

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2017.03.015



水平荷载作用下单桩的虚拟桩解法及参数

曹明

(上海开放大学 理工学院, 上海 200433)

摘要:根据 Muki & Sternberg 的虚拟桩方法, 将水平荷载作用下单桩的问题分解为弹性半空间扩展土和一根虚拟桩的叠加, 其中虚拟桩的弹性模量等于桩的弹性模量与土的弹性模量之差。基于水平位移协调条件推导出求解桩-土间相互作用所需要的第二类 Fredholm 积分方程, 通过广义胡可定律推导出该积分方程间断点的显式解, 从而提高了 Fredholm 积分方程的数值计算精度并简化了计算程序的编写, 根据 Mindlin 解推导出位移影响函数, 简化了位移函数的推导过程。参数分析表明, 桩土弹性模量比对单位水平力作用下桩身最大弯矩的位置有明显的影 响, 随着桩刚度的增加, 桩身最大弯矩的位置随之加深。

关键词:水平荷载; 虚拟桩; 积分方程; 间断点; 参数分析

中图分类号: TU470 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2017)03-0115-07

Fictitious pile approach and parametric analysis of laterally loaded piles

Cao Ming

(Institute of Science and Technology, Shanghai Open University, Shanghai 200433, P. R. China)

Abstract: Following the technique proposed by Muki and Sternberg, the problem is decomposed into an extended soil mass and a fictitious pile characterized respectively by Young's modulus of the soil and that of the difference between the pile and soil. A Fredholm integral equation of the second kind is established which imposes the displacement compatibility condition. According to the generalized Hooke's law, the explicit solutions for the discontinuous point of the integral equation is derived, which improves the numerical accuracy and simplifies the calculation procedure. Based on the Mindlin's solution, the displacement influence function is derived which is simple. The results show that the pile-soil stiffness ratios have obvious influence on the position of the maximum bending moment for the pile under unit shear. With the increase of the pile stiffness, the position of the maximum bending moment of the pile is deeper.

Keywords: laterally loaded; fictitious pile; integral equation; discontinuous point; parametric analysis

随着国民经济的发展, 建设了大量的高层建筑、桥梁和海上平台, 桩基是这些工程结构基础的主要

形式。但已有的研究成果主要集中在桩基承受竖向荷载时的工作性能, 而对水平向荷载作用下桩基的

收稿日期: 2016-08-26

基金项目: 上海市教育委员会科研创新项目(15ZZ103); 上海开放大学 2013 年理科重点课题(JF1301)

作者简介: 曹明(1974-), 男, 副教授, 博士, 主要从事桩基础、地基处理研究, (E-mail) mingcaoxh@hotmail.com.

Received: 2016-08-26

Foundation item: Innovation Project of Shanghai Education Committee (No. 15ZZ103); Key Science Research of Shanghai Open University (No. JF1301)

Author brief: Cao Ming (1974-), PhD, associate professor, main research interests: pile foundation and foundation treatment, (E-mail) mingcaoxh@hotmail.com.

工作研究相对要少一些。桩基除了受到竖向荷载以外,还受到来自水平方向的荷载,如由于结构物自重和使用荷载的偏心而产生的弯矩;交通工具制动时产生的水平力和弯矩;风、波浪、潮水等产生的水平力和弯矩。

近年来,不少学者对水平荷载作用下单桩和群桩进行了研究,Jiang 等^[1]、Jeong 等^[2]和 Su 等^[3]采用荷载-位移曲线(p - y 曲线法)研究桩土相互作用,Conte 等^[4]和 Sánchez 等^[5]采用有限单元法研究桩与土相互作用,土为弹性连续体,桩为弹性梁。Kim 等^[6]、Georgiadis 等^[7]和 Kavitha 等^[8]采用有限单元和 p - y 曲线相结合的方法研究水平荷载作用下桩的工程性状。有限单元法克服了 p - y 曲线法只能用不连续的地基反力系数这一模型参数来描述土体变形性质的缺点,但有限单元法由于计算量大而不适用于大规模群桩的计算。

弹性理论法通过引入弹性模量和泊松比这两个土体的基本参数把地基土体视为弹性连续体。Spillers 等^[9]利用弹性理论法对水平荷载作用下的单桩进行了研究。Poulos^[10-12]也根据弹性理论法分别对水平受荷单桩、群桩、嵌岩桩进行了研究。Poulos 假定三维的桩通过高度为桩长,宽度为桩宽的二维矩形截面与土相互作用,按照梁的弯曲理论进行计算,对矩形截面进行离散,根据桩土的变形协调条件就可以得到桩土共同作用的控制方程。Bipin 等^[13]采用一种新的弹性理论方法,基于虚功原理考虑桩与土的相互作用。Muki 等^[14]提出的虚拟桩模型由于能够考虑桩土分离以后在原桩所在位置留下的孔洞,相对以上弹性理论方法计算结果更加准确^[15]。陆建飞等^[16]基于虚拟桩模型对层状地基中单桩进行了理论分析。Pak^[17]基于 Muki^[14]提

