

doi:10.11835/j.issn.2096-6717.2019.101



二维耦合热弹性动力学问题的无网格 自然邻接点 Petrov-Galerkin 法

李庆华, 陈莘莘

(华东交通大学 土木建筑学院, 南昌 330013)

摘要:为了更有效地求解二维耦合热弹性动力学问题,对无网格自然邻接点 Petrov-Galerkin 法在此类问题中的应用进行了研究,并发展了相应的计算方法。该方法建立试函数时可以只依赖于一组离散的节点,有效地避免了复杂的网格划分和网格畸变的影响。相对于常用的移动最小二乘而言,自然邻接点插值不涉及复杂的矩阵求逆运算,更不需要任何人为参数。由于运动方程和瞬态热传导方程相互影响,这些方程必须联立求解。采用 Newmark 法求解空间离散后得到的二阶常微分方程组,进而可直接获得温度场和位移场的数值结果。

关键词:无网格法;自然邻接点插值;耦合热弹性动力学;Petrov-Galerkin 法

中图分类号:TP301.6 **文献标志码:**A **文章编号:**2096-6717(2019)05-0109-06

Meshless natural neighbour Petrov-Galerkin method for two-dimensional dynamic coupled thermoelasticity problem

Li Qinghua, Chen Shenshen

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, P. R. China)

Abstract: In order to solve the two-dimensional dynamic coupled thermoelasticity problem more effectively, a novel numerical method based on the meshless natural neighbour Petrov-Galerkin method is proposed in this study. Only a group of scattered nodes are required in this method, to construct approximation function and therefore complex meshing and disadvantage of mesh distortion are effectively eliminated. In comparison with the moving least-squares (MLS) approximation used widely in meshless methods, the natural neighbour interpolation requires no complex matrix inversions and no artificial intermediate parameters. The equations of motion and transient heat conduction equations of the coupled thermoelasticity interaction on each other and therefore these equations must be solved simultaneously. After spatially discretization, a series of second-order ordinary differential algebraic equations is obtained, which is solved by the Newmark method to obtain the numerical temperature and displacement field directly.

Keywords: meshless method; natural neighbour interpolation; dynamic coupled thermoelasticity; Petrov-Galerkin method

收稿日期:2018-12-25

基金项目:国家自然科学基金(21466012);江西省教育厅项目(KJLD14041)

作者简介:李庆华(1976-),女,主要从事数值传热学研究,E-mail: jessylqh@126.com.

陈莘莘(通信作者),男,教授,E-mail: chenshenshen@tsinghua.org.cn.

Received:2018-12-25

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (No. 21466012); Foundation of Jiangxi Educational Committee (No. KJLD14041)

Author brief: Li Qinghua(1976-), main research interest: numerical heat transfer, E-mail: jessylqh@126.com.
Chen Shenshen(corresponding author), professor, E-mail: chenshenshen@tsinghua.org.cn.

当结构受到温变,一般会产生热应力,并且热应力是物体破坏的一个重要因素^[1-2]。对受热结构进行分析时,解耦方法可先由热传导方程求出温度分布,再由热弹性方程求解位移和应力。但是,解耦方法没有考虑结构变形对温度场的影响^[3]。事实上,热弹性力学中最基本的问题就是耦合热弹性问题。在耦合热弹性问题中,温度和变形会相互影响,温度场和应变场的耦合项必须体现在热传导方程中。为了解温度、位移和应力,必须联立求解热传导方程和热弹性运动方程。相对于非耦合热弹性问题,耦合热弹性问题求解更困难。

