

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2017.05.004



# 不同桩头约束下微倾单桩纵横向受荷 响应计算的三参数法

张磊<sup>1</sup>, 龚晓南<sup>2</sup>

(1. 西安建筑科技大学 土木工程学院, 西安 710055; 2. 浙江大学 滨海和城市岩土工程研究中心, 杭州 310058)

**摘要:**为研究桩头转动约束及桩身初始微倾斜对纵横向组合荷载作用下桩身侧向响应的影响, 基于三参数形式的地基水平抗力系数, 通过矩阵运算提出了桩身变形和内力的半解析解, 并与模型试验结果及已有解计算结果进行对比以验证其可靠性。计算结果表明: 桩头转动刚度增加时, 桩顶位移和地表以下桩身最大弯矩减小, 桩顶弯矩和地表以下桩身最大弯矩距离桩顶的距离增大。桩身初始倾角增加时, 桩身最大位移和最大弯矩均线性增大, 且随纵向荷载的增加其变化速率逐渐增大; 纵向荷载增加时, 桩身最大位移和最大弯矩均增大, 且随纵向荷载和桩身初始倾角的增加其变化速率逐渐增大, 而地表以下桩身最大弯矩距离地表的距离呈线性减小。

**关键词:**桩基础; 转动刚度; 倾斜; 横向荷载; 半解析解

**中图分类号:** TU473.1      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1674-4764(2017)05-0023-08

## Three-parameter method for slightly inclined single pile with partial pile head fixity under combined vertical and lateral loads

Zhang Lei<sup>1</sup>, Gong Xiaonan<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, P. R. China;

2. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, P. R. China)

**Abstract:** In order to study the influences of the rotational restraint at pile head and the slight initial inclination of pile shaft on lateral pile responses under simultaneous vertical and lateral loads, semi-analytical solutions were put forward by matrix calculation, based on the coefficient of subgrade reaction expressed in the three-parameter form. The results were validated by the comparison with model test results and the existing solutions. The results indicated that when the coefficient of rotational restraint at pile head increases, the displacement at pile head and the maximum bending moment under ground decrease, while the bending moment at pile head and the distance between the maximum bending moment under ground and pile head increased. Both the maximum displacement and bending moment increased linearly with the increase of the initial inclination angle of pile shaft, and their changing rates increased

**收稿日期:** 2017-01-05

**基金项目:** 国家自然科学基金 (51508455); 陕西省教育厅专项科研计划 (16JK1444); 西安建筑科技大学青年科技基金 (QN1614)

**作者简介:** 张磊 (1981-), 男, 博士, 主要从事桩基础研究, (E-mail) zh888lei@tom.com.

**Received:** 2017-01-05

**Foundation item:** National Natural Science Foundation of China (No. 51508455); Scientific Research Program of Education Department of Shaanxi Provincial Government (No. 16JK1444); Science and Technology Foundation for Youths of Xi'an University of Architecture and Technology (No. QN1614).

**Author brief:** Zhang Lei (1981-), PhD, main research interest: pile foundation, (E-mail) zh888lei@tom.com.

when the vertical load increased. When the vertical load increased, the maximum displacement and bending moment increased, and their changing rates increased with increases of the vertical load and the initial inclination angle of pile shaft. The distance between the maximum bending moment under ground and ground decreased linearly when the vertical load increases.

**Keywords:** pile foundations; coefficient of rotational restraint; inclination; lateral loads; semi-analytical solutions

桩头转动约束对桩基水平承载性状有显著影响<sup>[1]</sup>；相同水平荷载下，桩顶固定时桩头水平位移约为桩顶自由时的 25%；桩顶自由时桩身最大弯矩位于地表以下某点处，桩顶固定时位于桩顶。现有的桩基水平承载性状研究一般把桩顶的边界条件取为自由和固定两种理想化的情形<sup>[2-4]</sup>。对于存在上部承台的桩基，当桩头嵌入承台的深度不足或承台配筋量较少时，桩顶附近承台混凝土变形或开裂，导致桩头转动。即使桩与承台锚固牢靠，荷载作用下承台的旋转仍会带动桩头转动。因此，承台对桩头的约束弱于桩顶固定并强于桩顶自由。Mokwa 等<sup>[1]</sup>和 Prakash 等<sup>[5]</sup>分别采用桩头转动刚度（桩头弯矩与桩头转角的比值）和桩头约束度（桩头弯矩与桩顶固定时桩头弯矩的比值）定量表示桩头转动约束。孔令刚等<sup>[6]</sup>讨论了几种桩头约束定量表征参数之间的关系，分析了桩身抗弯刚度、水平地基比例系数、自由段及地表以下桩身长度等因素对各表征参数的影响。姜丽红等<sup>[7]</sup>基于经验公式提出了桩顶位移、桩顶弯矩、地表以下桩身最大弯矩及其所在位置的简化计算方法。不仅横向荷载可以使桩身产生较大的侧向变形和内力，由上部结构及桩身自重等引起的纵向荷载也将因桩身的挠曲变形而产生附加的桩身弯矩和变形<sup>[8]</sup>。张玲等<sup>[9]</sup>、Zhang 等<sup>[10]</sup>、Hirai<sup>[11]</sup>等针对不同工况，分别提出了纵横向组合荷载作用下桩身侧向变形和内力的计算方法，并分析了纵向荷载对桩身响应的影响。然而，已有的考虑桩头转动约束的桩基水平承载性状研究没有考虑纵向荷载的影响。

在实际工程中，桩身初始微倾斜普遍存在并可由多种原因引起<sup>[12-13]</sup>：压入或打入土体的预制桩，垂直度控制不好导致桩身倾斜；灌注桩施工时，桩孔倾斜导致桩身倾斜。对于纵横向受荷的桩基，由纵向荷载引起的桩身附加弯矩和附加变形可因桩身初始微倾斜而进一步加大。基于室内模型试验，赵明华等<sup>[14]</sup>研究了纵横向组合荷载作用下微倾木桩的水平承载性状；李微哲等<sup>[15]</sup>提出了层状地基中地基水平抗力系数随深度线性增加时桩身侧向响应的幂级数解。