出的虚拟桩模型建立了求解均质地基中水平荷载作用下单桩的 Fredholm 积分方程,Chen 等^[18]基于 Pak 的单桩分析,建立了求解两等长桩位移相互作用系数的虚拟桩模型,梁发云等^[19]进一步建立了群桩的相互作用系数解法。

由于以上求解桩-土相互作用的 Fredholm 积分方程中的间断点都未能给出显式解,因而计算精度不易控制;根据 Muki^[20]求解弹性非轴对称问题的位移函数法推导出位移影响函数 $\bar{u}(z, \xi)$, 推导过程相对复杂^[17-19]。为此,本文通过广义胡可定律推导出了 Pak 方法求解水平荷载作用下桩的弯矩、位移和斜度的 Fredholm 积分方程的间断点的解析解,并简化了位移函数的推导过程,本文基于 Mindlin^[21]解推导出位移函数 $\bar{u}(z, \xi)$ 。

1 单桩的积分方程解法

1.1 Fredholm 积分方程的建立

桩与土之间的相互作用,不仅与土的力学性质有关,更重要的是与桩的受力方式有关。Muki 等^[14,22]把桩视为一维连续弹性体,解决了桩在竖向荷载作用下桩-土相互作用的问题。

如图 1 所示,弹性半空间土体中水平向受荷桩的半径为 a ,长度为 L ,桩体的横截面积为 A ,桩顶受到作用在 xoy 平面内的水平剪力 $V(0)$ 和弯矩 $M(0)$ 。与 Muki 等^[14]文中一样,通过引入虚拟桩 B_* 来考虑桩与土之间的相互作用。虚拟桩的弹性模量 E_* 为

$$E_* = E_p - E_s \tag{1}$$

式中:下标 p 和 s 分别表示桩和半空间扩展土。认为土是半无限连续弹性体,桩是三维连续弹性结构。

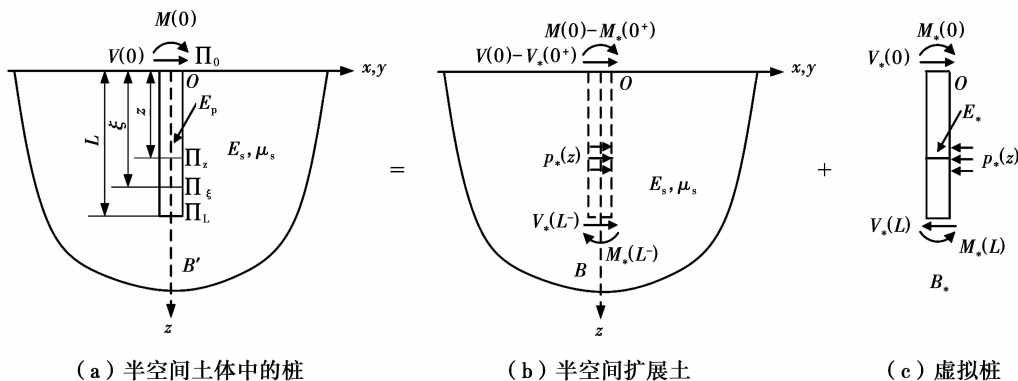


图 1 弹性半空间土体中受水平荷载桩

Fig. 1 Laterally loaded pile embedded in elastic semi-infinite soil

按照 Muki 等的方法,将图 1(a)水平受荷桩的问题分解为图 1(b)的弹性半空间扩展土和图 1(c)的一根虚拟桩的叠加,图 1(c)表示作用在虚拟桩 B_* 上的外力。 $-p_*(z)$ 表示半空间扩展土作用在虚拟桩单位长度上的力; $V_*(0^+)$ 、 $-M_*(0^+)$ 分别表示直接作用在虚拟桩桩顶上的剪力和弯矩; $-V_*(L)$ 、 $M_*(L)$ 分别表示作用在桩底上的剪力和弯矩。根据力的作用与反作用原理,作用在半空间扩展土 B 上的力包括: $p_*(z)$ 表示虚拟桩作用在半空间扩展土单位长度上的力; $V(0) - V_*(0^+)$ 、 $-[M(0) - M_*(0^+)]$ 分别表示真实桩在截面 Π_0 上直接作用在半空间扩展土上的的剪力和弯矩; $V_*(L)$ 、 $-M_*(L)$ 分别表示虚拟桩在截面 Π_L 上作用在半空间土上的剪力和弯矩。根据梁的柏努利-欧拉的挠度理论,虚拟桩 B_* 的挠度曲线微分方程为

