

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2017.03.017



基于随机场的岩石边坡三维稳定性分析

牛焱炜, 周小平, 钱七虎

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400015)

摘要: 基于随机场理论, 考虑了岩石材料属性的空间变异性对岩石边坡稳定性的影响, 将边坡主滑面上的摩擦系数和粘聚力视为高斯随机变量, 确定了主滑面上的摩擦系数和粘聚力的均值、方差和协方差, 获得了两个随机量之间的相关系数和互相关长度。在此基础上, 对岩石边坡进行了三维稳定性分析, 确定了岩石边坡的稳定系数和失效概率。数值计算结果表明, 摩擦系数和粘聚力的空间变异性对边坡稳定性有重要影响。

关键词: 岩石边坡; 稳定系数; 失效概率; 随机场

中图分类号: TU475 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2017)03-0129-09

Three-dimensional stability assessment of rock slopes based on random fields

Niu Yiwei, Zhou Xiaoping, Qian Qihu

(School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing, 400015)

Abstract: The stability of rock slopes is analyzed by considering the spatial variability of the rock materials based on theory of random fields. Both the cohesion and frictional coefficient along the main sliding surface are treated as Gaussian random fields, and the mean value, variance, covariance of the cohesion and frictional coefficient are determined. Spatial correlation lengths and the cross-correlation between cohesion and coefficient are obtained. Three-dimensional stability assessment of rock slopes is analyzed to obtain the factor of safety and probability of failure of rock slope. The numerical results show that the spatial variability of cohesion and coefficient of friction significantly affect the safety of rock slopes.

Keywords: rock slopes; factor of safety; probability of failure; random fields

边坡失稳已与地震、火山爆发并列成为世界三大地质灾害(或地质灾害源)^[1]。当边坡岩体内发育有层间软弱夹层或较大的断层、节理和裂隙时, 则容

易发生滑动破坏。在边坡稳定性分析过程中, 需要考虑岩土工程是土木工程中最受不确定性主导的分支学科, 因为它通常与高度变化的天然材料密切相关

收稿日期: 2016-12-02

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)(2014CB046903); 重庆市自然科学基金(cstc2013kjrcljrcj0001、cstc2015jcyjys30001)

作者简介: 牛焱炜(1992-), 男, 主要从事岩体力学研究, (E-mail) caunyw@cau.edu.cn。

周小平(通信作者), 男, 教授, 博士生导师, (E-mail) xiao_ping_zhou@126.com。

Received: 2016-12-02

Foundation item: National Program on Key Basic Research Project (973 Program) (NO. 2014CB046903); Natural Science Foundation Project of CQ CSTC (No. cstc2013kjrcljrcj0001, cstc2015jcyjys30001)

Author brief: Niu Yiwei (1992-), main research interest: mechanical properties of rock mass, (E-mail) caunyw@cau.edu.cn.

Zhou Xiaoping (corresponding author), professor, doctoral supervisor, (E-mail) xiao_ping_zhou@126.com.

关。岩性参数误差有 3 个主要来源,即材料固有变异性、统计误差、系统误差^[2]。固有变异性是指即使在各向同性岩石介质中,岩石性质表现出变异性。由于现场采样和实验室数据的有限性,岩石属性的统计数据(例如均值和标准差)受(统计的)不确定性的影响,但是这类不确定性会随样品数量的增加而减少。系统不确定性是由于实验室和原位条件存在不同因素,如实验规模、各向异性和水饱和度等^[3]。笔者重点研究材料的固有变异性(其在均质材料中也会比较大)及其对失效概率的影响。

传统边坡稳定性的评价方法主要有刚体极限平衡法、赤平投影法、有限元法以及模拟试验等。为了避免材料的不确定性所造成的影响,这些方法对于设计参数、稳定系数等一般都采用偏保守的值进行设计。为了考虑参数的变异性 and 不确定性,在传统方法基础上引入随机场理论十分必要。一般情况下,得出随机变量的分布函数可以说是一个相当复杂的问题,并且找到精确解也有相当困难。祁小辉等^[4]采用谱表现法建立了表征土体空间变异性的随机场模型,提出了考虑土体空间变异性的边坡最危险滑动面随机分析方法。蒋水华等^[5]提出了基于多重响应面与子集模拟的边坡可靠度分析方法。舒苏荀等^[6]提出一种能合理考虑土性参数空间变异性的边坡模糊随机可靠度分析方法。Einstein 等^[7]在岩石边坡中采用了蒙特卡罗方法计算。唐小松等^[8]研究了表征抗剪强度参数间相关性的 Copula 函数对边坡可靠度的影响,提出了无限边坡失效概率计算的直接积分方法。Pantelidis 等^[9]和 Griffiths 等^[10]等分别用一维跟二维随机变量考虑岩石空间变异性对边坡稳定性的影响。Gravanis 等^[11]研究了岩石材料属性的空间变异性对岩石边坡失效概率的影响。然而,Gravanis 仅仅研究了重力作用下岩石边坡的二维稳定性问题。但是实际边坡或滑坡体是三维问题,将三维问题简化为二维问题,会带来计算结果的较大误差。为了合理地评价岩石边坡的稳定性,笔者将 Gravanis 的二维随机场方法延伸为三维随机场方法,并把底面摩擦系数和粘聚力视为高斯随机变量,分析岩石边坡的三维稳定性问题。

1 基于随机场理论的岩石边坡三维稳定性分析

1.1 高斯随机场的几个假定

为简化计算模型,做如下假设:

1)高斯过程:联合概率分布函数为多元正态随机分布过程,其巨大的优势是只需均值向量和协方差矩阵就可以确定其完整分布函数。

2)平稳性或统计均匀性:联合概率分布函数的空间非独立性,即它依赖于点的相对位置关系。这个假设意味着均值、协方差和高阶矩是常量,且联合概率分布函数也是恒定的,不随时间和空间变化。

3)各向同性:在二维或更高维度的随机场中,各向同性是指旋转不变形。在各向同性中,两个点的相关性仅跟两点之间距离有关,而与方向角度无关。

在上述假设下,只需知道 3 个数值即可求解:随机场的均值 μ 、随机场的方差 σ^2 、随机场的空间变异程度。其中,随机场的空间变异程度由随机场的联合分布二阶矩表征,可以从协方差函数中获得^[12]。