本文基于更具一般性的三参数形式的地基水平抗力系数，采用桩头转动刚度表征桩头转动约束的程度，推导出纵横向组合荷载作用下微倾单桩侧向变形和内力的半解析解。编制了计算程序，通过与模型试验结果及已有解计算结果的对比，验证了所得解的可靠性。分析了桩头转动约束、桩身初始微倾斜、纵向荷载等对桩身响应的影响。

## 1 控制方程与解

### 1.1 建立方程

如图 1 所示，桩的下半段位于地表以下，上半段为自由段。桩身倾斜，倾角为  $\theta$ ，以右倾为正，其值远小于 1。自由段桩长为  $H_0$ ，地表以下桩长为  $H_1$ 。地表以下桩身分为  $OC$  段和  $CD$  段两段，长度分别为  $l_1$  和  $l_2$ 。在各段上分别建立坐标系。桩顶作用水平力  $Q_0$  和纵向力  $N_p$ 。由于桩头转动刚度物理意义明确，且在工程实践中易于通过计算或实测获得<sup>[6]</sup>，在求解时采用桩头转动刚度  $K_m$  表征桩头转动约束的程度。当  $K_m = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{rad}$  时，桩顶自由，桩顶可自由的水平移动和转动；桩头约束的程度随  $K_m$  的增加而增强；当  $K_m$  的值趋近于  $\infty$  时，桩顶固定，桩顶的转角为零但仍可水平移动。桩底约束对桩身侧向变形和内力的影响随地表以下桩长的增加而减小；当地表以下桩长超过 10 倍桩径时，桩底约束对桩身侧向响应的影响可忽略不计。因此，为简化计算，桩底约束取为 3 种理想情况：桩底自由，即桩底的剪切力和弯矩为零，适用于桩底以下为软弱土体；桩底铰接，即桩底弯矩和位移为零，适用于桩底与岩石接触或嵌入岩石的长度较小；桩底固定，即桩底转角和位移为零，适用于桩底嵌入硬土或岩石的长度较大。地表以上桩身分布荷载取  $q(z_G) = q_0 + \Delta q z_G / H_0$ ，式中  $z_G$  为自由段纵坐标， $q_0$  和  $(q_0 + \Delta q)$  分别为桩顶及  $O$  点处分布荷载集度。地表以上桩身轴力： $N_G = N_p + f_0 z_G$ ， $OC$  段桩身轴力： $N_{E_1} = N_p + f_0 H_0 + f_1 z_{E_1}$ ， $CD$  段桩身轴力： $N_{E_2} = N_p + f_0 H_0 + f_1 l_1 + f_1 z_{E_2}$ ，式中： $z_{E_1}$  和  $z_{E_2}$  分别为  $OC$  段和  $CD$  段的纵坐标； $f_0$  为地表以上桩身轴力增长系数，取为桩身横截面积与桩身重度之积； $f_1$  为地表以下桩身

轴力增长系数,取值方法由文献[16]给出。 $u_G^t$ 、 $u_{E_1}^t$  和  $u_{E_2}^t$  分别表示荷载作用下地表以上、OC 段和 CD 段桩身轴线的横坐标,若用  $u_G$ 、 $u_{E_1}$  和  $u_{E_2}$  分别表示荷载作用下地表以上、OC 段和 CD 段桩身水平位移,则有

$$u_G^t = u_G + \theta(H_0 + H_1 - z_G) \quad (1a)$$

$$u_{E_1}^t = u_{E_1} + \theta(H_1 - z_{E_1}) \quad (1b)$$

$$u_{E_2}^t = u_{E_2} + \theta(l_2 - z_{E_2}) \quad (1c)$$

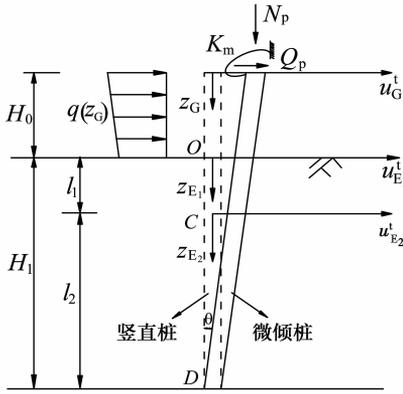


图 1 考虑桩头约束的微倾单桩纵横向受荷示意图

Fig. 1 Schematic diagram of a slightly inclined single pile with partial pile head fixity under combined vertical and lateral loads

OC 段和 CD 段地基水平抗力系数采用三参数形式表示,分别为:  $k_1 = m(z_0 + z_{E_1})^n$  和  $k_2 = m \cdot (z_0 + l_1 + z_{E_2})^n$ , 式中  $m$  和  $n$  分别为比例系数和指数,均可通过经验或实测确定。当  $z_0$  和  $n$  采用不同的取值方法时,本文方法可化为单参数法(如常数法、m 法和 C 值法)和双参数法,因此,采用的三参数形式的地基水平抗力系数更具一般性。假定土反力向左为正,则 OC 段土反力:  $p_1 = k_1 b u_{E_1}$ , CD 段土反力:  $p_2 = k_2 b u_{E_2}$ , 式中  $b$  为桩身宽度或直径。OC 段上桩身轴力满足:  $N_{E_1} > 2 \sqrt{k_1 b E I}$ , CD 段上满足:  $N_{E_2} < 2 \sqrt{k_2 b E I}$ , 式中  $E I$  为桩身抗弯刚度。

位移向右为正,转角以左倾为正,弯矩以桩身左侧受拉为正,剪切力以形成顺时针力矩为正。类似文献[15],地表以上桩身挠曲线微分方程为

$$E I \frac{d^3 u_G}{dz_G^3} + N_G \frac{du_G}{dz_G} = Q_p + N_G \theta + q_0 z_G + \frac{\Delta q}{2 H_0} z_G^2 \quad (2)$$