$$E_* I \frac{d^2 u_*(z)}{dz^2} = M_*(z) \quad (2)$$

平衡方程为

$$\frac{dM_*(z)}{dz} = V_*(z) \quad (3)$$

$$\frac{dV_*(z)}{dz} = -p_*(z) \quad (4)$$

式中: $u_*(z)$ 为虚拟桩的位移; I 为桩的惯性矩。根据 Reissner^[23]、Muki 等^[24] 假设桩两端通过集中力的方式直接传递给桩周围的土,不考虑桩身与土之间的摩擦力。Pak 进一步假定桩身横截面发生小的旋转,则由真实桩的底端直接传递给虚拟桩的弯矩以及真实桩在截面 Π_0 上直接作用在半空间扩展土上的的弯矩可以忽略不计,即

$$M_*(L) = 0 \quad (5)$$

$$M(0) - M_*(0^+) = 0 \quad (6)$$

$\bar{u}(z, \xi)$ 表示在截面 Π_ξ 上受合力为单位力方向是水平方向的均布力作用时对半空间扩展土点 $(0, 0, z)$ 产生的水平向位移影响函数,根据虚拟桩与桩所在位置半空间扩展土水平位移协调条件,则半空间土体内虚拟桩的位移可以表示为

$$u_*(z) =$$

$$[V(0) - V_*(0^+)] \hat{u}(z, 0) + V_*(L) \hat{u}(z, L) + \int_0^L p_*(\xi) \hat{u}(z, \xi) d\xi, (0 \leq z \leq L) \quad (7)$$

利用式(4),对式(7)中右边最后一项进行分部积分,并由式(3)、(5)、(6),考虑 $\frac{\partial \hat{u}(z, \xi)}{\partial \xi}$ 的间断性并化简,则得到

$$u_*(z) = V(0) \hat{u}(z, 0) - M(0) \frac{\partial \hat{u}(z, 0)}{\partial \xi} - M_*(z) \frac{\partial \hat{u}(z, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{z^-}^{z^+} - \int_0^L M_*(\xi) \frac{\partial^2 \hat{u}(z, \xi)}{\partial \xi^2} d\xi, (0 \leq z \leq L) \quad (8)$$

如图 2 所示,设在半径为 a 的圆形范围内作用合力为单位力的水平力 P 。

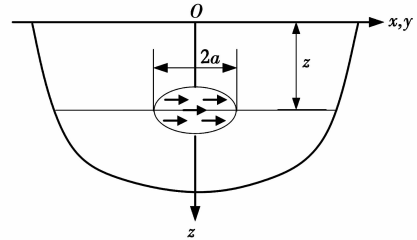


图 2 弹性半空间土体中水平圆形荷载

Fig. 2 Horizontal circular load in elastic semi-infinite soil

$$P = \frac{1}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (9)$$

由式(9)在圆形荷载作用平面的圆心处有

$$\tau_{xz}(z, z^+) - \tau_{xz}(z, z^-) = -\frac{1}{2A} \quad (10)$$

式中: A 为半径为 a 的荷载作用面面积; $\tau_{xz}(z, z^+)$ 和 $\tau_{xz}(z, z^-)$ 分别表示荷载作用平面 Π_ξ 分别从上侧和下侧趋近截面 Π_z 时在截面 Π_z 圆心产生的剪切应力。根据广义虎克定律有

$$\gamma_{xz}(z, z^+) - \gamma_{xz}(z, z^-) = \frac{1}{G_s} [\tau_{xz}(z, z^+) - \tau_{xz}(z, z^-)] = -\frac{1}{2G_s A} \quad (11)$$

式中: G_s 是土的剪切模量; $\gamma_{xz}(z, z^+)$ 和 $\gamma_{xz}(z, z^-)$ 分别表示荷载作用平面 Π_ξ 分别从上侧和下侧趋近截面 Π_z 时在截面 Π_z 圆心产生的剪切应变。由式(11)可以得到

$$\frac{\partial \hat{u}(z, z^+)}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{u}(z, z^-)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2G_s A} \quad (12)$$