1.2 边坡稳定极限平衡分析方法

假定岩石边坡的可能滑动面如图 1 所示。为了简化计算,忽略孔隙水压力和基础荷载的作用,将上部岩体视为整体。边坡三维示意图如图 1 所示,作用在与交棱线垂直的剖面图如图 2。

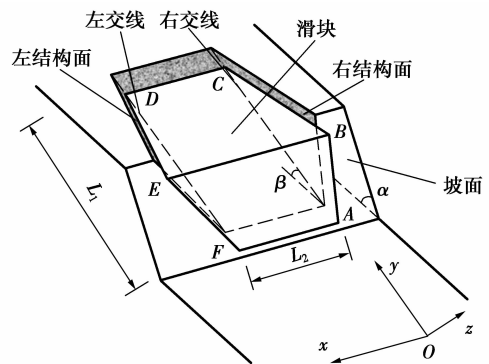


图 1 岩石边坡三维示意图

Fig. 1 Three-dimensional perspective of rock slope

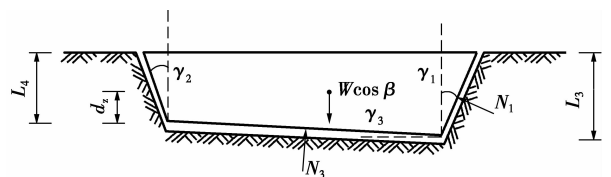


图 2 作用在与交棱线垂直的剖面上的力

Fig. 2 The normal reactions acting on the discontinuities

1.2.1 边坡沿结构面 ABC 和 ACDF 滑动 当 $\gamma_3 > 0$ 时,滑动面 DEF 上的抗滑力可以忽略不计,边坡沿结构面 ABC 和 ACDF 滑动,滑动方向为交棱线 AC。根据摩尔库伦准则,岩石边坡的稳定系数 F 为抗滑力与下滑力的比值,其表达式为

$$F = \frac{c_1 \times A_1 + c_3 \times A_3 + N_1 \times \tan \varphi_1 + N_3 \times \tan \varphi_3}{W \times \sin \beta} \quad (1)$$

如图 2 所示,根据剖面上力的平衡方程有

$$W \cos \beta = N_1 \sin \gamma_1 + N_3 \cos \gamma_3 \quad (2)$$

$$N_1 \cos \gamma_1 = N_3 \sin \gamma_3 \quad (3)$$

$$A_1 = \frac{L_1 L_3}{2 \cos \gamma_1} \quad (4)$$

$$A_2 = \frac{L_1 L_4}{2 \cos \gamma_2} \quad (5)$$

$$A_3 = L_1 L_2 \quad (6)$$

式中: c_1 、 c_3 分别为滑动面 ABC、ACDF 上的粘聚力; A_1 、 A_3 分别为滑动面 ABC、ACDF 的面积; N_1 、 N_3 分别为右结构面和底面的法向反力; L_1 、 L_2 分别为滑动面的长和宽; L_3 、 L_4 分别为滑块右交棱线和左交棱线距坡顶的高度; α 、 β 分别为坡面和滑动面的倾角; γ_1 、 γ_2 分别为滑体侧面相对竖直面的角度; φ 为滑体滑面的摩擦角; W 为滑动面上覆岩体的总重。

1)ACDF 面上的摩擦系数为随机场变量 在面 ACDF 上建立局部直角坐标系,以 A 为原点,AC 为 y 轴正方向,AF 为 x 轴正方向,则此时边坡的稳定系数 F_1 可表示为

$$F_1 = \frac{c_1 \times A_1 + c_3 \times A_3 + N_1 \times \tan \varphi_1}{W \times \sin \beta} + \frac{\int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \sigma(x, y) \tan \varphi_3(x, y) dx dy}{W \times \sin \beta} \quad (7)$$

式中: $\sigma(x, y)$ 为坐标 (x, y) 点的基底正应力; $\tan \varphi_3(x, y)$ 为滑动面上的摩擦系数。

基于 Fenton-Vanmarcke 方法^[13], $\tan \varphi(x, y)$ 当作具有随机属性的随机场函数变量。如图 3 所示,根据小偏心受压公式,可得基底任一点的正应力值

$$\sigma(x, y) = \frac{N_3}{A_3} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (8)$$

式中: M_x 为偏心荷载对 $O'_x O'_x$ 轴的力矩; M_y 为偏心荷载对 $O'_y O'_y$ 轴的力矩; I_x 为基底底面积对 $O'_x O'_x$ 轴的惯性矩; I_y 为基底底面积对 $O'_y O'_y$ 轴的惯性矩。

根据应力迭加原理可得

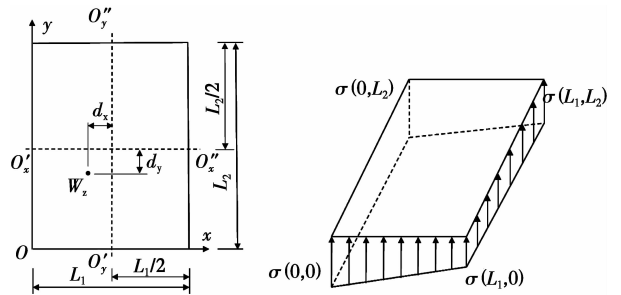
$$\sigma(x, y) = \frac{N_3}{L_1 L_2} \times \left[1 - \left(\frac{x}{L_1} - \frac{1}{2} \right) \frac{2e_x}{L_1/6} - \left(\frac{y}{L_2} - \frac{1}{2} \right) \frac{2e_y}{L_2/6} \right] \quad (9)$$

