

Doi: 10.11835/j.issn.2096-6717.2019.142

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



# 任意荷载下连续排水边界分数阶黏弹性地基一维固结模型

王珏<sup>1</sup>, 童立红<sup>1</sup>, 金立<sup>2</sup>, 徐长节<sup>1,3</sup>

(1. 华东交通大学 江西省岩土工程基础设施安全与控制重点实验室, 南昌 330013;  
2. 浙江杭海城际铁路有限公司, 浙江 嘉兴 314000; 3. 浙江大学 滨海和城市岩土研究中心, 杭州 310058)

**摘要:**以基于 Caputo 分数阶导数的弹壶元件修正 Kelvin 模型来描述饱和土体一维固结的力学行为,并引入连续排水边界条件,通过 Laplace 变换,联立求解得到任意荷载下连续排水边界分数阶黏弹性地基有效应力及固结沉降的解析解。采用 Laplace 逆变换,获得了其时域内的理论解,并分析了梯形循环荷载及施工荷载作用下相关参数对固结沉降的影响。研究表明:循环荷载作用下,黏土地基的沉降变化呈振荡增长,且振荡幅值随着边界透水性的增大而增大;分数阶次  $\alpha$  增大,使固结前期沉降速率减慢,而在固结后期, $\alpha$  值对沉降的影响正好相反;循环荷载下沉降变化曲线的振荡幅值随着分数阶次  $\alpha$  的增大而减小。此外,一维固结沉降的发展还与土体力学参数及荷载参数相关,弹性模量  $E$  越大,最终沉降量越小;黏弹性体的延迟时间  $F$  越大,固结沉降变化越慢。

**关键词:**任意荷载;连续排水边界;分数阶导数;黏弹性;一维固结

中图分类号: TU431 文献标志码: A 文章编号: 2096-6717(2020)01-0056-08

## One-dimension consolidation mode of fractional order viscoelastic subgrade with continuous drainage boundary under time-dependent loading

Wang Jue<sup>1</sup>, Tong Lihong<sup>1</sup>, Jin Li<sup>2</sup>, Xu Changjie<sup>1,3</sup>

(1. Jiangxi Key Laboratory of Infrastructure Safety and Control in Geotechnical Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, P. R. China; 2. Zhejiang Hanghai Intercity Railway Co., Ltd, Jiaxing 314000, Zhejiang, P. R. China; 3. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, P. R. China)

**Abstract:** The Kelvin constitutive model is modified by the spring-pot element based on the Caputo fractional derivative to describe the mechanical behavior of one-dimensional consolidation of saturated soil. After introducing the continuous drainage boundary condition, the analytical solutions of the effective stress and the settlement under time-dependent loading are derived by performing Laplace transformation. The Laplace inverse transformation is used to obtain the theoretical solutions in time domain, and the

收稿日期: 2019-05-30

基金项目: 国家自然科学基金(11702095, 51725802); 国家重点基础研究发展计划(2015CB057801); 江西省杰出青年基金(2018ACB21024)

作者简介: 王珏(1995-), 男, 主要从事岩土工程研究, E-mail: juewzj@126.com。

徐长节(通信作者), 教授, 博士生导师, E-mail: xucj@zju.edu.cn。

Received: 2019-05-30

**Foundation items:** National Natural Science Foundation of China (No. 11702095, 51725802); The Major State Basic Research Development Program of China (No. 2015CB057801); Jiangxi Science Fund for Distinguished Young Scholars (No. 2018ACB21024)

**Author brief:** Wang Jue (1995-), main research interest: geotechnical engineering, E-mail: juewzj@126.com.  
Xu Changjie (corresponding author), professor, doctoral supervisor, E-mail: xucj@zju.edu.cn.

influences of relevant parameters on the settlement under trapezoidal cyclic loading and construction loading are studied. The results show that the settlement of viscoelastic soil under cyclic loading increases in an oscillating manner, and the amplitude of the oscillation increases with the boundary permeability. A higher value of the fractional order  $\alpha$  slows the development of settlement in the early stage of consolidation. However, in the later stage of consolidation, the effect of  $\alpha$  on settlement is reversed. The oscillation amplitude of the settlement under cyclic loading decreases with increase of  $\alpha$ . Furthermore, detailed analysis indicates that the development of one-dimensional consolidation settlement is also related to mechanical properties of soil and loading parameters. The larger the elastic modulus  $E$  is, the smaller the final settlement, and the greater the delay time of viscoelastic is, the slower the settlement occurs.