热应力问题的数值方法主要基于发展较为成熟的有限元法^[4-5]和边界元法^[6-8]。近年来,部分学者尝试采用无网格法^[9-12]求解热应力问题。无网格法不仅能够避免网格生成的复杂过程,而且在节点分布不规则时,损失的计算精度较小,从而日益得到重视^[13-14]。近十多年来发展起来的无网格法一无网格自然邻接点 Petrov-Galerkin 法^[15-16]不仅允许加权函数和试函数取自不同的函数空间^[17],而且克服了本质边界条件不易施加的困难。此方法中,所有的积分都在中心为所考虑点的多边形子域上进行,而且多边形子域的构造十分方便。目前,无网格自然邻接点 Petrov-Galerkin 法在很多领域都得到广泛应用^[18-20]。本文采用自然邻接点插值对温度和位移分别插值,与局部加权余量法结合,提出了适用于耦合热弹性动力学问题的无网格自然邻接点 Petrov-Galerkin 法。最后,通过数值算例验证了本文方法应用于耦合热弹性动力学问题分析的有效性和合理性。

1 自然邻接点插值

在求解域内给定 M 个离散节点,其集合为 $N = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ 。对任一节点 x_I ,其一阶 Voronoi 结构可定义为

$$T_I = \{x \in R^2 : d(x, x_I) < d(x, x_J), \forall J \neq I\} \quad (1)$$

式中: $d(x, x_I)$ 表示点 x 与节点 x_I 之间的距离。

为计算 Sibson 插值形函数,需进一步定义二阶 Voronoi 结构。

$$T_{IJ} = \{x \in R^2 : d(x, x_I) < d(x, x_J) < d(x, x_K), \forall J \neq I \neq K\} \quad (2)$$

图 1 所示为点 x 的一阶和二阶 Voronoi 结构。

根据 Sibson 插值的定义^[15],点 x 的插值函数为

$$\varphi_I(x) = A_I(x)/A(x) \quad (3)$$

式中: $A_I(x)$ 为点 x 的二阶 Voronoi 结构 T_{xI} 的面积; $A(x)$ 为点 x 的一阶 Voronoi 结构 T_x 的面积。

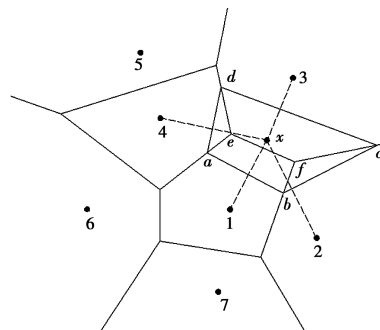


图 1 点 x 的一次和二阶 Voronoi 结构

Fig. 1 First-order and second-order Voronoi cells about x

定义了各节点的插值函数后,点 x 的温度函数类似于有限元法可写为

$$\theta(x) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(x) \theta_I \quad (4)$$

式中: $\theta_I (I=1, 2, L, n)$ 是点 x 周围自然邻接点的节点温度。

2 控制方程的弱形式及其离散化

设线性耦合热弹性动力学问题的区域为 Ω , Γ 为 Ω 的边界。热弹性力学的应力、位移与温度之间的关系为^[1]

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} - \beta \theta \delta_{ij} \quad (5)$$

式中: σ_{ij} 为应力; ϵ_{ij} 为应变, λ 和 μ 为拉梅常数; β 为热应力系数; θ 为温度变化值。小变形情况下,应变 ϵ_{ij} 与位移 u_i 的几何关系为

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (6)$$

在经典的热弹性理论中,运动方程和热传导方程可表示为^[1]

$$\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (7)$$

$$k\theta_{,i,i} - \rho c \dot{\theta} - \beta \theta_0 \dot{u}_{i,i} + Q = 0 \quad (8)$$

式中: ρ 为质量密度; \ddot{u}_i 为加速度; $\dot{u}_{i,i}$ 为体积应变率; b_i 为体力; $\dot{\theta}$ 表示温度对时间的导数; θ_0 为参考温度; Q 为热源; k 为导热系数; c 为比热容。在边界 Γ 上,边界条件包括力学和热学两种,数学表达式为

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t), \quad x \in \Gamma_u \quad (9)$$

$$t_i(x, t) = \bar{t}_i(x, t), \quad x \in \Gamma_t \quad (10)$$

$$\theta(x, t) = \bar{\theta}(x, t), \quad x \in \Gamma_\theta \quad (11)$$

$$k\theta_{,i} n_i = \bar{q}, \quad x \in \Gamma_q \quad (12)$$

式中: \bar{u}_i 和 \bar{t}_i 分别表示给定的位移和面力; $\bar{\theta}$ 和 \bar{q} 分别表示给定的温度和热通量; n_i 为边界 Γ 的外法线方向余弦。此外,相应的初始条件为

$$\theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (13)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (14)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (15)$$