式中

$$e_x = d_x \quad (10)$$

$$e_y = d_y + d_z \times \tan \beta \quad (11)$$

如图 2 所示, d_z 为滑块质心距滑面的距离。如图 3 所示, d_x 和 d_y 为底面 ACDF 上法向反力作用点与面 ACDF 形心的距离。



(a) 竖直偏心荷载作用投影 (b) 双向小偏心荷载基底压力分布

图 3 矩形底面受双向小偏心荷载示意图

Fig. 3 Pressure distribution on rectangular area with small eccentric

边坡稳定系数 F 可以简化为

$$F_1 = \frac{c_1 \times A_1 + c_3 \times A_3 + N_1 \times \tan \varphi_1}{W \times \sin \beta} + \frac{N_3}{W \times \sin \beta} Z_1 \quad (12)$$

式中

$$Z_1 \equiv \frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \left[1 - \left(\frac{x}{L_1} - \frac{1}{2} \right) \frac{2e_x}{L_1/6} - \left(\frac{y}{L_2} - \frac{1}{2} \right) \frac{2e_y}{L_2/6} \right] \tan \varphi(x, y) dx dy \equiv \frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} t(x, y) \tan \varphi(x, y) dx dy \quad (13)$$

随机场变量摩擦系数 $\tan \varphi(x, y)$ 的均值为 $\mu_{\tan \varphi}$ 、方差为 $\sigma_{\tan \varphi}^2$ 、协方差为 $C(x, y)$ 。需要说明的是,高斯随机场 $\tan \varphi(x, y)$ 的值域可以取全部实数,但是失效概率的值只能是非零值。式的 Z_1 也是高斯随机变量,均值为

$$E[Z_1] =$$

$$\frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} t(x, y) E[\tan \varphi(x, y)] dx dy = \mu_{\tan \varphi} \quad (14)$$

方差为

$$s_{\tan \varphi}^2 = \text{Var}[Z_1] = E[Z_1^2] - \mu_{\tan \varphi}^2 \quad (15)$$

为计算上式,需要 Markov 过程公式

$$C(x, y) = \sigma_{\tan\varphi}^2 \exp\left[-\frac{2}{\theta_{\tan\varphi}}(|x| + |y|)\right] = \sigma_{\tan\varphi}^2 \exp\left[-\frac{2|x|}{\theta_1}\right] \exp\left[-\frac{2|y|}{\theta_2}\right] \quad (16)$$

式中: $\theta_{\tan\varphi}$ 为随机场 $\tan\varphi(x, y)$ 的相关长度(参数 $\theta_{\tan\varphi}$ 可以解释为随机场中两个点之间的不相关度)。由式(16)可知

$$E[\tan\varphi(x, y)\tan\varphi(x', y')] = \mu_{\tan\varphi}^2 + C(x - x', y - y') \quad (17)$$

则

$$\begin{aligned} E[Z_1^2] &= \frac{1}{L_1^2 L_2^2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} dx' dy' \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} dx dy \left\{ \left[1 - \left(\frac{x'}{L_1} - \frac{1}{2} \right) \frac{2e_x}{L_1/6} - \left(\frac{y'}{L_2} - \frac{1}{2} \right) \frac{2e_y}{L_2/6} \right] \times \right. \\ &\left. \left[1 - \left(\frac{x}{L_1} - \frac{1}{2} \right) \frac{2e_x}{L_1/6} - \left(\frac{y}{L_2} - \frac{1}{2} \right) \frac{2e_y}{L_2/6} \right] \times E[\tan(x, y)\tan(x', y')] \right\} = \\ &\frac{1}{L_1^2 L_2^2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} dx' dy' \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} t(x, y)t(x', y') \times \\ &E[\tan(x, y)\tan(x', y')] dx dy = \\ &\mu_{\tan\varphi}^2 + \frac{1}{L_1^2 L_2^2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} dx' dy' \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} t(x, y)t(x', y') \times \\ &C(x - x', y - y') dx dy \quad (18) \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} \sigma_{\tan\varphi}^2 &= \text{Var}[Z_1] = E[Z_1^2] - \bar{Z}_1^2 = \\ &\frac{1}{L_1^2 L_2^2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} dx' dy' \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} t(x, y)t(x', y') \times \\ &C(x - x', y - y') dx dy = \\ &\sigma_{\tan\varphi}^2 \left[\gamma_1 + \left(\frac{2e_x}{L_1/6} \right)^2 \gamma_2 + \left(\frac{2e_y}{L_2/6} \right)^2 \gamma_3 \right] \quad (19) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_1 \left(\frac{L_1}{\theta_1}, \frac{L_2}{\theta_2} \right) &= \frac{1}{4 \left(\frac{L_1}{\theta_1} \right)^2 \left(\frac{L_2}{\theta_2} \right)^2} \left[\frac{2L_1}{\theta_1} + \exp\left\{-\frac{2L_1}{\theta_1}\right\} - \right. \\ &\left. 1 \right] \times \left[\frac{2L_2}{\theta_2} + \exp\left\{-\frac{2L_2}{\theta_2}\right\} - 1 \right] \quad (20) \end{aligned}$$

$$\gamma_2 \left(\frac{L_1}{\theta_1}, \frac{L_2}{\theta_2} \right) = \frac{1}{48 \left(\frac{L_1}{\theta_1} \right)^4 \left(\frac{L_2}{\theta_2} \right)^2} \left\{ 3 + 2 \left(\frac{L_1}{\theta_1} \right)^3 - \right.$$

$$\left. 3 \left(\frac{L_1}{\theta_1} \right)^2 - 3 \left(\frac{L_1}{\theta_1} \right)^2 \exp\left[-\frac{2L_1}{\theta_1}\right] - \right.$$

$$\left. \frac{6L_1}{\theta_1} \exp\left[-\frac{2L_1}{\theta_1}\right] - 3 \exp\left[-\frac{2L_1}{\theta_1}\right] \right\} \times$$

$$\left[\frac{2L_2}{\theta_2} + \exp\left\{-\frac{2L_2}{\theta_2}\right\} - 1 \right] \quad (21)$$

$$\gamma_3 \left(\frac{L_1}{\theta_1}, \frac{L_2}{\theta_2} \right) = \frac{1}{48 \left(\frac{L_2}{\theta_2} \right)^4 \left(\frac{L_1}{\theta_1} \right)^2} \left\{ 3 + 2 \left(\frac{L_2}{\theta_2} \right)^3 - \right.$$

$$\left. 3 \left(\frac{L_2}{\theta_2} \right)^2 - 3 \left(\frac{L_2}{\theta_2} \right)^2 \exp\left[-\frac{2L_2}{\theta_2}\right] - \right.$$

$$\left. \frac{6L_2}{\theta_2} \exp\left[-\frac{2L_2}{\theta_2}\right] - 3 \exp\left[-\frac{2L_2}{\theta_2}\right] \right\} \times$$

$$\left[\frac{2L_1}{\theta_1} + \exp\left\{-\frac{2L_1}{\theta_1}\right\} - 1 \right] \quad (22)$$