式中: $\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \xi}$ 即为荷载作用 xoz 面内桩轴线对于 z 轴的斜度。利用式(12),可以简化计算,从而减小计算量。

假设虚拟桩 $u_*(z)$ 为

$$u_*(z) = -\int_0^L g(z, \xi) M_*(\xi) d\xi + u_*(0) \left(1 - \frac{z}{L}\right) + u_*(L) \left(\frac{z}{L}\right) \quad (13)$$

其中

$$g(z, \xi) = \frac{1}{E_* I} \begin{cases} \left(1 - \frac{\xi}{L}\right)z, & z < \xi \\ \left(1 - \frac{z}{L}\right)\xi, & z > \xi \end{cases}$$

为了进行无量纲分析, 假设参数 $\bar{z} = \frac{z}{a}; \bar{\xi} = \frac{\xi}{a};$

$$\bar{L} = \frac{L}{a}; \bar{E} = \frac{E_p}{E_s}; \bar{u} = \frac{u_*}{a}; \kappa = \frac{8}{(1 + \nu_s)(E - 1)};$$

$$\bar{M}(0) = \frac{M(0)}{4\pi G_s a^3}; \bar{M} = \frac{M_*}{4\pi G_s a^3}; \bar{V}(0) = \frac{V(0)}{4\pi G_s a^2}; \bar{V} =$$

$$\frac{V_*}{4\pi G_s a^2}.$$

式中: ν_s 是土的泊松比。将式(12)代入式(8), 并由式(13)可得到用无量纲参数表示的控制方程为

$$B(\bar{z})\bar{u}(0) + C(\bar{z})\bar{u}(\bar{L}) +$$

$$\int_0^{\bar{L}} K(\bar{z}, \bar{\xi})\bar{M}(\bar{\xi})d\bar{\xi} - 2\bar{M}(\bar{z}) =$$

$$\bar{V}(0)\hat{U}(\bar{z}, 0) - \bar{M}(0)\frac{\partial \hat{U}(\bar{z}, 0)}{\partial \bar{\xi}}, 0 \leq \bar{z} \leq \bar{L}$$

(14)

式中: $B(\bar{z}) = \left(1 - \frac{\bar{z}}{\bar{L}}\right), C(\bar{z}) = \frac{\bar{z}}{\bar{L}}, \hat{U}(\bar{z}, \bar{\xi}) =$

$$4\pi G_s a \hat{u}(z, \xi), G(\bar{z}, \bar{\xi}) = \left\{ \left(1 - \frac{\bar{\xi}}{\bar{L}}\right)\bar{z}, \bar{z} < \bar{\xi} \left(1 - \frac{\bar{z}}{\bar{L}}\right)\bar{\xi}, \bar{z} > \bar{\xi} \right\}, K(\bar{z}, \bar{\xi}) = \frac{\partial^2 \hat{U}(\bar{z}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}^2} - \kappa G(\bar{z}, \bar{\xi}).$$

式(14)、式(5)和式(6)联立可以直接求解, 其中待求的未知量为虚拟桩的弯矩、桩顶和桩底的水平位移。

1.2 单桩桩身水平位移和斜度的解答

用无量纲参数表示虚拟桩的位移为

$$\bar{u}(\bar{z}) = - \int_0^{\bar{L}} \kappa G(\bar{z}, \bar{\xi})\bar{M}(\bar{\xi})d\bar{\xi} + \bar{u}(0)\left(1 - \frac{\bar{z}}{\bar{L}}\right) + \bar{u}(\bar{L})\left(\frac{\bar{z}}{\bar{L}}\right) \quad (15)$$

虚拟桩的斜度 θ 可以表示为

$$\theta = \frac{d\bar{u}}{d\bar{z}} \quad (16)$$

式(15)代入式(16)可以得到虚拟桩的斜度表达式, 即

$$\theta = - \int_0^{\bar{L}} \kappa H(\bar{z}, \bar{\xi})\bar{M}(\bar{\xi})d\bar{\xi} + \frac{1}{\bar{L}}[\bar{u}(\bar{L}) - \bar{u}(0)] \quad (17)$$

其中

$$H(\bar{z}, \bar{\xi}) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\xi}}{\bar{L}}, \bar{z} < \bar{\xi} \\ -\frac{\bar{\xi}}{\bar{L}}, \bar{z} > \bar{\xi} \end{cases}$$