式中: θ_0 为初始温度; \mathbf{u}_0 和 \mathbf{v}_0 分别为初始位移和初始速度。

在子域 Ω_s^I 上,式(7)和式(8)的局部弱形式可分别表示为

$$\int_{\Omega_s^I} v_I (\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i) d\Omega = 0 \quad (16)$$

$$\int_{\Omega_s^I} v_I (k\theta_{,ii} - \rho c\dot{\theta} - \beta\theta_0 \dot{u}_{i,i} + Q) d\Omega = 0 \quad (17)$$

式中: v_I 为加权函数。对式(16)左边积分的第 1 项进行分部积分并利用散度定理后,可得

$$\int_{\Omega_s^I} (v_I \rho \ddot{u}_i + v_{I,j} \sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma_{st}^I} v_I t_i d\Gamma - \int_{\Omega_s^I} v_I b_i d\Omega = 0 \quad (18)$$

式中: Γ_s^I 为子域 Ω_s^I 的边界,通常由内边界 Γ_{si}^I 和局部边界位于整体边界上给定面力边界条件的 Γ_{st}^I 和给定位移边界条件的 Γ_{su}^I 三部分组成。在无网格自然邻接点 Petrov-Galerkin 法中,多边形子域 Ω_s^I 是由共享节点 I 的 Delaunay 三角形 T_{li} 构成,如图 2 所示。选取 FEM 三角形线性单元的形函数 N_I 为权函数,式(18)可简化为

$$\int_{\Omega_s^I} (N_I \rho \ddot{u}_i + N_{I,j} \sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma_{st}^I} N_I t_i d\Gamma - \int_{\Omega_s^I} N_I b_i d\Omega = 0 \quad (19)$$

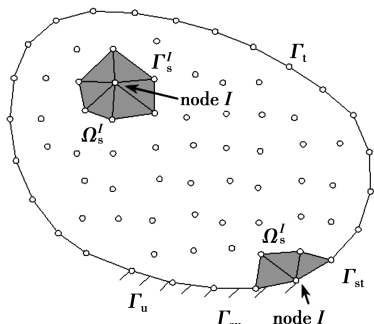


图 2 局部多边形子域

Fig. 2 The local polygonal sub-domains

以此类推,式(17)可变为

$$\int_{\Omega_s^I} (N_I \rho c \dot{\theta} + N_I \beta \theta_0 \dot{u}_{i,i} + N_{I,i} k \theta_{,i}) d\Omega -$$

$$\int_{\Gamma_{sq}^I} N_I \bar{q} d\Gamma - \int_{\Omega_s^I} N_I Q d\Omega = 0 \quad (20)$$

由于只对空间域进行离散,求解域 Ω 内的位移 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 和温度 $\theta(\mathbf{x}, t)$ 可由式(4)表示为

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I(t) \\ \theta(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(\mathbf{x}) \theta_I(t) \end{cases} \quad (21)$$

将式(21)代入式(19)和式(20),可得耦合热弹性动力学问题的离散控制方程为

$$\mathbf{M}^u \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}^u \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}^u \dot{\theta}(t) = \mathbf{F}^u(t) \quad (22)$$

$$\mathbf{C}^\theta \dot{\theta}(t) + \mathbf{K}^\theta \theta(t) + \mathbf{G}^\theta \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}^\theta(t) \quad (23)$$