函数 $\gamma_1(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 在二维 Markov 过程中很常用,其中 $\sigma_{\tan\varphi}^2 \gamma_1(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 为 Markov 过程的方差。也就是说,该过程均值的方差为点方差 $\sigma_{\tan\varphi}^2$, 区间长度 L_1 内相关长度为 θ_1 , 区间长度 L_1 内的相关长度为 θ_2 。函数 $\gamma_2(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 和函数 $\gamma_3(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 也与沿可能滑动面的正应力分布 n 有关。因此, Z_1 的概率分布可以写为

$$Z_1 \sim N(\mu_{\tan\varphi}, s_{\tan\varphi}^2) \quad (23)$$

由式(20)、(21)和(22)可知,当相关长度 θ 相当大时,有

$$(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2) \rightarrow (0, 0), \gamma_1 \rightarrow 1, \gamma_2 \rightarrow 0, \gamma_3 \rightarrow 0 \quad (24)$$

由式(19)和(24)可得 $s_{\tan\varphi}^2$ 的极限为 $\sigma_{\tan\varphi}^2$, 进一步证实了上述公式的正确性。式(19)也可表示为

$$s_{\tan\varphi}^2 = \sigma_{\tan\varphi}^2 + O\left(\frac{L_1}{\theta_1}, \frac{L_2}{\theta_2}\right) \quad (25)$$

式中: $O(x, y)$ 为一个无穷小量。

边坡稳定系数 F_1 与 Z_1 成线性相关,因此, F_1 也是一个高斯随机变量,失效概率可以表示为

$$\begin{aligned} P(F_1 < 1) &= P\left(Z_1 < \frac{W \sin \beta - (c_1 A_1 + c_3 A_3 + N_1 \tan \varphi_1)}{N_3}\right) = \\ &\Phi\left\{\left[\frac{W \sin \beta - (c_1 A_1 + c_3 A_3 + N_1 \tan \varphi_1)}{N_3} - \mu_{\tan \varphi}\right] / s_{\tan \varphi}\right\} \quad (26) \end{aligned}$$

为更清晰的看出失效概率,用稳定系数的值来表示

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &\equiv E[F_1] = \\ &\frac{c_1 \times A_1 + c_3 \times A_3 + N_1 \times \tan \varphi_1}{W \times \sin \beta} + \frac{N_3 \mu_{\tan \varphi}}{W \times \sin \beta} \quad (27) \end{aligned}$$

将式(27)代入式(26)可得

$$P(F_1 < 1) = \Phi\left[\frac{W \sin \beta}{N_3} (1 - \bar{F}_1) / s_{\tan \varphi}\right] \quad (28)$$

对于给定的参数,式(27)和(28)十分清楚地表

示失效概率。而对于给定最大失效概率 $p_{f \max}$, 其安全系数均值取值范围为

$$\bar{F}_1 \geq 1 - z \times s_{\tan\varphi} \frac{N_3}{W \times \sin\beta} \quad (29)$$

式中: z 由正态分布 $\Phi(z) = p_{f \max}$ 确定, 变量 z 为 $p_{f \max}$ 的函数关系^[14]。

2) ACDF 面上的摩擦系数和粘聚力 c_3 均为随机场变量

岩石边坡的稳定系数 F_2 可表达为

$$F_2 = \frac{c_1 \times A_1 + N_1 \times \tan\varphi_1}{W \times \sin\beta} + \frac{1}{W \times \sin\beta} Z_2 \quad (30)$$

ACDF 面上的随机场变量粘聚力 $c_3(x, y)$ 和摩擦系数 $\tan\varphi_3(x, y)$ 的均值分别为 μ_c 和 $\mu_{\tan\varphi}$ 。为简化计算, 将面 ABC 的粘聚力和摩擦系数视为常量, 其值为 c_1 和 $\tan\varphi_1$ 。稳定系数 F_2 中 Z_2 是高斯随机变量, 其均值为

$$\begin{aligned} \bar{Z}_2 &= \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \{E[c_3(x, y)] + \\ &\sigma(x, y)E[\tan\varphi_3(x, y)]\} dx dy = \\ &\mu_c \times A_3 + \mu_{\tan\varphi} \times N_3 \end{aligned} \quad (31)$$

考虑二维随机变量粘聚力和摩擦系数之间的联系, 随机场的相关函数可表示为

$$E[\tan\varphi_3(x, y)\tan\varphi_3(x', y')] = \mu_{\tan\varphi}^2 + C_{\tan\varphi}(x - x', y - y') \quad (32)$$

$$E[c_3(x, y)c_3(x', y')] = \mu_c^2 + C_c(x - x', y - y') \quad (33)$$

$$E[\tan\varphi_3(x, y)c_3(x', y')] = \mu_{\tan\varphi}\mu_c + C_{c-\tan\varphi}(x - x', y - y') \quad (34)$$