**Keywords:** time-dependent loading; continuous drainage boundary; fractional order derivative; viscoelastic; one-dimensional consolidation

在 Terzaghi 固结理论中,土体被处理为线弹性模型,而流变特性是软土的一种重要的工程特性<sup>[1]</sup>。因此,考虑软黏土的流变特性,将土体视为黏弹性介质通常更符合实际工程<sup>[2]</sup>。Taylor 等<sup>[3]</sup>首先引入 Kelvin 模型来描述土骨架的黏弹性变形;Tan<sup>[4]</sup>基于 Maxwell 模型对受侧限土体的固结和滞流进行了研究。此后,金问鲁等<sup>[5]</sup>提出了固结方程的一个近似解法,并给出了各种条件下简单问题的解答;赵维炳<sup>[6]</sup>基于广义 Voigt 模型,推导了饱和土体一维固结问题的普遍理论解答;Xie 等<sup>[7-8]</sup>引入 Merchant 模型及四元件模型到固结理论中,分析了软黏土的固结特性;蔡袁强等<sup>[9]</sup>求解了任意荷载下成层粘弹性地基一维变形问题。然而,上述经典流变模型不能很好地与实验数据相吻合<sup>[10]</sup>,主要是由于整数阶微分算子的性质决定了经典流变模型的核函数通常是指指数函数的组合,欲精确描述实验数据,常常不得不取消高阶的微分项或者以降低本构模型的应用范围为代价<sup>[11]</sup>。

Gement<sup>[12]</sup>首先提出了黏弹性材料的分数阶导数本构模型,而后一些学者将其引入到固结理论中,并指出分数阶导数流变模型可以有效克服经典模型的缺点。Koeller<sup>[13]</sup>用基于分数导数的弹壶元件替换牛顿黏壶,研究分析了多种模型的流变特性;孙海忠等<sup>[14]</sup>采用含分数导数的 Kelvin 模型对珠江三角洲南沙地区典型软土的流变试验数据进行拟合,得到很好的结果;Yin 等<sup>[15]</sup>对分数阶软土蠕变过程中的力学性能进行了系统的研究;汪磊等<sup>[16]</sup>基于分数阶导数理论引入 Kelvin-Voigt 模型,获得了任意荷载情况下一维固结问题的半解析解;刘忠玉等<sup>[17]</sup>求得了恒载下基于分数阶 Kelvin 模型饱和软黏土一维固结理论解,并通过对比一维流变固结试验曲线及整数阶模型理论曲线,指出基于分数阶 Kelvin 模型模拟的孔压消散曲线更接近试验曲线。

另一方面,实际工程中土体的边界往往是处于

透水与不透水之间的一种中间状态<sup>[18]</sup>。蔡袁强等<sup>[19]</sup>、汪磊等<sup>[20]</sup>研究了半透水边界条件下一维固结问题。但是半透水边界计算相对复杂,且不能严格满足初始条件,限制了土体固结方程解的适用性<sup>[21]</sup>。基于此,梅国雄等<sup>[18]</sup>提出了一个从不透水到透水的双面不对称连续排水边界。目前,关于变荷载、连续排水边界及分数阶导数黏弹性模型耦合的一维固结理论分析很少见诸于文献。笔者针对 Caputo 分数阶导数的弹壶元件修正 Kelvin 模型黏弹性地基,引入连续排水边界条件,推导了任意荷载下连续排水边界分数阶黏弹性地基一维固结方程的半解析解,并分析了相关参数对软黏土固结沉降特性的影响。

## 1 Caputo 分数阶导数修正 Kelvin 模型

在分数阶导数流变模型中运用最为普遍的是 Riemann-Liouville (R-L) 型分数阶微积分算子理论<sup>[16]</sup>,但 R-L 分数导数在初始点处无物理意义,而 Caputo 分数导数则克服了这个缺点,其定义为<sup>[17]</sup>

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{df(\tau)}{d\tau} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (1)$$

式中: $\alpha$  为分数导数的阶数; $\Gamma(x)$  为 Gamma 函数,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt。$$

Caputo 分数导数的 Laplace 变换为

$$L[D_t^\alpha f(t)] = s^\alpha \bar{f}(s) - s^{\alpha-1} f(0) \quad (2)$$

式中: $\bar{f}(s)$  为函数  $f(t)$  的 Laplace 变换; $s$  为变换参量。

用基于分数阶导数定义的弹壶元件<sup>[13]</sup>替换经典 Kelvin 模型中的牛顿黏壶得到修正的 Kelvin 模型,如图 1,其微分型本构方程为

$$\sigma'(z, t) = E\varepsilon(z, t) + EF^\alpha D_t^\alpha \varepsilon(z, t) \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (3)$$