式中:

$$\mathbf{M}_{IJ}^u = \int_{\Omega_s^I} \rho N_I N_J d\Omega \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^u = \int_{\Omega_s^I} \mathbf{V}_I \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega \quad (25)$$

$$\mathbf{H}_{IJ}^u = - \int_{\Omega_s^I} \mathbf{W}_I \beta \varphi_J d\Omega \quad (26)$$

$$\mathbf{F}_I^u(t) = \int_{\Gamma_{st}^I} N_I \bar{t}(t) d\Gamma + \int_{\Omega_s^I} N_I \mathbf{b}(t) d\Omega \quad (27)$$

$$\mathbf{C}_{IJ}^\theta = \int_{\Omega_s^I} \alpha N_I \varphi_J d\Omega \quad (28)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^\theta = \int_{\Omega_s^I} k \left(\frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial \varphi_J}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial \varphi_J}{\partial y} \right) d\Omega \quad (29)$$

$$\mathbf{G}_{IJ}^\theta = \int_{\Omega_s^I} N_I \beta \theta_0 \mathbf{P}_J d\Omega \quad (30)$$

$$\mathbf{F}_I^\theta(t) = \int_{\Gamma_{sq}^I} N_I \bar{q}(t) d\Gamma + \int_{\Omega_s^I} N_I Q(t) d\Omega \quad (31)$$

式中:

$$\mathbf{V}_I = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 & N_{I,y} \\ 0 & N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} \varphi_{J,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{J,y} \\ \varphi_{J,y} & \varphi_{J,x} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{W}_I = [N_{I,x} \quad N_{I,y}]^T \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_J = \begin{bmatrix} \varphi_J & 0 \\ 0 & \varphi_J \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{P}_J = [\varphi_{J,x} \quad \varphi_{J,y}] \quad (36)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{plane stress}) \quad (37)$$

$$\beta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \quad (\text{plane stress}) \quad (38)$$

对于平面应变问题,需把 E 换成 $E/(1-\nu^2)$, ν 换成 $\nu/(1-\nu)$, α 换成 $(1+\nu)\alpha$ 。式(22)和式(23)可合并为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{G}^\theta & \mathbf{C}^\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^u & \mathbf{H}^u \\ 0 & \mathbf{K}^\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^u \\ \mathbf{F}^\theta \end{Bmatrix} \quad (39)$$

式(39)即为施加边界条件后的系统耦合微分方程组,可采用 Newmark 方法^[21]进行求解。

3 数值算例

为了验证所提方法的有效性,考虑如图 3 所示的单位面积方板,该问题为平面应变状态下的一个经典算例。初始时刻板的温度和位移均为 0,板上边受到突加的热载荷,另外 3 边均绝热,且无法向位移。弹性模量 $E=1$,泊松比 $\nu=0.3$,导热系数 $k=1$,密度 $\rho=1$,比热容 $c=1$,热膨胀系数 $\alpha=0.02$ 。计算中,采用 15×15 个节点将方板离散,时间步长取为 2.0×10^{-3} 。

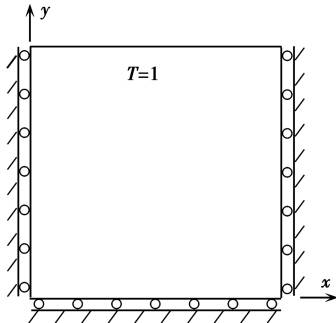


图 3 突加热载荷的方板

Fig. 3 A suddenly heated unit square plate

当不考虑惯性项和耦合项时,此问题属于准静态热弹性力学问题。图 4 和图 5 分别给出了方板 y 轴上不同坐标处的温度和竖向位移变化情况。从图 4 和图 5 可以看出,本文数值解与解析解^[22]吻合得很好。

当考虑惯性项时,为了便于对耦合和非耦合情况下的计算结果进行比较,引入如下修正的耦合系数^[12]

$$\eta = \frac{(1+\nu)\alpha^2 E \theta_0}{(1-\nu)(1-2\nu)\rho c} \quad (40)$$

式中:耦合系数 η 的取值范围一般为 $0.01 \sim 0.2$ 。相关温度取为 $\theta_0 = 100$,则对应的耦合系数为 $\eta = 0.186$ 。图 6 和图 7 分别为 y 轴上不同坐标处耦合