式(32)和(33)表示各自随机场变量的自相关性, 而式(34)表示相关随机场之间的互相关性。由 Markov 过程可知

$$\begin{aligned} C_{\tan\varphi}(x, y) &= \sigma_{\tan\varphi}^2 \exp\left[-\frac{2(|x| + |y|)}{\theta_{\tan\varphi}}\right] = \\ &\sigma_{\tan\varphi}^2 \exp\left[-\frac{2|x|}{\theta_{1,\tan\varphi}}\right] \exp\left[-\frac{2|y|}{\theta_{2,\tan\varphi}}\right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} C_c(x, y) &= \sigma_c^2 \exp\left[-\frac{2(|x| + |y|)}{\theta_c}\right] = \\ &\sigma_c^2 \exp\left[-\frac{2|x|}{\theta_{1,c}}\right] \exp\left[-\frac{2|y|}{\theta_{2,c}}\right] \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} C_{c-\tan\varphi}(x, y) &= \rho_{c-\tan\varphi}\sigma_c\sigma_{\tan\varphi} \exp\left[-\frac{2(|x| + |y|)}{\theta_{c-\tan\varphi}}\right] = \\ &\rho_{c-\tan\varphi}\sigma_c\sigma_{\tan\varphi} \exp\left[-\frac{2|x|}{\theta_{1,c-\tan\varphi}}\right] \times \exp\left[-\frac{2|y|}{\theta_{2,c-\tan\varphi}}\right] \end{aligned} \quad (37)$$

式中: $\sigma_{\tan\varphi}$ 和 σ_c 分别为摩擦系数和粘聚力的方差; $\theta_{\tan\varphi}$ 和 θ_c 分别为其相关长度。参数 $\rho_{c-\tan\varphi}$ 为相关系数, $\theta_{c-\tan\varphi}$ 为互相关长度。一般而言, 互相关长度是无限大的, 即 $\theta_{c-\tan\varphi} = \infty$, 则联合协方差函数 $C_{c-\tan\varphi}(x, y)$ 衰减为常数 $\rho_{c-\tan\varphi}\sigma_c\sigma_{\tan\varphi}$ 。此时, 由 Z_2 可得 $E[Z_2^2]$ 为

$$\begin{aligned} E[Z_2^2] &= \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} dx' dy' \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \{E[c_3(x, y)] + \\ &\sigma(x, y)E[\tan\varphi_3(x, y)]\} \times \{E[c_3(x', y')] + \\ &\sigma(x', y')E[\tan\varphi_3(x', y')]\} dx dy = \\ &\int_0^{L_2} \int_0^{L_1} dx' dy' \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \{E[c_3(x, y)]E[c_3(x', y')] + \\ &\sigma(x, y)\sigma(x', y')E[\tan\varphi_3(x, y)]E[\tan\varphi_3(x', y')] + \\ &2\sigma(x, y)E[\tan\varphi_3(x, y)]E[c_3(x', y')]\} dx dy \end{aligned} \quad (38)$$

则有

$$s_{Z_2}^2 \equiv \text{Var}[Z] = E[Z_2^2] - \bar{Z}_2^2 = N_3^2 s_{\tan\varphi}^2 + L_1^2 L_2^2 s_c^2 + 2N_3 L_1 L_2 s_{c-\tan\varphi}^2 \quad (39)$$

其中

$$s_c^2 = \sigma_c^2 \gamma_1(L_1/\theta_{1c}, L_2/\theta_{2c}) \quad (40)$$

$$s_{c-\tan\varphi}^2 = \rho_{c-\tan\varphi}\sigma_c\sigma_{\tan\varphi}\gamma_1(L_1/\theta_{1,c-\tan\varphi}, L_2/\theta_{2,c-\tan\varphi}) \quad (41)$$

$s_{\tan\varphi}^2$ 由式(19)确定。函数 $\gamma_1(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 由式(20)定义。则 Z_2 的概率分布可以写为

$$Z_2 \sim N(\bar{Z}_2, s_{Z_2}^2) \quad (42)$$

稳定系数 F_2 的期望为

$$\bar{F}_2 = \frac{c_1 \times A_1 + N_1 \times \tan\varphi_1 + \bar{Z}_2}{W \times \sin\beta} \quad (43)$$

由式可知, 边坡稳定系数 F_2 与 Z_2 成线性相关, 因此 F_2 的概率分布可以写为

$$F_2 \sim N\left(\bar{F}_2, \frac{s_{Z_2}^2}{W^2 \times \sin^2\beta}\right) \quad (44)$$

由此可知, 失效概率表示为

$$P(F_2 < 1) = \Phi[W \sin\beta(1 - \bar{F}_2)/s_{Z_2}] \quad (45)$$

当随机场变量 $c_3(x, y)$ 为常量时, 即当 $s_c = 0$ 和 $s_{c-\tan\varphi} = 0$ 时, 式(39)衰减为

$$s_{Z_2}^2 = N_3^2 s_{\tan\varphi}^2 \quad (46)$$

1.2.2 边坡沿底面 ACDF 和面 DEF 滑动 当 $\gamma_3 < 0$ 时, 滑动面 ABC 上的抗滑力可以忽略不计, 边坡沿结构面 DEF 和 ACDF 滑动, 滑动方向为交棱线 DF。此时边坡稳定系数 F 的表达式可以表示为

$$F = \frac{c_2 \times A_2 + c_3 \times A_3 + N_2 \times \tan\varphi_2}{W \times \sin\beta} +$$

$$\frac{\int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \sigma(x, y) \tan \varphi_3(x, y) dx dy}{W \times \sin \beta} \quad (47)$$

式中: c_2 分别为滑动面 DEF 上的粘聚力。

1) ACDF 面上摩擦系数为随机场变量 根据前述分析可知, 稳定系数 F_3 可以简写为

$$F_3 = \frac{c_2 A_2 + c_3 A_3 + N_2 \tan \varphi_2}{W \sin \beta} + \frac{N_3}{W \sin \beta} Z_3 \quad (48)$$

Z_3 的期望为

$$E[Z_3] =$$

$$\frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} t(x, y) E[\tan \varphi(x, y)] dx dy = \mu_{\tan \varphi} \quad (49)$$

方差为

$$\begin{aligned} s_{\tan \varphi}^2 &= E[Z_3^2] - \mu_{\tan \varphi}^2 = \\ &\frac{1}{L_1^2 L_2^2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} dx' dy' \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} t(x, y) t(x', y') \times \\ &C(x - x', y - y') dx dy = \\ &\sigma_{\tan \varphi}^2 \left[\gamma_1 + \left(\frac{2e_x}{L_1/6} \right)^2 \gamma_2 + \left(\frac{2e_y}{L_2/6} \right)^2 \gamma_3 \right] \quad (50) \end{aligned}$$