1.3 位移影响函数的解答

Pak 根据 Muki^[20] 的方法求解位移影响函数 $\bar{u}(z, \xi)$, 本文根据 Mindlin 解求解位移函数 $\bar{u}(z, \xi)$ 。半无限空间体深度 c 处作用一水平集中力 P 时, 在深度 z 处力作用方向的水平位移 u' 为

$$u' = \frac{P}{16\pi G_s (1 - \mu_s)} \left[\frac{3 - 4\mu_s}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\mu_s)x^2}{R_2^3} + \frac{2c\bar{z}}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x^2}{R_2^2}\right) + \frac{4(1 - \mu_s)(1 - 2\mu_s)}{(R_2 + z + c)} \left(1 - \frac{x^2}{R_2(R_2 + z + c)}\right) \right] \quad (18)$$

式中: $R_1 = [r^2 + (z - c)^2]^{\frac{1}{2}}, R_2 = [r^2 + (z + c)^2]^{\frac{1}{2}}.$

将式(9)带入式(18), 位移函数 $\bar{u}(z, c)$ 可表示为

$$\hat{u}(z, c) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{u' r dr d\theta}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (19)$$

整理化简式(19), 并由 $\hat{U}(\bar{z}, \bar{\xi}) = 4\pi G_s a \bar{u}(z, \xi)$, 可以计算出

$$\hat{U}(\bar{z}, \bar{\xi}) = \frac{1}{8(1 - \mu_s)} \left\{ (7 - 8\mu_s) \tan^{-1}\left(\frac{1}{d_1}\right) + (9 - 16\mu_s + 8\mu_s^2) \tan^{-1}\left(\frac{1}{d_2}\right) - \frac{d_1}{1 + d_1^2} - (3 - 4\mu_s) \frac{d_2}{1 + d_2^2} + \frac{4z\bar{\xi}d_2}{(1 + d_2^2)^2} \right\} \quad (20)$$

式中: $d_1 = |\bar{z} - \bar{\xi}|, d_2 = \bar{z} + \bar{\xi}.$

2 算例验证及参数分析

2.1 算例验证

2.1.1 分段数对精度的影响 为了确定桩身分段数对桩顶位移计算精度的影响, 图 3 给出了仅受水平力的桩顶位移与桩体分段数之间的关系, 桩体分段数表示为

$$n = \delta L / d$$

式中: δ 为单位桩长 L/d 的分段数。计算中取不同的桩土模量比 ($E_p/E_s = 10, 100, 10\ 000$)、桩长细比 ($L/d = 80, 100$)、土的泊松比 ($\mu_s = 0.15, 0.25, 0.49$) 情况下, 考察单位桩长分段数 δ 对仅受水平力的桩顶自由桩的位移计算精度的影响。

比较图 3(a)、(b) 可以发现, 图中所示各种情况下数值计算结果呈现出相同的规律, 桩长细比、地土泊松比和桩-土弹性模量比均对数值计算精度的影响不明显, 其中, 桩长细比对计算结果的影响规律与曹明等^[25] 的竖向荷载作用下的分析结果一致, 即桩长细对数值计算精度没有明显的影响。

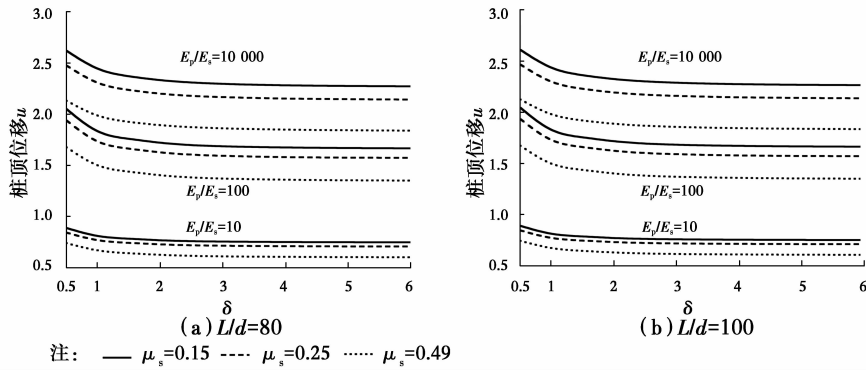


图 3 桩分段数对桩顶位移的影响

Fig. 3 Pile top displacement versus element number

综合以上分析以及曹明等^[25]的分析结果,当桩的分段数 $\delta \geq 3$ 时,数值结果已经稳定。虽然桩体分段数越多,计算精度越高,但随着计算精度的提高,计算耗时也在增加。如果求解的第二类 Fredholm 积分方程中的间断点没有显式解,数值求解中为了逼近精确解,需要无限在间断点处增加桩的分段数。