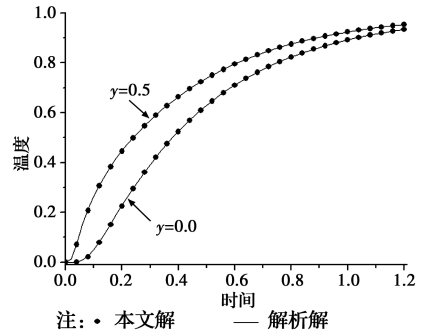


图 4 温度随时间的变化

Fig. 4 Temporal variation of the temperature

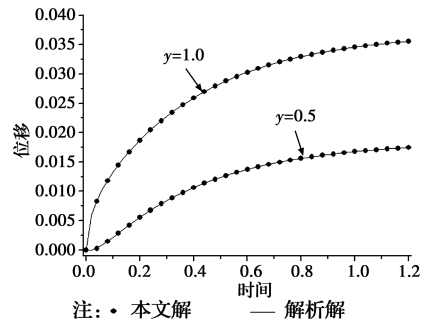


图 5 竖向位移随时间的变化

Fig. 5 Temporal variation of the vertical displacement

项对温度和位移的影响。显然,耦合项对温度的影响很大,但对位移的影响可忽略不计。

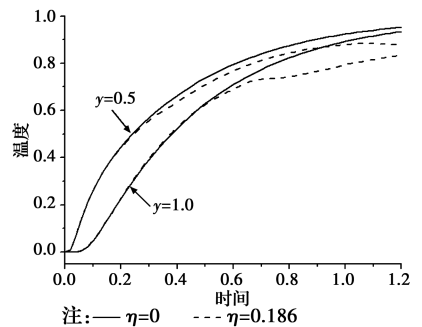


图 6 耦合效应对温度的影响

Fig. 6 Coupling effects on the temperature

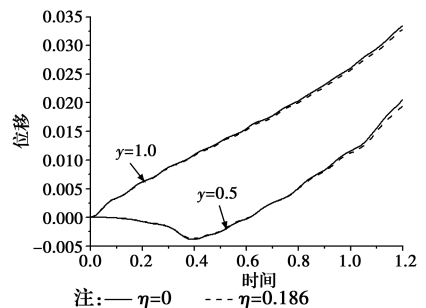


图 7 耦合效应对竖向位移的影响

Fig. 7 Coupling effects on the vertical displacement

4 结论

无网格自然邻接点 Petrov-Galerkin 法是一种简单适用,且效率和精度均十分优良的无网格分析方法。在采用自然邻接点插值对位移和温度分别插值的基础上,将 FEM 三角形线性单元的形函数作为加权函数,采用加权余量法详细推导了二维耦合热弹性动力学问题的无网格自然邻接点 Petrov-Galerkin 法计算公式。数值算例表明,所提的二维耦合热弹性动力学问题求解方法可行。

参考文献:

[1] 严宗达,王洪礼. 热应力[M]. 北京:高等教育出版社,1993.

YAN Z D, WANG H L. Thermal stress [M]. Beijing: Higher Education Press, 1993. (in Chinese)

[2] 王峰,周宜红,郑保敬,等. 基于滑动 Kriging 插值的 MLPG 法求解结构非耦合热应力问题[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(11): 1217-1227.

WANG F, ZHOU Y H, ZHENG B J, et al. A meshless local Petrov-Galerkin method based on the moving Kriging interpolation for structural uncoupled thermal stress analysis [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2016, 37(11): 1217-1227. (in Chinese)

[3] 马玉娥,孙秦. 动态热力耦合精细积分解法研究[J]. 机械强度, 2007, 29(3): 483-486.

MA Y E, SUN Q. Precise time-integration method for dynamic response of thermo-mechanical coupled problem [J]. Journal of Mechanical Strength, 2007, 29(3): 483-486. (in Chinese)

[4] TING E C, CHEN H C. A unified numerical approach for thermal stress waves [J]. Computers & Structures, 1982, 15(2): 165-175.