另外,自由段桩身转角  $\varphi_G$ 、弯矩  $M_G$  和剪切力  $Q_G$  与桩身水平位移的关系分别为:  $\varphi_G = \frac{du_G}{dz_G}$ 、 $M_G = E I \frac{d^2 u_G}{dz_G^2}$  和  $Q_G = E I \frac{d^3 u_G}{dz_G^3} + N_G \frac{du_G}{dz_G} - N_G \theta$ 。

对于 OC 段,同样可得

$$Q_{E_1} = E I \frac{d^3 u_{E_1}}{dz_{E_1}^3} + N_{E_1} \frac{du_{E_1}}{dz_{E_1}} - N_{E_1} \theta \quad (3)$$

式中:  $Q_{E_1}$  为 OC 段上  $z_{E_1}$  处桩身剪切力。另外可得:  $\varphi_{E_1} = \frac{du_{E_1}}{dz_{E_1}}$ 、 $M_{E_1} = E I \frac{d^2 u_{E_1}}{dz_{E_1}^2}$ 、 $\frac{dQ_{E_1}}{dz_{E_1}} = -p_1$ , 式中:  $\varphi_{E_1}$  和  $M_{E_1}$  分别为 OC 段上  $z_{E_1}$  处桩身转角和弯矩。式(3)已不能求得解析解和幂级数解,以下给出半解析解。如图 2(a)所示,OC 段被分成  $n_1$  个等长的小段。图 2(b)以第  $i$  段为例,在该段上建立坐标系,图中  $u_{E_1 i}$  为  $z_{E_1 i}$  处桩身水平位移。假定第  $i$  段上桩身轴力  $N_{E_1 i}$  和地基水平抗力系数  $k_{1 i}$  均为常数,分别可取为  $N_{E_1 i} = N_p + f_0 H_0 + \frac{f_1 (2i - 1) l_1}{2 n_1}$ 、 $k_{1 i} = m \left[ z_0 + \frac{(2i - 1) l_1}{2 n_1} \right]^n$  ( $i = 1, 2, \dots, n_1$ )。将上述两式代入式(3)并对纵坐标求导数,得第  $i$  段桩身的挠曲微分线方程

$$E I \frac{d^4 u_{E_1 i}}{dz_{E_1 i}^4} + N_{E_1 i} \frac{d^2 u_{E_1 i}}{dz_{E_1 i}^2} + k_{1 i} b u_{E_1 i} = 0 \quad (4)$$

并有:  $\varphi_{E_1 i} = \frac{du_{E_1 i}}{dz_{E_1 i}}$ 、 $M_{E_1 i} = E I \frac{d^2 u_{E_1 i}}{dz_{E_1 i}^2}$ 、 $Q_{E_1 i} = E I \cdot \frac{d^3 u_{E_1 i}}{dz_{E_1 i}^3} + N_{E_1 i} \frac{du_{E_1 i}}{dz_{E_1 i}} - N_{E_1 i} \theta$ , 式中  $\varphi_{E_1 i}$ 、 $M_{E_1 i}$  和  $Q_{E_1 i}$  分别为第  $i$  段上  $z_{E_1 i}$  处桩身转角、弯矩和剪切力。

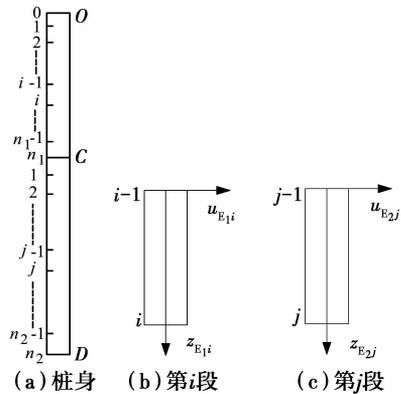


图 2 地表以下桩身和桩段示意图  
Fig. 2 Schematic diagrams of pile shaft and pile segments under ground

同理,CD 段被分成  $n_2$  个等长的小段。如图 2(c)所示,在第  $j$  段上建立坐标系,图中  $u_{E_2 j}$  为  $z_{E_2 j}$  处桩身水平位移,则第  $j$  段桩身挠曲线微分方程为

$$E I \frac{d^4 u_{E_2 j}}{dz_{E_2 j}^4} + N_{E_2 j} \frac{d^2 u_{E_2 j}}{dz_{E_2 j}^2} + k_{2 j} b u_{E_2 j} = 0 \quad (5)$$

式中:  $N_{E_2 j} = N_p + f_0 H_0 + f_1 l_1 + \frac{f_1 (2j - 1) l_2}{2 n_2}$ ,

$$k_{2j} = m \left[ z_0 + l_1 + \frac{(2j-1)l_2}{2n_2} \right]^n \quad (j = 1, 2, \dots, n_2).$$

$$\text{并有: } \varphi_{E_2j} = \frac{du_{E_2j}}{dz_{E_2j}}, M_{E_2j} = EI \frac{d^2 u_{E_2j}}{dz_{E_2j}^2}, Q_{E_2j} = EI \cdot$$

$$\frac{d^3 u_{E_2j}}{dz_{E_2j}^3} + N_{E_2j} \frac{du_{E_2j}}{dz_{E_2j}} - N_{E_2j} \theta, \text{ 式中: } \varphi_{E_2j}, M_{E_2j} \text{ 和 } Q_{E_2j}$$

分别为第  $j$  段上  $z_{E_2j}$  处桩身转角、弯矩和剪切力。

### 1.2 各段上的解

求解式(2), 并利用地表以上桩身转角、弯矩和剪切力与桩身水平位移的关系, 得到该段桩身侧向响应的幂级数解

$$U_G(z_G) = A_G(z_G)U_P \quad (6)$$

式中:  $U_P = [u_p, \varphi_p, M_p, Q_p, 1]^T$ , 表示桩顶的变形和  
内力;  $U_G = [u_G, \varphi_G, M_G, Q_G, 1]^T$ , 表示  $z_G$  处桩身变

$$\text{形和内力; } A_G = \begin{bmatrix} 1 & S_{G1} & T_{G1} & V_{G1} & R_{G1} \\ 0 & S_{G2} & T_{G2} & V_{G2} & R_{G2} \\ 0 & S_{G3} & T_{G3} & V_{G3} & R_{G3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & R_{G5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_G、$$