式中: $\sigma'(z, t)$  为深度  $z$  处  $t$  时刻相对于初始有效应

力的增量(简称有效应力); $\epsilon(z, t)$ 为相应的应变; $E$ 为弹性模量; $F = \eta/E$ ,为黏弹性体的延迟时间; $\eta$ 为黏滞系数。当  $\eta = 0$  时,即为 Terzaghi 一维固结理论的弹性模型。当  $\alpha = 1$  时,该模型退化为经典的 Kelvin 模型;当  $\alpha = 0$  时,可退化为两个弹簧元件并联的线弹性模型。在实际工程计算中,可采取拟合土样固结实验数据的方法得到  $\alpha$  的值。

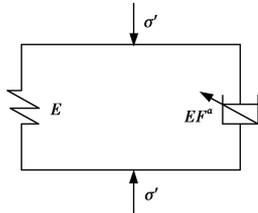


图 1 修正的 Kelvin 模型  
Fig.1 Modified Kelvin's model

## 2 流变固结方程的建立及求解

任意荷载下连续排水边界条件土体固结计算简图如图 2 所示。图中  $p(t)$  为随时间变化的任意荷载; $H$  为土层厚度; $k_v$  为渗透系数; $C_v$  为固结系数。假设土体完全饱和,孔隙水以及土颗粒都不可压缩,且仅发生竖向渗流和变形。以修正 Kelvin 模型(即式(3))描述土体的变形,假定渗流符合 Darcy 定律,且渗透系数  $k_v$  为常数。

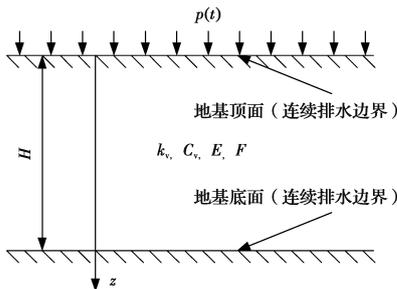


图 2 土体固结模型示意图  
Fig.2 Schematic of soil consolidation model

根据有效应力原理可得土体的有效应力为

$$\sigma'(z, t) = p(t) - u(z, t) \quad (4)$$

式中: $u(z, t)$ 为超孔隙水压力。

土体的一维固结微分方程可表示为

$$\frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = - \frac{\partial \epsilon(z, t)}{\partial t} \quad (5)$$

式中: $\gamma_w$  为水的容重。

将式(4)代入式(5)进行 Laplace 变换可得

$$\frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{\sigma}'(z, s)}{\partial z^2} = s\bar{\epsilon}(z, s) - \epsilon(z, 0) \quad (6)$$

式中: $\bar{\sigma}'(z, s)$ 、 $\bar{\epsilon}(z, s)$ 分别为  $\sigma'(z, t)$  和  $\epsilon(z, t)$  的 Laplace 变换。将式(3)进行 Laplace 变换可得

$$\bar{\sigma}'(z, s) = E\bar{\epsilon}(z, s) + EF^\alpha [s^\alpha \bar{\epsilon}(z, s) - s^{\alpha-1} \epsilon(z, 0)] \quad (7)$$

联合式(6)、式(7)可得流变固结方程

$$\frac{\partial^2 \bar{\sigma}'(z, s)}{\partial z^2} = \frac{s[\bar{\sigma}'(z, s)] + EF^\alpha s^{\alpha-1} \epsilon(z, 0)}{C_v(F^\alpha s^\alpha + 1)} - \epsilon(z, 0) \quad (8)$$

式中: $C_v = k_v E / \gamma_w$ ,为固结系数。

式(8)的初始条件以及边界条件为

$$\bar{\sigma}'(z, 0) = \epsilon(z, 0) = 0, 0 \leq z \leq H \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}'(0, t) = p(t) - p(t)e^{-bt}, t > 0 \quad (10)$$

$$\bar{\sigma}'(H, t) = p(t) - p(t)e^{-ct}, t > 0 \quad (11)$$

式中: $b, c$  为透水性影响因子,可通过试验模拟或工程实测反演得出。当  $b, c$  趋于无穷大时,即为完全透水边界,当  $b, c$  趋于 0 时,即为不透水边界。

将式(9)代入式(8),可化简为

$$\frac{\partial^2 \bar{\sigma}'(z, s)}{\partial z^2} - \beta \bar{\sigma}'(z, s) = 0 \quad (12)$$

