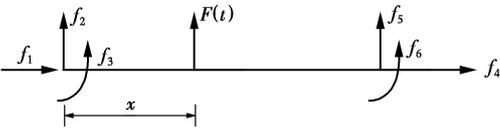


图 6 1/4 车模型相互作用力示意图

当此车辆模型如上图车轮作用在梁单元上时,车辆的动力方程为

$$\begin{bmatrix} m_s & \\ & m_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_s(t) \\ \ddot{y}_t(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_t + c_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_s(t) \\ \dot{y}_t(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_t + k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_s(t) \\ y_t(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (m_s + m_t)g - F(t) \end{Bmatrix}$$

车轮与梁接触点处的作用力设为  $F(t)$ ,分解得

到相应的节点力:  $F(t) = \mathbf{N}\{f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6\}^T$

## 2 车桥耦合振动数值计算与分析

对两种悬索桥分别进行车桥耦合分析。车辆模型采用所分析的 3 种形式(移动力、移动质量、移动四分之一车辆模型),其中 1/4 车辆模型车体总质量为  $m_s = 4\ 450\ \text{kg}$ ,车轮质量  $m_t = 550\ \text{kg}$ ,车体悬架参数  $k_s = 1\ 000\ \text{kN/m}$ ,  $c_s = 15\ \text{kNs/m}$ ,轮胎参数为  $k_t = 1\ 750\ \text{kN/m}$ ,  $c_t = 2\ \text{kNs/m}$ ,相对于移动质量车辆模型  $m = 5\ 000\ \text{kg}$ ,移动力车辆模型  $F = 49\ 000\ \text{N}$ 。