$S_G、T_G、V_G$  已由文献[15]给出, 本文不再赘述。

求解式(4), 并利用 OC 段上第  $i$  段桩身转角、弯矩和剪切力与桩身水平位移的关系, 得到第  $i$  段桩身侧向响应的解析解

$$U_{E_1i}(z_{E_1i}) = L_{E_1i}(z_{E_1i})U_{E_1i,0} \quad (7)$$

$$B_{E_2j} = \begin{bmatrix} \eta_j g_j & \eta_j (\lambda_{3j} g_j - \lambda_{4j} t_j) & -2EI\eta_j (\alpha_{2j} g_j + \lambda_{3j} \lambda_{4j} t_j) & -2\gamma_{2j} EI \eta_j (\lambda_{3j} g_j + \lambda_{4j} t_j) & 0 \\ \eta_j t_j & \eta_j (\lambda_{4j} g_j + \lambda_{3j} t_j) & 2EI\eta_j (\lambda_{3j} \lambda_{4j} g_j - \alpha_{2j} t_j) & 2\gamma_{2j} EI \eta_j (\lambda_{4j} g_j - \lambda_{3j} t_j) & 0 \\ \delta_j g_j & -\delta_j (\lambda_{3j} g_j + \lambda_{4j} t_j) & -2EI\delta_j (\alpha_{2j} g_j - \lambda_{3j} \lambda_{4j} t_j) & 2\gamma_{2j} EI \delta_j (\lambda_{3j} g_j - \lambda_{4j} t_j) & 0 \\ \delta_j t_j & \delta_j (\lambda_{4j} g_j - \lambda_{3j} t_j) & -2EI\delta_j (\lambda_{3j} \lambda_{4j} g_j + \alpha_{2j} t_j) & 2\gamma_{2j} EI \delta_j (\lambda_{4j} g_j + \lambda_{3j} t_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{E_2j} \theta & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\eta_j = e^{\lambda_{3j} z_{E_2j}}, \delta_j = e^{-\lambda_{3j} z_{E_2j}}, g_j = \cos(\lambda_{4j} z_{E_2j}), t_j = \sin(\lambda_{4j} z_{E_2j}), \lambda_{3j} = \sqrt{\gamma_{2j} - \alpha_{2j}}, \lambda_{4j} = \sqrt{\gamma_{2j} + \alpha_{2j}},$$

$$\gamma_{2j} = \sqrt{\frac{k_{2j} b}{4EI}}, \alpha_{2j} = \frac{N_{E_2j}}{4EI}.$$

### 1.3 求解过程

首先, 用二分法近似求得图 1 中 C 点位置, 也即得到  $l_1$  和  $l_2$  的值。然后, 基于桩身响应在图 1 中 O 点和 C 点处的连续性, 结合桩顶、底的边界条件, 得到桩顶未知的边界值

$$u_{pu} = -\psi_1^{-1} \psi_2 u_{pk} \quad (9)$$

式中:  $u_{pu} = [u_p, \varphi_p]^T$ ,  $u_{pk} = [Q_p, 1]^T$ ,  $\psi_1 =$

$$v A_{Gu}(H_0), \psi_2 = v A_{Gk}(H_0), v = L_{E_2 n_2 k} \left( \frac{l_2}{n_2} \right) L_{E_2 (n_2 - 1)}$$

$$\left( \frac{l_2}{n_2} \right) \cdots L_{E_2 1} \left( \frac{l_2}{n_2} \right) L_{E_1 n_1} \left( \frac{l_1}{n_1} \right) L_{E_1 (n_1 - 1)} \left( \frac{l_1}{n_1} \right) \cdots$$

式中:  $U_{E_1i,0} = [u_{E_1i,0}, \varphi_{E_1i,0}, M_{E_1i,0}, Q_{E_1i,0}, 1]^T$ , 表示 OC 段上第  $i$  段桩身顶点处的变形和内力;  $U_{E_1i}(z_{E_1i}) =$

$[u_{E_1i}, \varphi_{E_1i}, M_{E_1i}, Q_{E_1i}, 1]^T$ , 表示第  $i$  段上  $z_{E_1i}$  处桩身变形和内力;  $L_{E_1i}(z_{E_1i}) = B_{E_1i}(z_{E_1i}) B_{E_1i}^{-1}(0)$ ,  $B_{E_1i} =$

$$\begin{bmatrix} a_i & -\lambda_{1i} c_i & -EI\lambda_{1i}^2 a_i & -EI\lambda_{1i} \lambda_{2i}^2 c_i & 0 \\ c_i & \lambda_{1i} a_i & -EI\lambda_{1i}^2 c_i & EI\lambda_{1i} \lambda_{2i}^2 a_i & 0 \\ f_i & -\lambda_{2i} s_i & -EI\lambda_{2i}^2 f_i & -EI\lambda_{1i} \lambda_{2i} s_i & 0 \\ s_i & \lambda_{2i} f_i & -EI\lambda_{2i}^2 s_i & EI\lambda_{1i} \lambda_{2i} f_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{E_1i} \theta & 1 \end{bmatrix}^T, a_i =$$

$\cos(\lambda_{1i} z_{E_1i}), c_i = \sin(\lambda_{1i} z_{E_1i}), f_i = \cos(\lambda_{2i} z_{E_1i}), s_i =$

$\sin(\lambda_{2i} z_{E_1i}), \lambda_{1i} = \sqrt{2} \sqrt{\alpha_{1i} + \sqrt{\alpha_{1i}^2 - \gamma_{1i}}}, \lambda_{2i} = \sqrt{2} \cdot$

$$\sqrt{\alpha_{1i} - \sqrt{\alpha_{1i}^2 - \gamma_{1i}}}, \alpha_{1i} = \frac{N_{E_1i}}{4EI}, \gamma_{1i} = \frac{k_{1i} b}{4EI}.$$