稳定系数 F_3 的期望为

$$\bar{F}_3 = \frac{c_2 \times A_2 + c_3 \times A_3 + N_2 \times \tan \varphi_2}{W \times \sin \beta} + \frac{N_3 \times \bar{Z}_3}{W \times \sin \beta} \quad (51)$$

则失效概率可以表示为

$$P(F_3 < 1) = \Phi \left[\frac{W \sin \beta (1 - \bar{F}_3) / s_{\tan \varphi}}{N_3} \right] \quad (52)$$

2) ACDF 面上的摩擦系数和粘聚力 c_3 均为随机场变量 根据 1) 节可知, 稳定系数 F_4 可简写为

$$F_4 = \frac{c_2 \times A_2 + N_2 \times \tan \varphi_2}{W \times \sin \beta} + \frac{Z_4}{W \times \sin \beta} \quad (53)$$

Z_4 的期望为

$$\bar{Z}_4 = \mu_c \times A_3 + N_3 \times \mu_{\tan \varphi} \quad (54)$$

方差为

$$s_{Z_4}^2 = N_3^2 s_{\tan \varphi}^2 + L_1^2 L_2^2 s_c^2 + 2N_3 L_1 L_2 s_{c-\tan \varphi}^2 \quad (55)$$

稳定系数的期望 \bar{F}_4 为

$$\bar{F}_4 = \frac{c_2 \times A_2 + N_2 \times \tan \varphi_2}{W \times \sin \beta} + \frac{\bar{Z}_4}{W \times \sin \beta} \quad (56)$$

边坡失效概率为

$$P(F_4 < 1) = \Phi [W \sin \beta (1 - \bar{F}_4) / s_{Z_4}] \quad (57)$$

1.2.3 边坡沿三面滑动 当 $\gamma_3 = 0$ 时, 边坡沿结构面 ABC、DEF 和 ACDF 滑动, 滑动方向为交棱线 DF。此时边坡稳定系数 F 的表达式可以表示为

$$F = \frac{c_1 \times A_1 + c_2 \times A_2 + c_3 \times A_3}{W \times \sin \beta} +$$

$$\frac{\int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \sigma(x, y) \tan \varphi_3(x, y) dx dy}{W \times \sin \beta} \quad (58)$$

此时由式可知 $N_3 = W \cos \beta, N_1 = N_2 = 0$ 。

1) ACDF 面上摩擦系数为随机场变量 稳定系数 F_5 可以简写为

$$F_5 = \frac{c_1 \times A_1 + c_2 \times A_2 + c_3 \times A_3 + N_3 \times Z_5}{W \times \sin \beta} \quad (59)$$

Z_5 的期望为

$$E[Z_5] = \mu_{\tan \varphi} \quad (60)$$

方差为

$$\begin{aligned} s_{\tan \varphi}^2 &= E[Z_5^2] - \mu_{\tan \varphi}^2 = \\ &\frac{1}{L_1^2 L_2^2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} dx' dy' \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} t(x, y) t(x', y') \times \\ &C(x - x', y - y') dx dy = \\ &\sigma_{\tan \varphi}^2 \left[\gamma_1 + \left(\frac{2e_x}{L_1/6} \right)^2 \gamma_2 + \left(\frac{2e_y}{L_2/6} \right)^2 \gamma_3 \right] \quad (61) \end{aligned}$$

稳定系数 F_5 的期望为

$$\bar{F}_5 = \frac{c_1 \times A_1 + c_2 \times A_2 + c_3 \times A_3 + N_3 \times \mu_{\tan \varphi}}{W \times \sin \beta} \quad (62)$$

则失效概率可以表示为

$$P(F_5 < 1) = \Phi \left[\frac{W \sin \beta (1 - \bar{F}_5) / s_{\tan \varphi}}{N_3} \right] \quad (63)$$

2) ACDF 面上的摩擦系数和粘聚力 c_3 均为随机场变量 此时稳定系数 F_6 可以简写为

$$F_6 = \frac{c_1 \times A_1 + c_2 \times A_2}{W \times \sin \beta} + \frac{Z_6}{W \times \sin \beta} \quad (64)$$

Z_6 的期望为

$$E[Z_6] = \mu_c \times A_3 + N_3 \times \mu_{\tan \varphi} \quad (65)$$

方差为

$$s_{Z_6}^2 = N_3^2 s_{\tan \varphi}^2 + L_1^2 L_2^2 s_c^2 + 2N_3 L_1 L_2 s_{c-\tan \varphi}^2 \quad (66)$$

稳定系数 F_6 的期望为

$$\bar{F}_6 = \frac{c_1 \times A_1 + c_2 \times A_2}{W \times \sin \beta} + \frac{\bar{Z}_6}{W \times \sin \beta} \quad (67)$$

则失效概率为

$$P(F_6 < 1) = \Phi [W \sin \beta (1 - \bar{F}_6) / s_{Z_6}] \quad (68)$$

2 应用实例

2.1 当边坡体沿三面滑动时 ($\gamma_3 = 0^\circ$), 摩擦系数对边坡稳定性的影响

随机场变量为 $\tan \varphi(x, y)$, 其均值和方差分别为 μ 和 σ 。此时, 粘聚力为常量。如图 4 和图 5 所示, z 轴坐标为 p_1 , x 和 y 轴坐标分别为 L_1/θ_1 和 L_2/θ_2 。计算参数为: $\beta = 30^\circ, \gamma_1 = 0^\circ, \gamma_2 = 0^\circ, \gamma_3 = 0^\circ, c_3 =$

40 kPa, $c_1 = 40$ kPa, $c_2 = 40$ kPa, $L_1 = 10$ m, $L_2 = 20$ m, $L_3 = 1.5$ m, $e_x = 0.5$ m, $e_y = 1$ m, $W = 1.8 \times 10^5$ kN。