### 2.1 车桥耦合位移响应图

图 7、8、9 是两种悬索桥在单向行车情况下,分别以移动力车辆模型、移动质量车辆模型、1/4 车辆模型在速度 40、80、120 km/h 时跨中的位移图。

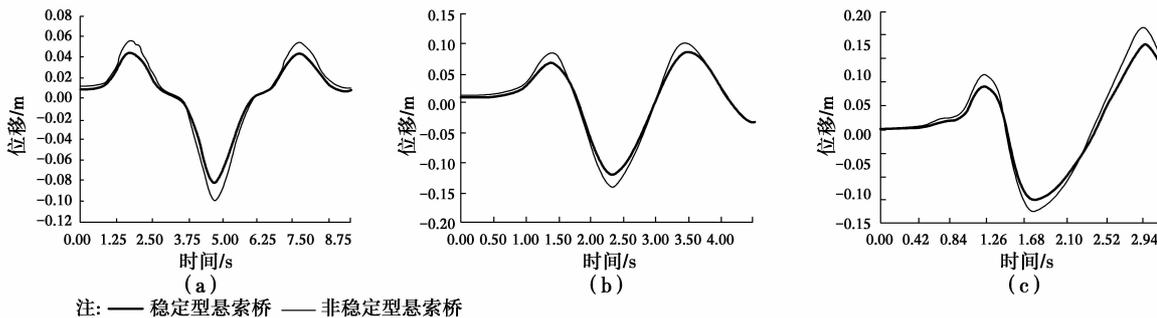


图 7 移动力车辆模型在速度 40、80、120 km/h 时的悬索桥跨中位移响应图

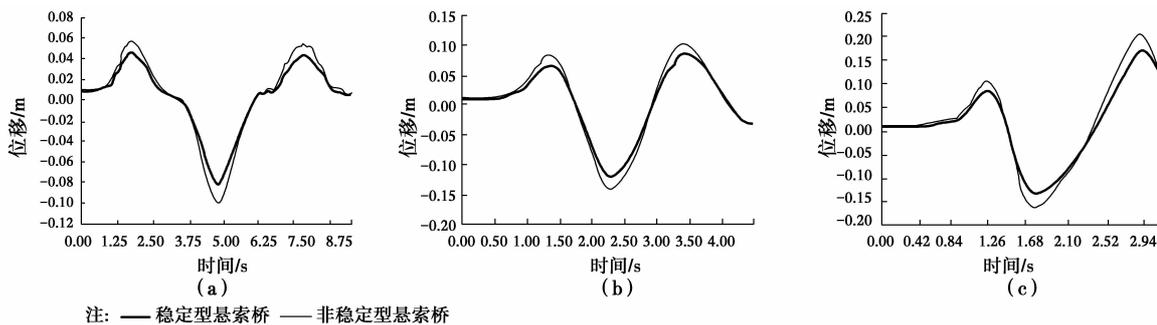


图 8 移动质量车辆模型在速度 40、80、120 km/h 时的悬索桥跨中位移响应图

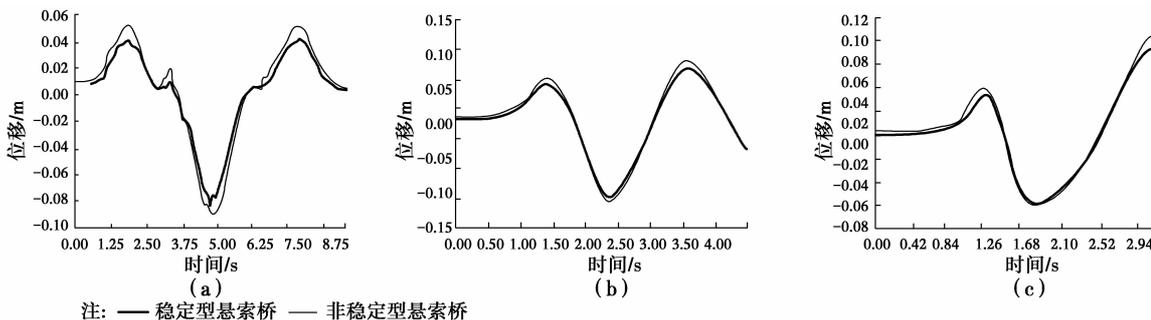


图 9 1/4 弹簧质量车辆模型在速度 40、80、120 km/h 时的悬索桥跨中位移响应图

从图 7~9 可以看出:

1) 车辆行驶到悬索桥跨度位置 1/4 处、跨中处、3/4 处时, 稳定型悬索桥跨中位移幅度小于普通型悬索桥, 说明稳定型悬索桥的整体稳定性和刚度要比普通型悬索桥好很多。

2) 对于 3 种不同的车辆模型, 1/4 车辆模型的下位移变形幅度最大。并且此种车辆模型的位移曲线, 可以看出小幅振动非常明显。而移动力车辆模型和移动质量车辆模型震动幅度就比较弱, 主要原因是 1/4 车辆模型产生的弹性作用在车辆行驶中与桥梁发生位移耦合振动, 由此得出 1/4 车辆模型模拟悬索桥的车桥耦合过程是非常理想的一种模型, 要好于另外两种车辆模型。

3) 在不同车速的情况下, 随着车速的提升悬索桥跨中最大负向位移逐渐增大, 同时处于低速时(40 km/h)跨中位移左峰值与右峰值基本对称, 且在此

速度时对于 1/4 车辆模型位移曲线的小幅振动比较明显, 是由于在低速时车体弹簧的原因, 但车速提升时该现象就不是很明显。当车速提升(80 km 以上)右峰值明显变大(高于左峰值)明显大于跨中最大负向位移, 同时跨中最大负向位移有变小的趋势。最后随车辆行出桥梁时, 右峰值降低明显变小, 跨中位移成不可快速恢复的趋势。所以说车速的提升使悬索桥动力位移响应更加剧烈。速度越快, 稳定型悬索桥和普通型悬索桥的位移差值越小。但是位移变化幅度增大。说明在低速时车桥耦合响应最明显, 而在高速时桥梁位移变形较大。

## 2.2 车桥耦合加速度响应图

图 10、11、12 为两种悬索桥在单向行车情况下, 移动力车辆模型、移动质量车辆模型、四分之一弹簧质量车辆模型分别在速度 40、80、120 km/h 时的跨中加速度图。