2.1.2 与 Pak 计算结果的比较 为了验证本文水

平荷载作用下单桩工程性状计算方法的正确性,下面与 Pak 的计算结果进行比较。计算参数为:泊松比为 $\mu_s = 0.25$,桩-土弹性模量比分别为 $E_p/E_s = 1000, 5000$,桩长细比为 $L/a = 50$ 。

从图 4 可以看出,两种计算方法所得计算结果数值大小基本一致,说明本文单桩的工程性状的计算方法是正确的,同时,也验证了本文计算程序的正确性。

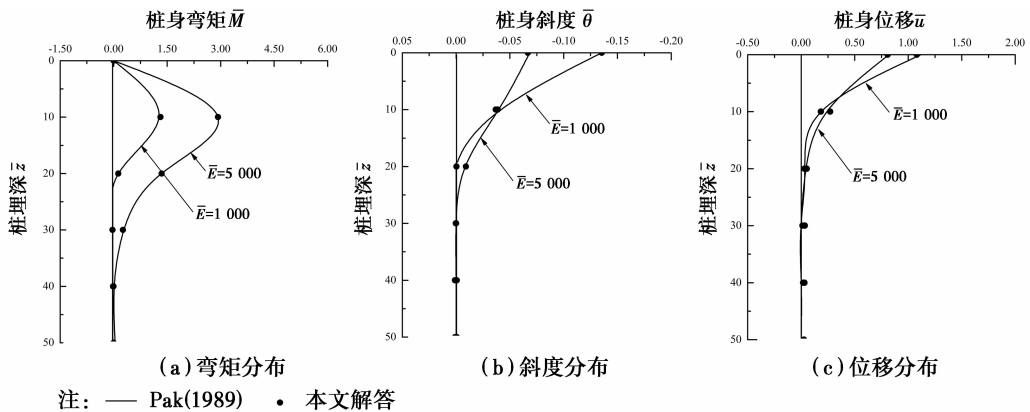


图 4 单位水平力作用下桩身弯矩、斜度和位移分布

Fig. 4 Bending moment, slope and displacement distributions under unit shear

3.2 参数分析

为了考察单桩分别在单位水平力作用下和单位弯矩荷载作用下的工程性状,对影响桩身弯矩分布、桩身位移分布和桩身斜度分布的桩长细比、桩-土弹性模量比参数进行了系统的分析。土的泊松比为 $\mu_s = 0.3$,桩-土弹性模量比分别为 $E_p/E_s = 100, 1000, 5000$ 和 10000 ,桩长细比为 $L/a = 40$ 。

1)单位水平力 从图 5 可以看出,桩身的弯矩沿桩的埋深,先增加,再减小,具体有如下分布规律:

桩-土弹性模量比对桩身最大弯矩的位置有明显的影响,随着桩刚度的增加,桩身最大弯矩的位置在加深。另外,当桩顶自由桩桩顶作用单位水平荷载时,桩的刚度越大,桩身的最大弯矩值也越大。

桩身的最大位移和最大斜度位置都在桩顶,随着桩的埋深增加,桩身的位移和斜度逐渐减小,桩-土弹性模量比对桩顶位移和斜度值大小都有明显的影响,桩的刚度越大,桩顶位移和斜度值绝对值越小。相反,桩的刚度越大,桩身的位移和斜度为零的位置越深。

2)单位弯矩 从图 6 可以看出,桩顶自由桩在桩顶单位弯矩作用下,桩身的弯矩沿桩的埋深,由桩顶的单位弯矩减小到桩底弯矩等于零。桩-土弹性模量比对桩身弯矩的分布有明显的影响,桩身刚度越大,桩身弯矩从单位弯矩减小到 0 的位置越深。如果弯矩为零的位置不在桩底,在该位置的下部会出现负弯矩,如图 6(a)中桩土弹性模量比 $E_p/E_s =$