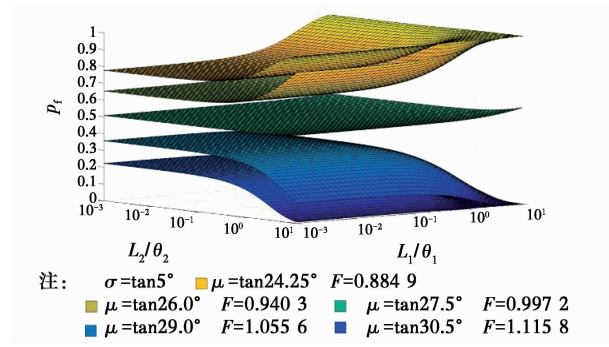


图 4 当 $\sigma = \tan 5^\circ$, p_f 与 $L_1/\theta_1, L_2/\theta_2$ 的关系图

Fig. 4 p_f vs $L_1/\theta_1, L_2/\theta_2$ for various μ values when $\sigma = \tan 5^\circ$

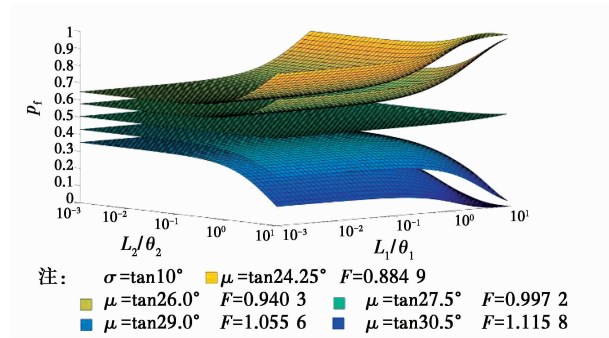


图 5 当 $\sigma = \tan 10^\circ$, p_f 与 $L_1/\theta_1, L_2/\theta_2$ 的关系图

Fig. 5 p_f vs $L_1/\theta_1, L_2/\theta_2$ for various μ values when $\sigma = \tan 10^\circ$

如图 4 和图 5 所示,当 $\tan \varphi(x, y)$ 的相关长度 θ_1 和 θ_2 分别远远大于滑面的长 L_1 和宽 L_2 时,即 $(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 的值趋于 0。如式 (16) 所示,方差 $s_{\tan \varphi}^2$ 的值趋于 $\sigma_{\tan \varphi}^2$ 。失效概率对于不同的摩擦系数均值趋于相应的定值。当相关长度 θ_1 和 θ_2 变小时,失效概率在稳定系数大于 1 时趋于 0,在稳定系数小于 1 时趋于 1。从图 4 和图 5 右半部分可知:当方差越大时,失效概率的值偏差越大;从图 3 和图 4 左半部分可知:当方差越大时,失效概率的值越向 0.5 靠近。图 4 和图 5 与 Griffiths 等^[15] 的计算结果吻合。

2.2 当边坡体沿三面滑动时 ($\gamma_3 = 0^\circ$),摩擦系数和粘聚力对边坡稳定性的影响

如式 (39)、(19)、(40) 和 (41) 所示,失效概率 p_f 与 6 个未知数 $(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 、 $(L_1/\theta_{1c}, L_2/\theta_{2c})$ 、 $(L_1/\theta_{1, c-\tan \varphi}, L_2/\theta_{2, c-\tan \varphi})$ 相关。在一张三维立体图中表示失效概率与 6 个未知量的关系比较困难。假

设: $(L_1/\theta_1 = L_2/\theta_2)$ 、 $(L_1/\theta_{1c} = L_2/\theta_{2c})$, 并取 $L_1/\theta_1, L_2/\theta_{2c}$ 作为 2 个变量,此时 $\theta_{1, c-\tan \varphi}$ 和 $\theta_{2, c-\tan \varphi}$ 取极大值, $\gamma_1(L_1/\theta_{1, c-\tan \varphi}, L_2/\theta_{2, c-\tan \varphi})$ 取极值为 1。其他计算参数为: $\mu_{\tan \varphi} = \tan 26.25^\circ$ 和 $\mu_{\tan \varphi} = \tan 30.75^\circ$ 、 $\sigma_{\tan \varphi} = \tan 5^\circ$ 、 $\mu_c = 40$ kPa、 $\sigma_c = 20$ kPa、 $\rho_{c-\tan \varphi} = 0.2$ 。

如图 6 所示,当摩擦系数和粘聚力的相关长度远小于滑面的长 L_1 和宽 L_2 时,则 L_1/θ_1 和 L_2/θ_{2c} 的值相应很大。从图 6 右半部分可知:失效概率 p_f 的值在稳定系数 F 大于 1 时趋于 0,在稳定系数 F 小于 1 时趋于 1;当摩擦系数和粘聚力的相关长度远大于滑面的长 L_1 和宽 L_2 时,则 L_1/θ_1 和 L_2/θ_{2c} 的值相应很小。从图 6 左半部分可知:失效概率的值趋于定值。

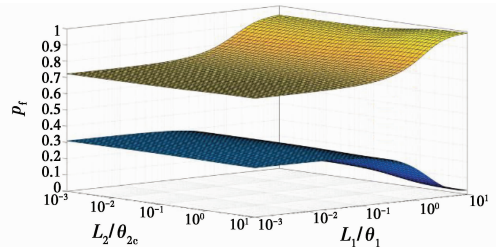


图 6 当 $\sigma_{\tan \varphi} = \tan 5^\circ$, p_f 与 $L_1/\theta_1, L_2/\theta_{2c}$ 的关系图

Fig. 6 p_f vs $L_1/\theta_1, L_2/\theta_{2c}$ for various μ values when $\sigma_{\tan \varphi} = \tan 5^\circ$

2.3 给定失效概率下的边坡稳定系数

对于给定的失效概率,稳定系数的值与相关长度有关。当 $\sigma_{\tan \varphi} = \tan 5^\circ$ 时, $p_{f \max}$ 分别取 10%、1%、0.1%,稳定系数与相关长度 $(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 的关系如图 7 所示。当 $(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 较小时,对不同失效概率,稳定系数对应于相应的定值,且该值随失效概率的减小而增加;当 $(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 较大时,对不同失效概率,稳定系数趋于 1。