求解式(5), 并利用 CD 段上第  $j$  段桩身转角、弯矩和剪切力与桩身水平位移的关系, 得到第  $j$  段桩身侧向响应的解析解

$$U_{E_2j}(z_{E_2j}) = L_{E_2j}(z_{E_2j})U_{E_2j,0} \quad (8)$$

式中:  $U_{E_2j,0} = [u_{E_2j,0}, \varphi_{E_2j,0}, M_{E_2j,0}, Q_{E_2j,0}, 1]^T$ , 表示 CD 段上第  $j$  段桩身顶点处的变形和内力;  $U_{E_2j}(z_{E_2j}) = [u_{E_2j}, \varphi_{E_2j}, M_{E_2j}, Q_{E_2j}, 1]^T$ , 表示第  $j$  段上  $z_{E_2j}$  处桩身变形和内力;  $L_{E_2j}(z_{E_2j}) = B_{E_2j}(z_{E_2j}) B_{E_2j}^{-1}(0)$ ,

$$L_{E_1 1} \left( \frac{l_1}{n_1} \right). \quad A_{Gu} \quad (H_0) =$$

$$\begin{bmatrix} A_{G11}(H_0) & A_{G12}(H_0) + K_m A_{G13}(H_0) \\ A_{G21}(H_0) & A_{G22}(H_0) + K_m A_{G23}(H_0) \\ A_{G31}(H_0) & A_{G32}(H_0) + K_m A_{G33}(H_0) \\ A_{G41}(H_0) & A_{G42}(H_0) + K_m A_{G43}(H_0) \\ A_{G51}(H_0) & A_{G52}(H_0) + K_m A_{G53}(H_0) \end{bmatrix} (A_{G11}(H_0),$$

$A_{G21}(H_0) \cdots, A_{G53}(H_0)$  均取自矩阵  $A_G(H_0)$ , 如  $A_{G43}(H_0)$  为矩阵  $A_G(H_0)$  中第 4 行第 3 列的元素, 下同。

$$A_{Gk} \quad (H_0) =$$

$$\begin{bmatrix} A_{G14}(H_0) & A_{G24}(H_0) & A_{G34}(H_0) & A_{G44}(H_0) & A_{G54}(H_0) \\ A_{G15}(H_0) & A_{G25}(H_0) & A_{G35}(H_0) & A_{G45}(H_0) & A_{G55}(H_0) \end{bmatrix}^T.$$

$$\text{桩底自由时: } L_{E_2 n_2 k} \left( \frac{l_2}{n_2} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} L_{E_2 n_2, 31} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 32} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 33} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 34} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 35} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) \\ L_{E_2 n_2, 41} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 42} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 43} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 44} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 45} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) \end{bmatrix}; \text{桩底铰接时: } L_{E_2 n_2 k} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} L_{E_2 n_2, 11} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 12} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 13} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 14} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 15} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) \\ L_{E_2 n_2, 31} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 32} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 33} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 34} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 35} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) \end{bmatrix}; \text{桩底固定时: } L_{E_2 n_2 k} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} L_{E_2 n_2, 11} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 12} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 13} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 14} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 15} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) \\ L_{E_2 n_2, 21} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 22} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 23} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 24} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) & L_{E_2 n_2, 25} \left(\frac{l_2}{n_2}\right) \end{bmatrix}。$$

桩顶弯矩等于桩头转动刚度与桩顶转角的乘积。至此,桩顶位移、转角、弯矩和剪切力全部得到。由式(6)~(8)及各分界点处桩身响应的连续性,可得任意点处桩身变形和内力。

## 2 算例验证

采用 Fortran 语言编制了桩身响应计算程序,现验证解及程序的可靠性。通过室内模型试验,赵明华等<sup>[14]</sup>研究了微倾木桩在纵横向组合荷载作用下的水平承载性状。第 2 组第 5 号试桩主要参数:地表以上桩长为 66.0 cm,总桩长为 135.0 cm,桩身直径为 31.57 mm,抗弯刚度为 407.686 6 N·m<sup>2</sup>,桩身初始倾角  $\theta=0.0129$  rad,桩顶自由,即  $K_m=0$  kN·m/rad,桩底自由。上覆黏土层厚度为 30 cm,下卧砂土层厚度为 70 cm。地基水平抗力系数中的参数: $m=2.1 \times 10^5$  kN/m<sup>3.8</sup>,  $z_0=0.1$  m,  $n=0.8$ 。桩、土其余参数详见文献[14]。地表以上桩身无分布荷载作用,水平力  $Q_p=26.95$  N。地表处桩身水平位移与纵向荷载的实测关系及不计桩侧摩阻力和桩身重量影响时,本文解和文献[15]解的计算结果如图 3 所示。

由图 3 可见,本文解计算值与模型试验实测结果吻合度较高,所得解及程序是可靠的。另外,本文地基水平抗力系数比文献[15]中的更具一般性,计算值也比文献[15]解计算值更接近实测结果,说明本文解更先进。

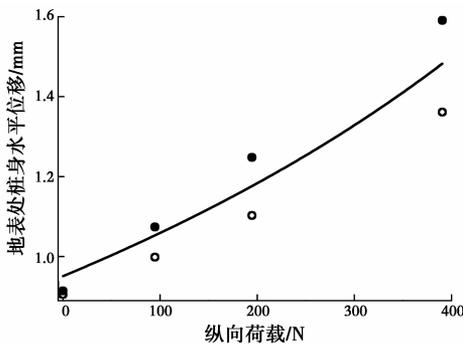
## 3 影响因素分析

为探讨桩头转动约束、桩身初始微倾斜及纵向荷载等对纵横向组合荷载作用下桩身侧向响应的影响,以某桥梁桩基为例进行分析。地表以上及以下桩长分别为 15、30 m,桩径为 1.8 m,桩底自由,桩身抗弯刚度为  $9.275 \times 10^6$  kN·m<sup>2</sup>;比例系数  $m=6 \times 10^3$  kN/m<sup>3.8</sup>,  $z_0=0.4$  m,  $n=0.8$ 。地表以上桩身无分布荷载作用,且该段桩身轴力增长系数  $f_0=62.345$  kN/m;为方便计算,假定桩身轴力自地表至桩底线性减小到零。