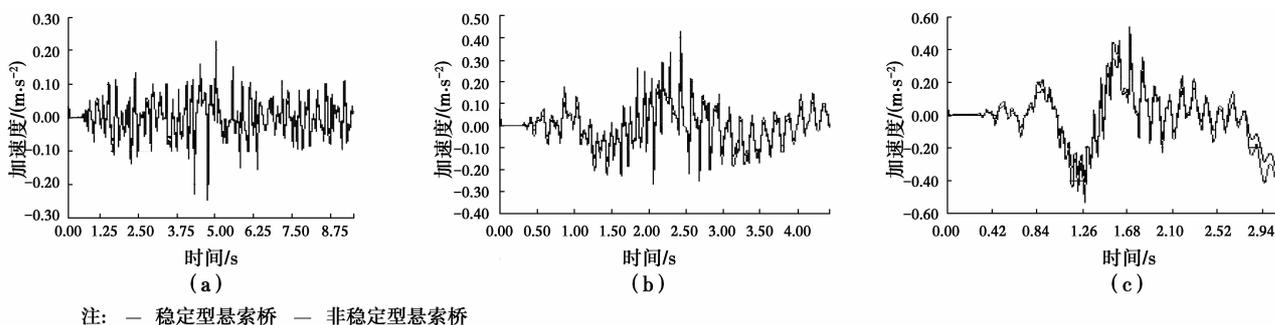


图 10 移动力车辆模型在速度 40、80、120 km/h 时的悬索桥跨中加速度响应图

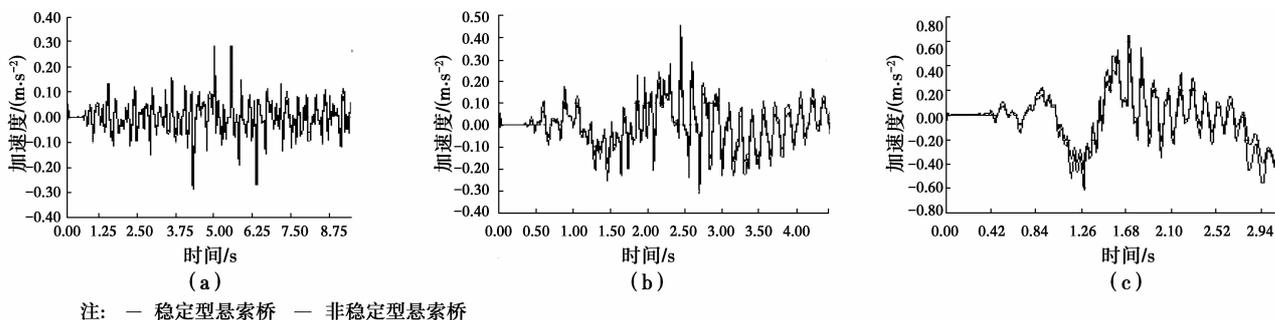


图 11 移动质量车辆模型在速度 40、80、120 km/h 时的悬索桥跨中加速度响应图

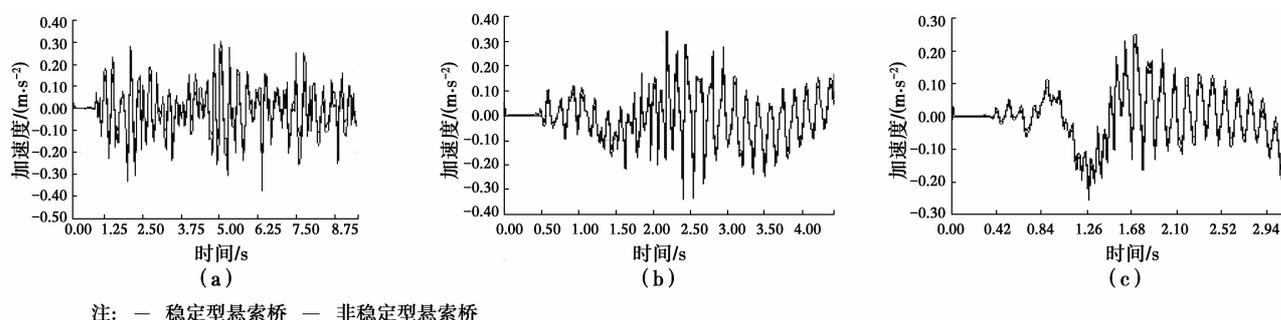


图 12 1/4 弹簧质量车辆模型在速度 40、80、120 km/h 时的悬索桥跨中加速度响应图

从图 10~12 可以看出:

1)在稳定型悬索桥中,当车辆经过时跨中时的加速度值要比悬普通索桥小,说明了在车桥耦合中,稳定型悬索桥比普通悬索桥的竖向加速度的变化幅度小。

2)对于 3 种不同的车辆模型,移动质量车辆模型的加速度响应最大,移动力车辆模型次之,1/4 车辆模型最小。说明车桥耦合中 1/4 车辆模型为最理想模型,最接近实际。

3)随着速度的增大,加速度变化幅度也发生明显变化,且变化幅度较剧烈,说明车速的提升加剧了悬索桥加速度的响应。

4)对于 3 种不同的车辆模型,1/4 车辆模型加速度值最大。原因是在车桥作用下,1/4 车辆模型具有的弹性加大了加速度的耦合响应。还可以得出 1/4 车辆模型的加速度值变化特别大,而其他两种车辆模型的变化幅度就很小,不过随着车速提升有了一定的缓解。

### 3 结语

通过悬索桥的车桥耦合模拟非线性数值分析,得出两种悬索桥和 3 种车辆模型,在车速分别为 40、80、120km/h 时,通过悬索桥的跨中竖向位移和竖向加速度的变化响应曲线,得出悬索桥的车桥耦合振动影响。验证了稳定型悬索桥对变形能力的抵抗相较普通悬索桥有了很大的提高。可以看出不同时速、不同车辆模型对两种桥产生的影响也不相同,为悬索桥的车桥耦合分析提供一定的参考价值。

#### 参考文献:

[1] WILLIS R. The effect produced by causing weights to travel over elastic bars, Appendix to the report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures [R]. H. M. Stationery Office, London, 1949.

- [2] STOKES G G. Discussions of a differential equation related to the breaking of railway bridges [M]. Traris. Cambridge Philosophical Society, 1896.
- [3] TIMOSHENKO S. Erzwungene schwingungen prismatische stabe [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 1911.
- [4] TIMOSHENKO S P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross section [J]. Philosophical Magazine Series 6, 1922, 43: 253.
- [5] 单德山,李乔. 车桥耦合振动数值模拟及软件实现[J]. 西南交通大学学报, 1999, 34(6): 663-667.
- [6] 王刚. 高速铁路三塔斜拉桥车桥动力分析[J]. 上海铁道大学学报, 1999, 20(10): 11-15.
- [7] 元丰, WILSON J F. 多跨连续曲线梁在移动荷载下的动力响应[J]. 土木工程学报, 1999, 32(4): 33-36.
- [8] 屈本宁. 反张悬索桥简介[J]. 空间结构, 1999, 5(2): 63-64.
- [9] 屈本宁,姚文斌,文宏光. 稳定型悬索桥结构形式及其非线性有限元理论[C]// 力学与工程论文集, 1994.
- [10] 屈本宁,刘北辰. 索梁混合有限元模式及其在索桥分析中的应用[J]. 计算结构力学及其应用, 1990, 7(4): 93-100.
- [11] 屈本宁,文宏光. 稳定型悬索桥的试验研究[J]. 昆明理工大学学报, 1998, 23(1): 1-4.
- [12] 夏禾. 车辆与结构动力相互作用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [13] 陈仁福. 大跨悬索桥理论[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1994.
- [14] 雷俊卿,郑明珠,徐恭义. 悬索桥设计[M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.
- [15] 尚晓江,邱峰,赵海峰,等. ANSYS 结构有限元高级分析方法与范例应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005.
- [16] 夏禾. 车辆与结构动力相互作用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

(编辑 郭飞)