100, 在桩埋深 $L/a = 8$ 的位置, 桩身弯矩减小为 0, 在桩埋深 $L/a = 8$ 以下位置出现了负弯矩。

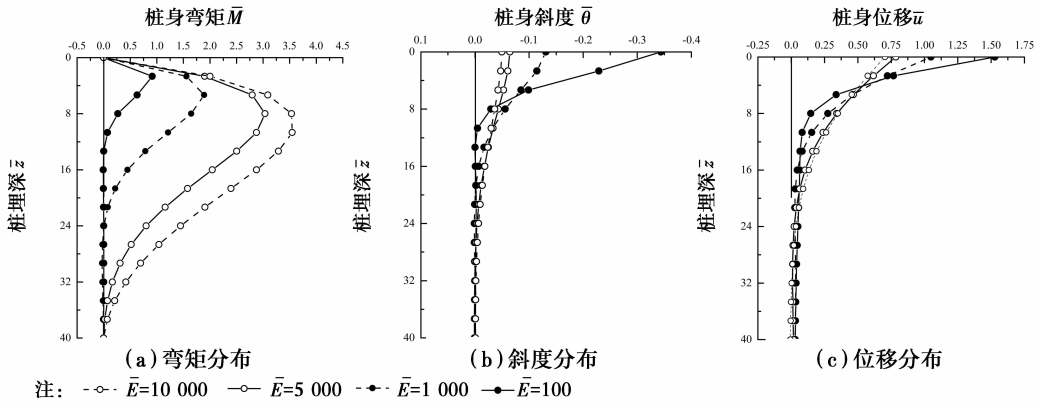


图 5 单位水平力作用下桩身弯矩、斜度和位移分布

Fig. 5 Bending moment, slope and displacement distributions under unit shear

与桩顶作用单位水平荷载桩身斜度分布规律一样, 桩顶作用单位弯矩荷载时, 桩身的最大位移和最大斜度位置也在桩顶, 随着桩的埋深增加, 桩身的位移和斜度逐渐减小, 具体有如下分布规律: 桩-土弹性模量比对桩顶位移和斜度值大小有明显的影

响, 桩的刚度越大, 桩身的位移和斜度分别为零的位置越深。

相反, 桩的刚度越大, 桩身的位移和斜度分别为零的位置越深。将图 6(c)与单位水平力作用下桩的斜度分布图 5(b)对比发现, 对于不同的桩刚度, 桩顶作用单位弯矩的桩顶位移值大小等于桩顶作用单位水平力的桩顶斜度的绝对值。

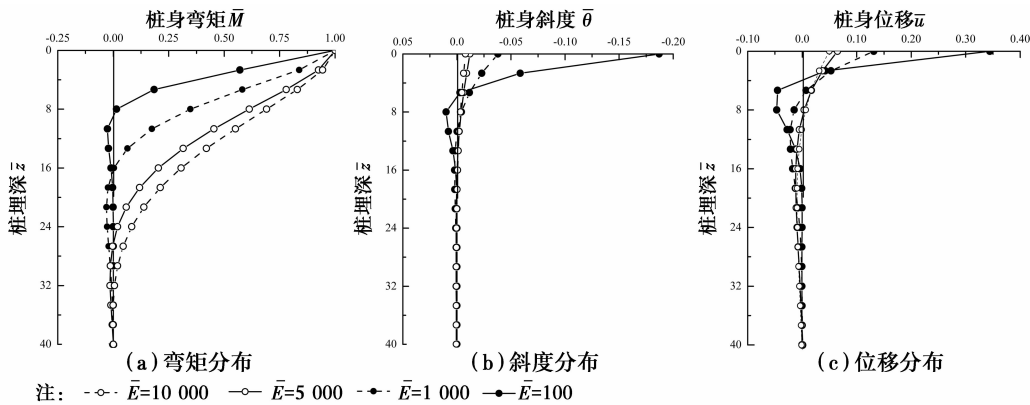


图 6 单位水平弯矩作用下桩身弯矩、斜度和位移分布

Fig. 6 Bending moment, slope and displacement distributions under unit moment

4 结论

通过广义胡可定律推导出了 Pak 方法求解水平荷载作用下桩的弯矩、位移和斜度的 Fredholm 积分方程中间断点的解析解, 从而提高了 Fredholm 积分方程的数值计算精度并简化了计算程序的编写, 根据 Mindlin 解推导位移函数 $\hat{u}(z, \xi)$, 简化了位移函数的推导过程。

对影响均质地基中桩的弯矩、位移和斜度的桩土弹性模量比进行了系统的研究, 分别考察了均质地基中桩的弯矩、位移和斜度特性。通过参数分析, 得出以下结论:

1) 桩-土弹性模量比对单位水平力作用下桩身最大弯矩的位置有明显的影

响, 随着桩刚度的增加, 桩身最大弯矩的位置在加深, 桩-土弹性模量比对桩顶斜度和位移的大小也有明显的影

响。2) 桩-土弹性模量比对桩顶作用单位弯矩下桩身弯矩的分布有明显的影

顶位移值大小等于桩顶作用单位水平力的桩顶斜度的绝对值。

参考文献:

- [1] JIANG C, LI B, ZHOU K P, et al. Reliability analysis of piles constructed on slopes under laterally loading [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals of China, 2016, 26: 1955-1964.
- [2] JEONG S, KIM Y, KIM J. Influence on lateral rigidity of offshore piles using proposed p - y curves [J]. Ocean Engineering, 2011, 38: 397-408.
- [3] SU D, YAN W M. A multidirectional p - y model for lateral sand-pile interactions [J]. Soils and Foundations, 2013, 53(2): 199-214.
- [4] CONTE E, TRONCONE A, VENA M. Behaviour of flexible piles subjected to inclined loads [J]. Computers and Geotechnics, 2015, 69: 199-209.
- [5] SÁNCHEZ M, ROESSET J M. Evaluation of models for laterally loaded piles [J]. Computers and Geotechnics, 2013, 48: 316-320.
- [6] KIM Y H, JEONG S S. Analysis of soil resistance on laterally loaded piles based on 3D soil-pile interaction [J]. Computers and Geotechnics, 2011, 38(2): 248-257.
- [7] GEORGIADIS K, GEORGIADIS M. Development of p - y curves for undrained response of piles near slopes [J]. Computers and Geotechnics, 2012, 40: 53-61.
- [8] KAVITHA P, MUTHU V M, Sundaravadivelu R. Soil structure interaction analysis of a dry dock [C]// International Conference on Water Resources, Coastal and Ocean Engineering (ICWRCOE 2015), India, 2015: 287-294.
- [9] SPILLERS W R, STOLL R D. Lateral response of piles [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1964, 90(SM6): 1-9.
- [10] POULOS H G. Behavior of laterally loaded piles; I-single piles [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1971, 97(5): 711-731.
- [11] POULOS H G. Behavior of laterally loaded piles; II-pile groups [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1971, SM5: 733-751.
- [12] POULOS H G. Behavior of laterally loaded piles; III-socketed piles [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1972, 4: 341-360.
- [13] BIPIN K G, DIPANJAN B. Analysis of laterally loaded rigid monopiles and poles in multilayered linearly varying soil [J]. Computers and Geotechnics, 2016, 72: 114-125.
- [14] MUKI R, STERNBERG E. Elastostatic load-transfer to a half-space from a partially embedded axially loaded rod [J]. International Journal of Solids and Structures, 1970, 6: 69-90.
- [15] 曹明, 陈胜立. 层状地基中群桩基础弹性理论解法及参数分析[J]. 土木建筑与环境工程, 2012, 34(2): 1-6.
CAO M, CHEN S L. An elastic theory approach and parametric analysis of pile group in layered soils [J]. Journal of Civil, Architecture & Environmental Engineering, 2012, 34(2): 1-6. (in Chinese)
- [16] 陆建飞, 王建华, 沈为平. 考虑固结和流变的层状地基中的水平单桩的理论分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(3): 386-390.
LU J F, WANG J H, SHEN W P. Theoretical study of horizontally loaded single pile in layered soil considering consolidation and rheology of soil [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001, 20(3): 386-390. (in Chinese)
- [17] PAK R Y S. On the flexure of a partially embedded bar under lateral loads [J]. Journal of Applied Mechanics Division, ASME, 1989, 56: 263-269.
- [18] CHEN S L, CHEN L Z. Note on the interaction factor for two laterally loaded piles [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2008, 134 (11): 1685-1690.
- [19] 梁发云, 陈海兵, 陈胜立. 横向荷载下群桩相互作用的积分方程解法及参数分析[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(5): 849-854.
LIANG F Y, CHEN H B, CHEN S L. Integral equation method and parametric analysis for interaction of laterally loaded pile groups [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(5): 849-854. (in Chinese)
- [20] MUKI R. Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semi-infinite solid and a thick plate [J]. Progress in Solid Mechanics, 1960, 6: 401-439.
- [21] MINDLIN R D. Force at a point in the interior of semi-infinite solid [J]. Physics, 1936, 7: 195-202.
- [22] MUKI R, STERNBERG E. On the diffusion of an axial load from an infinite cylindrical bar embedded in an elastic medium [J]. International Journal of Solids and Structures, 1969, 5: 587-605.
- [23] REISSNER E. Note on the problem the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet [J]. Proceeding of the National Academy of Science, 1940, 26(4): 300-304.
- [24] MUKI R, STERNBERG E. On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semi-infinite elastic sheet [J]. Journal of Applied Mechanics, 1968, 35: 737-746.
- [25] CAO M, CHEN L Z. Analysis of interaction factors between two piles [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University(Sci), 2008, 13(2): 171-176.