### 3.1 桩头转动约束的影响

分别利用桩顶自由时桩顶位移  $u_{free}$ 、桩顶固定时桩顶弯矩  $M_{fixed}$  及总桩长  $H$  对桩顶位移  $u_p$ 、桩顶弯矩  $M_p$ 、地表以下桩身最大弯矩  $M_{max}$  及其距离桩顶的距离  $z_{max}$  归一化,得到无量纲的量:桩顶位移比  $u_p/u_{free}$ 、桩顶弯矩比  $M_p/M_{fixed}$ 、地表以下桩身最大弯矩比  $M_{max}/M_{fixed}$  及地表以下桩身最大弯矩距离桩顶的距离比  $z_{max}/H$ 。纵向荷载  $N_p=10$  MN、桩身初始倾角  $\theta=5 \times 10^{-3}$  rad,不同的水平荷载下,  $u_p/u_{free}$ 、 $M_p/M_{fixed}$ 、 $M_{max}/M_{fixed}$  及  $z_{max}/H$  与桩头转动刚度  $K_m$  的关系如图 4 所示。

由图 4 可见,水平荷载的大小对  $u_p/u_{free}$ 、 $M_p/M_{fixed}$ 、 $M_{max}/M_{fixed}$  及  $z_{max}/H$  的影响很小,可忽略不计。当  $K_m < 1 \times 10^4$  kN·m/rad 时,近于桩顶自由状态,桩顶弯矩接近零;桩身最大弯矩位于地表以下某点处,其值约为桩顶固定时桩顶弯矩的 1.8 倍。当  $K_m$  的值在  $1 \times 10^4$  kN·m/rad 和  $1 \times 10^8$  kN·m/



注: — 本文解计算结果 ○ 文献[15]解计算结果  
● 模型试验结果

图 3 地表处桩身水平位移与纵向荷载的关系  
Fig. 3 Relationship between horizontal pile displacement at ground and vertical load

rad 之间时,随着桩头转动刚度的增加,桩顶位移和地表以下桩身最大弯矩迅速减小,而桩顶弯矩和地表以下桩身最大弯矩距离桩顶的距离迅速增大。桩头转动刚度在  $1 \times 10^6 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{rad}$  附近存在一临界值,在该点处桩顶弯矩等于地表以下桩身最大弯矩,且桩身最大弯矩达到最小值;当桩头转动刚度大于该临界值时,桩顶弯矩超过地表以下桩身最大弯矩而成为最大弯矩。当  $K_m > 1 \times 10^8 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{rad}$  时,近于桩顶固定状态;桩顶位移约为桩顶自由时的 22%,这与文献[1]的结论相近。

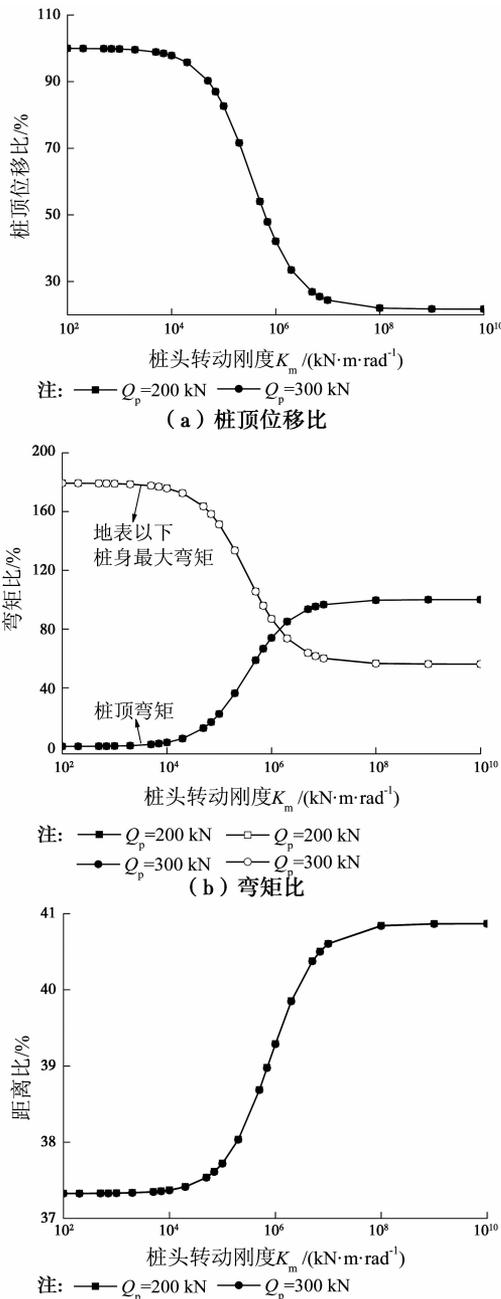


图 4 桩身响应与桩头转动刚度的关系

Fig. 4 Relationship between pile responses and coefficient of rotational restraint

### 3.2 桩身初始微倾斜的影响

分别利用  $\theta = 0 \text{ rad}$  时的桩顶位移  $u_{vp}$  和桩身最大弯矩  $M_{vmax}$  及总桩长  $H$  对桩顶位移  $u_p$ 、桩身最大弯矩  $M_{max}$  及其距离桩顶的距离  $z_{max}$  归一化,得到无量纲的量:桩顶位移比  $u_p/u_{vp}$ 、最大弯矩比  $M_{max}/M_{vmax}$  及桩身最大弯矩距离桩顶的距离比  $z_{max}/H$ 。纵向荷载  $N_p = 10 \text{ MN}$ 、水平荷载  $Q_p = 250 \text{ kN}$ ,不同的桩头转动刚度下, $u_p/u_{vp}$ 、 $M_{max}/M_{vmax}$  及  $z_{max}/H$  与桩身初始倾角的关系如图 5 所示。