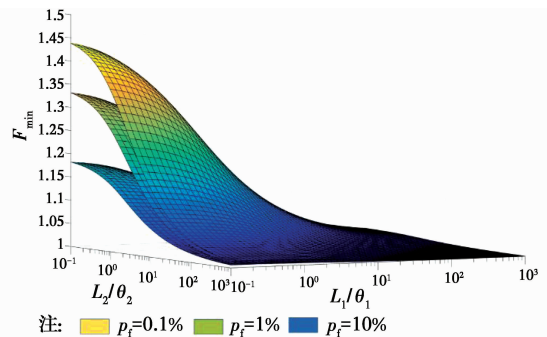


图 7 当 $p_{f \max} = 10\%, 1\%, 0.1\%$, F_{\min} 与 $(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 的关系图

Fig. 7 F_{\min} vs $(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ when $p_{f \max} = 10\%, 1\%, 0.1\%$

2.4 不同方法下边坡失效概率对比

表 1 中列出了采用蒙特卡洛方法^[16]计算的失效概率。表 1 中均值为滑动面摩擦角的平均值。从表 1 可知,该方法的计算结果与蒙特卡洛方法的计算结果吻合,最大误差为 4.83%,证明了该方法的有效性。需要指出的是:本文的计算条件为相关长度 $(L_1/\theta_1, L_2/\theta_2)$ 趋近于 $(0,0)$,由式可知 $s_{\tan\varphi}^2$ 等于 $\sigma_{\tan\varphi}^2$ 。

表 1 失效概率的对比

Table 1 The probability of failure from different methods

均值	方差	稳定系数	本文方法失效概率/%	蒙特卡洛方法失效概率/%	相对误差/%
24.5°	tan5°	0.884 9	78.26	76.63	2.082
26.0°	tan5°	0.940 3	66.58	64.37	3.319
27.5°	tan5°	0.997 2	50.27	49.67	1.194
29.0°	tan5°	1.055 6	36.85	35.07	4.830
30.5°	tan5°	1.115 8	22.38	21.32	4.736
24.5°	tan10°	0.884 9	64.61	64.25	0.5571
26.0°	tan10°	0.940 3	58.13	57.35	1.341
27.5°	tan10°	0.997 2	50.87	50.11	1.494
29.0°	tan10°	1.055 6	43.24	42.33	2.104
30.5°	tan10°	1.115 8	34.62	34.57	0.144 4

3 结论

在岩质或土质边坡中,滑面材料的空间变异性对边坡的稳定具有重要的影响。采用随机场理论对岩质边坡进行了三维稳定性分析,建立了边坡失效概率与相关长度之间的关系。算例表明,相关长度对边坡失效概率具有重要的影响,不同的相关长度,导致不同的失效概率。同时,该方法可以退化为二维问题,其结果和 Gravanis 的方法一致。随机场理论的结果,与蒙特卡洛方法计算的结果吻合,验证了方法的有效性。

参考文献:

[1] 张永兴. 边坡工程学[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2008.
ZHANG Y X. Slope engineering [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2008. (in Chinese)

[2] GRAVANIS E, PANTELIDIS L, GRIFFITHS D V. An analytical solution in probabilistic rock slope stability assessment based on random fields [J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2014, 71: 19-24.

[3] DUZGUN H S B, YUCEMEN M S, KARPUZ C. A probabilistic model for the assessment of uncertainties in the shear strength of rock discontinuities [J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2002, 39(6): 743-54.

[4] 祁小辉,李典庆,周创兵,等. 考虑土体空间变异性的边坡最危险滑动面随机分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, 44(4):745-753.
QI X H, LI D Q, ZHOU C B, et al. Stochastic analysis method of critical slip surfaces in soil slopes considering spatial variability [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 44(4): 745-753. (in Chinese)

[5] 蒋水华,魏博文,姚池,等. 考虑概率分布影响的低概率率水平边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(6):1071-1080.
JIANG S H, WEI B W, YAO C, et al. Reliability analysis of soil slopes at low-probability levels considering effect of probability distributions [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(6): 1071-1080. (in Chinese)

[6] 舒苏荀,龚文惠,王佳,等. 各向异性随机场下的边坡模糊随机可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(7):1204-1210.
SHU S X, GONG W H, WANG J, et al. Fuzzy-random reliability analysis of slope stability in anisotropic random fields [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(7): 1204-1210. (in Chinese)

[7] EINSTEIN H H, VENEZIANO D, BAECHE G B, et al. The effect of discontinuity persistence on rock slope stability [J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Science & Geomechanics Abstracts, 1983, 20(5): 227-236.

[8] 唐小松,李典庆,周创兵,等. 基于 Copula 函数的抗剪强度参数间相关性模拟及边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(12): 2284-2291.
TANG X S, LI D Q, ZHOU C B, et al. Modeling dependence between shear strength parameters using Copulas and its effect on slope reliability [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(12): 2284-2291. (in Chinese)

- [9] PANTELIDIS L, GRAVANIS E, GRIFFITHS D V. Influence of spatial variability on rock slope reliability using 1-D random fields [M]// *Engineering Geology for Society and Territory - Volume 2*. Springer International Publishing, 2015: 1235-1238.
- [10] GRIFFITHS D V, HUANG J S, FENTON G A. Influence of spatial variability on slope reliability using 2-D random fields [J]. *Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering*, 2009, 135 (10): 1367-1378.
- [11] GRAVANIS E, PANTELIDIS L, GRIFFITHS D V. An analytical solution in probabilistic rock slope stability assessment based on random fields [J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2014, 71: 19-24.
- [12] FENTON G A, GRIFFITHS D V. Risk assessment in geotechnical engineering [M]. Hoboken, NJ: Wiley, 2008.
- [13] FENTON G A, VANMARCKE E H. Simulation of random fields via local average subdivision [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1990, 116(8): 1733-1749.
- [14] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- SHENG Z, XIE S Q, PAN C Y. Probability theory and mathematical statistics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2008. (in Chinese)
- [15] GRIFFITHS D V, FENTON G A. Probabilistic slope stability analysis by finite elements [J]. *Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering*, 2004, 130: 507-518.
- [16] 金畅. 蒙特卡洛方法中随机数发生器和随机抽样方法的研究[D]. 辽宁 大连: 大连理工大学, 2005.
- JIN C. Study on random number generator and random sampling in monte carlo method [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2005. (in Chinese)

(编辑 胡英奎)