[5] CANNAROZZI A A, UBERTINI F. A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(4): 717-739.

[6] GAO X W. Boundary element analysis in thermoelasticity with and without internal cells [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57(7): 975-990.

[7] TOSAKA N, SUH I G. Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems [J]. Computational Mechanics, 1991, 8(5): 331-342.

[8] CHEN J, DARGUSH G F. Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analyses [J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, 32(15): 2257-2278.

[9] SLADEK J, SLADEK V, ZHANG C H, et al. Meshless local Petrov-Galerkin method for linear coupled thermoelastic analysis [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2006, 16(1): 57-68.

[10] HOSSEINI S M, SLADEK J, SLADEK V. Meshless local Petrov-Galerkin method for coupled thermoelasticity analysis of a functionally graded thick hollow cylinder [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, 35(6): 827-835.

[11] CHING H K, YEN S C. Meshless local Petrov-Galerkin analysis for 2D functionally graded elastic solids under mechanical and thermal loads [J]. Composites Part B: Engineering, 2005, 36(3): 223-240.

[12] ZHENG B J, GAO X W, YANG K, et al. A novel meshless local Petrov-Galerkin method for dynamic coupled thermoelasticity analysis under thermal and mechanical shock loading [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, 60: 154-161.

[13] 高欣,段庆林,李书卉,等. 裂纹问题的一致性高阶无网格法[J]. 计算力学学报, 2018, 35(3): 275-282.
GAO X, DUAN Q L, LI S H, et al. Consistent high order meshfree method for crack problems [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2018, 35(3): 275-282. (in Chinese)

[14] 王东东,张汉杰,梁庆文. 等几何修正准凸无网格法[J]. 计算力学学报, 2016, 33(4): 605-612.

WANG D D, ZHANG H J, LIANG Q W. Isogeometric refined quasi-convex meshfree method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2016, 33(4): 605-612. (in Chinese)

[15] CAI Y C, ZHU H H. A meshless local natural neighbour interpolation method for stress analysis of solids [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, 28(6): 607-613.

[16] WANG K, ZHOU S J, SHAN G J. The natural neighbour Petrov-Galerkin method for elasto-statics [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 63(8): 1126-1145.

[17] ATLURI S N, ZHU T. A new meshless local petrov-

- galerkin (MLPG) approach in computational mechanics [J]. *Computational Mechanics*, 1998, 22 (2): 117-127.
- [18] 李顺利, 龙述尧, 李光耀, 等. 自然邻接点局部 Petrov-Galerkin 法求解中厚板弯曲问题[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2011, 38(1): 53-57.
LI S L, LONG S Y, LI G Y, et al. Natural neighbor petrov-galerkin method for moderately thick plates [J]. *Journal of Hunan University(Natural Sciences)*, 2011, 38(1): 53-57. (in Chinese)
- [19] 王凯, 周慎杰, 聂志峰, 等. 基于局部自然邻近无网格法的形状优化[J]. *机械工程学报*, 2009, 45(10): 185-191.
WANG K, ZHOU S J, NIE Z F, et al. Shape optimization based on the local natural neighbor Petrov-Galerkin method [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, 45(10): 185-191. (in Chinese)
- [20] 陈莘莘, 李庆华, 刘永胜. 轴对称动力学问题的无网格自然邻接点 Petrov-Galerkin 法 [J]. *振动与冲击*, 2015, 34(3): 61-65.
CHEN S S, LI Q H, LIU Y S. Meshless natural neighbour Petrov-Galerkin method for axisymmetric dynamic problems [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(3): 61-65. (in Chinese)
- [21] 张亚辉, 林家浩. 结构动力学基础[M]. 辽宁大连: 大连理工大学出版社, 2007.
ZHANG Y H, LIN J H. *Fundamentals of structural dynamics* [M]. Dalian, Liaoning: Dalian University of Technology Press, 1993. (in Chinese)
- [22] CARSLAW H S, JAEGER J C. *Conduction of Heat in Solids* [M]. Clarendon: Oxford University Press, 1959.

(编辑 王秀玲)