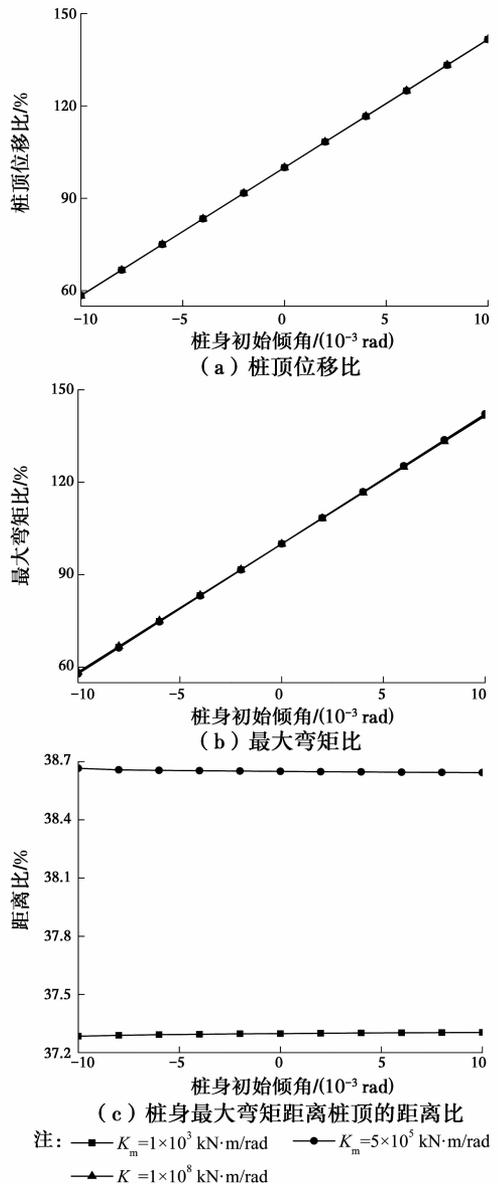


图 5 桩身响应与桩身初始倾角的关系

Fig. 5 Relationship between pile responses and initial inclination angle of pile shaft

由图 5(a)、(b) 可见,随着桩身初始倾角的增加,桩身最大位移和最大弯矩均线性增大,且在桩头转动刚度增加时其变化速率保持不变。桩身初始倾

角从 0 rad 增至  $1 \times 10^{-2}$  rad 时,桩身最大位移和最大弯矩均增加约 42%。由图 5(c)可见,  $K_m = 1 \times 10^3$  kN · m/rad 及  $K_m = 5 \times 10^5$  kN · m/rad 时,桩身最大弯矩位于地表以下某点处,且其位置随桩身初始倾角的增加而保持不变。另外,计算结果表明当  $K_m = 1 \times 10^8$  kN · m/rad 时,桩身最大弯矩位于桩顶。因此,纵横向组合荷载作用下桩身侧向响应受桩身初始微倾斜的影响较大,不容忽视。

### 3.3 纵向荷载的影响

桩头转动刚度  $K_m = 5 \times 10^4$  kN · m/rad、水平力  $Q_p = 350$  kN;桩身最大位移、最大弯矩以及最大弯矩距离地表的距离在不同的桩身初始倾角下与纵向荷载的关系如图 6 所示。

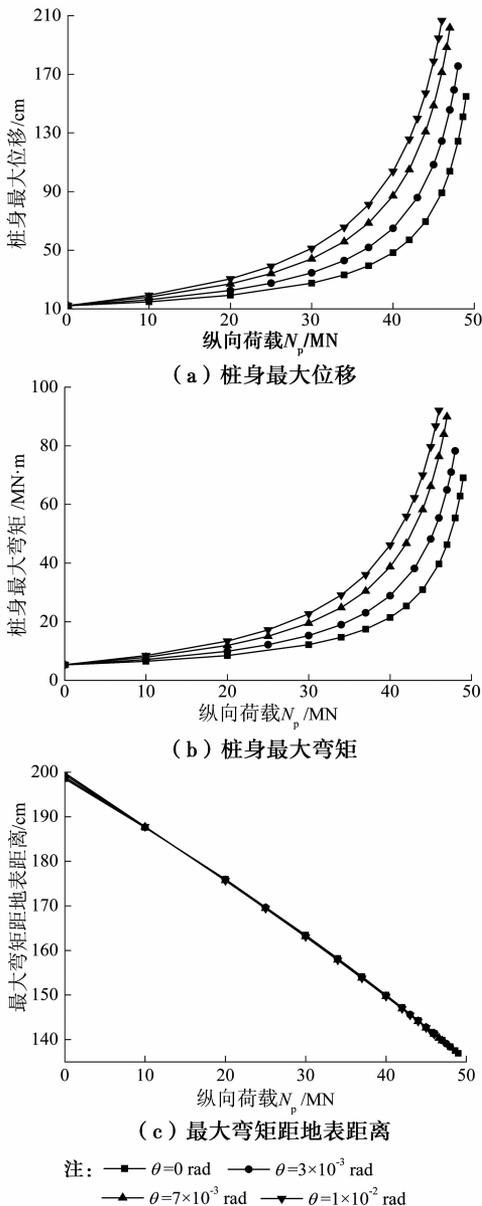


图 6 桩身响应与纵向荷载的关系

Fig. 6 Relationship between pile responses and vertical load

由图 6(a)、(b)可见,随着纵向荷载的增加,桩身最大位移和桩身最大弯矩均增大,当纵向荷载较小时其变化速率较小。随着纵向荷载和桩身初始倾角的增加,其变化速率逐渐增大。在纵向荷载施加的后期,随着纵向荷载的增加,桩身最大位移和桩身最大弯矩急剧增大,此时,桩基处于失稳状态。桩身最大位移和桩身最大弯矩受桩身初始微倾斜的影响随纵向荷载的增加而增大。由图 5(c)可见,随着纵向荷载的增加,桩身最大弯矩距离地表的距离呈线性减小。

## 4 结论

基于三参数形式的地基水平抗力系数,采用桩头转动刚度表征桩头转动约束的程度,推导出纵横向组合荷载作用下微倾单桩侧向变形和内力的半解析解。计算分析后得到以下结论:

- 1)随着桩头转动刚度的增加,桩顶位移和地表以下桩身最大弯矩均减小,桩顶弯矩和地表以下桩身最大弯矩距离桩顶的距离均增大。桩头转动刚度存在一临界值,在该点处桩顶弯矩等于地表以下桩身最大弯矩;当桩头转动刚度大于该临界值时,桩顶弯矩超过地表以下桩身最大弯矩而成为最大弯矩。
- 2)随着桩身初始倾角的增加,桩身最大位移和最大弯矩均线性增大,且在桩头转动刚度增加时其变化速率保持不变。桩身最大位移和最大弯矩受桩身初始微倾斜的影响随纵向荷载的增加而增大。桩身最大弯矩所在位置随桩身初始倾角的增加而保持不变。
- 3)随着纵向荷载的增加,桩身最大位移和桩身最大弯矩均增大,其变化速率也随纵向荷载及桩身初始倾角的增加而逐渐增大,而地表以下桩身最大弯矩距离地表的距离呈线性减小。

### 参考文献:

[ 1 ] MOKWA R L, DUNCAN J M. Rotational restraint of pile caps during lateral loading [ J ]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2003, 129(9): 829-837.

[ 2 ] FAYYAZI M S, TAIEBAT M, FINN W D L. Group reduction factors for analysis of laterally loaded pile groups [ J ]. Canadian Geotechnical Journal, 2014, 51(7): 758-769.

[ 3 ] LAORA R D, ROVITHIS E. Kinematic bending of fixed-head piles in nonhomogeneous soil [ J ]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2015, 141(4): 04014126.

- [4] TEHRANI F S, PREZZI M, SALGADO R. A multidirectional semi-analytical method for analysis of laterally loaded pile groups in multi-layered elastic strata [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2016, 40 (12): 1730-1757.
- [5] PRAKASH S, SHARMA H D. *Pile foundations in engineering practice* [M]. New York: Wiley, 1990: 252-256.
- [6] 孔令刚,姜丽红,陈仁朋,等.考虑桩头约束的水平受荷单桩响应分析[J].*应用力学学报*,2014,31(3):393-399.  
KONG L G,JIANG L H,CHEN R P,et al. Response of single pile with partial pile head fixity subjected to lateral loading [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*,2014,31(3):393-399. (in Chinese)
- [7] 姜丽红,孔令刚,蔺港,等.不同桩头约束下水平受荷单桩简化计算方法[J].*工程力学*,2014,31(11):63-69.  
JIANG L H, KONG L G, LIN G, et al. Simplified method of laterally loaded single piles with partial pile head fixity [J]. *Engineering Mechanics*,2014,31(11):63-69. (in Chinese)
- [8] LIANG F Y, CHEN H B, CHEN S L. Influences of axial load on the lateral response of single pile with integral equation method [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2012,36(16):1831-1845.
- [9] 张玲,赵明华,赵衡.倾斜荷载下桩柱式桥墩受力变形分析传递矩阵法[J].*中国公路学报*,2015,28(2):69-76.  
ZHANG L, ZHAO M H, ZHAO H. Transfer matrix method for deformation of pile type bridge pier under axial transverse load [J]. *China Journal of Highway and Transport*,2015,28(2):69-76. (in Chinese)
- [10] ZHANG L, GONG X N, YU J L. Elastic solutions for partially embedded single piles subjected to simultaneous axial and lateral loading [J]. *Journal of Central South University*,2014,21(11):4330-4337.
- [11] HIRAI H. A winkler model approach for vertically and laterally loaded piles in nonhomogeneous soil [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*,2012,36(17):1869-1897.
- [12] 郑刚,李帅,杜一鸣,等.竖向荷载作用下倾斜桩的承载力特性[J].*天津大学学报*,2012,45(7):567-576.  
ZHENG G, LI S, DU Y M, et al. Bearing capacity behaviors of inclined pile under vertical load [J]. *Journal of Tianjin University*,2012,45(7):567-576. (in Chinese)
- [13] NADEEM M, CHAKRABORTY T, MATSAGAR V. Nonlinear buckling analysis of slender piles with geometric imperfections [J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, 2015, 141 (1):06014014.
- [14] 赵明华,李微哲,杨明辉,等.成层地基中倾斜偏心荷载下基桩位移特性室内模型试验研究[J].*土木工程学报*,2006,39(12):95-99.  
ZHAO M H, LI W Z, YANG M H, et al. A model test study on displacement of piles under inclined and eccentric loads in layered soils [J]. *China Civil Engineering Journal*,2006,39(12):95-99. (in Chinese)
- [15] 李微哲,赵明华,单远铭,等.倾斜偏心荷载下基桩内力位移分析[J].*中南公路工程*,2005,30(3):53-57.  
LI W Z, ZHAO M H, SHAN Y M, et al. Analysis of single pile under eccentric and inclined loading [J]. *Central South Highway Engineering*, 2005, 30 (3): 53-57. (in Chinese)
- [16] 张磊,龚晓南,俞建霖.纵横荷载下单桩地基反力法的半解析解[J].*哈尔滨工业大学学报*,2011,43(6):96-100.  
ZHANG L, GONG X N, YU J L. Semi-analytical solutions for single piles subjected to combined vertical and lateral loads by subgrade reaction method [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*,2011,43(6):96-100. (in Chinese)

(编辑 王秀玲)