式中: $\beta = s/[C_v(F^\alpha s^\alpha + 1)]$ 。对于定解条件式(12),可设解的形式为

$$\bar{\sigma}'(z, s) = C_1 e^{\varphi z} + C_2 e^{-\varphi z} \quad (13)$$

式中: $\varphi = \sqrt{\beta}$ 。将式(10)、式(11)进行 Laplace 变换后代入式(13)求得系数  $C_1, C_2$  为

$$C_1 = \frac{\bar{p}(s) - \bar{p}(s+c) - (\bar{p}(s) - \bar{p}(s+b))e^{-\varphi H}}{e^{\varphi H} - e^{-\varphi H}} \quad (14)$$

$$C_2 = \frac{(\bar{p}(s) - \bar{p}(s+b))e^{\varphi H} - \bar{p}(s) + \bar{p}(s+c)}{e^{\varphi H} - e^{-\varphi H}} \quad (15)$$

式中: $\bar{p}(s)$ 、 $\bar{p}(s+b)$  和  $\bar{p}(s+c)$  分别为  $p(t)$ 、 $p(t)e^{-bt}$  和  $p(t)e^{-ct}$  的 Laplace 变换。

将式(14)、式(15)代入式(13)可得任意荷载下有效应力的通解

$$\bar{\sigma}'(z, s) = \frac{\left\{ \begin{aligned} & [\bar{p} - \bar{p}(s+c)] \sin h(\varphi z) + \\ & [\bar{p} - \bar{p}(s+b)] \sin h[\varphi(H-z)] \end{aligned} \right\}}{\sin h(\varphi H)} \quad (16)$$

连续排水边界下分数阶黏弹性一维流变固结理论沉降量计算为

$$w(t) = \int_0^H \epsilon(z, t) dz \quad (17)$$

将式(17)进行 Laplace 变换可得

$$\bar{w}(s) = \int_0^H \bar{\epsilon}(z, s) dz \quad (18)$$

将式(7)代入式(18)可得

$$\begin{aligned} \bar{w}(s) &= \int_0^H \frac{\bar{\sigma}(z, s)}{E + EF^\alpha s^\alpha} dz \\ &= \frac{[2\bar{p}(s) - \bar{p}(s+b) - \bar{p}(s+c)] \tan h \frac{H\varphi}{2}}{\varphi E (1 + F^\alpha s^\alpha)} \end{aligned} \quad (19)$$

方程(19)即是所要计算的沉降变形。

### 3 算例验证及参数分析

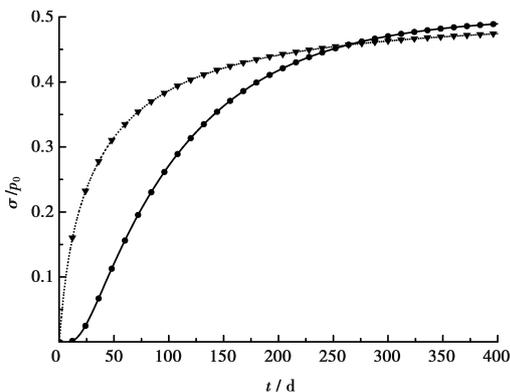
对于数值 Laplace 逆变换,目前,已提出多种反演方法,经过对比分析,采用 Durbin<sup>[22]</sup>基于 Fourier 级数展开的 Laplace 数值逆变换求解式

$$f(t) = \frac{2e^{at}}{T_1} \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(a)\} + \sum_{k=0}^N \left[ \operatorname{Re}\left\{F\left(a + ik \frac{2\pi}{T_1}\right)\right\} \cos k \frac{2\pi}{T_1} t - \operatorname{Im}\left\{F\left(a + ik \frac{2\pi}{T_1}\right)\right\} \sin k \frac{2\pi}{T_1} t \right] \right] \quad (20)$$

式中: $a$ 、 $T_1$  ( $T_1 > t_{\max}$ ) 为求解参数; $t_{\max}$  为最大计算时间; $N$  为级数截取项数; $i$  为虚数单位。

#### 3.1 算例验证

某 5 m 厚单层黏弹性地基,其力学参数为  $k_v = 5 \times 10^{-1}$  m/s,  $E = 6$  MPa,  $\eta = 10^8$  MPa · s。荷载形式为骤加恒载  $p(t) = p_0/2$ ,其 Laplace 变换为  $\bar{p}(s) = p_0/(2s)$ ,代入式(16),通过编制相应的计算程序反复试算,选取  $T_1 = 2t_{\max}$ 、 $a = 10/T_1$ 、 $N = 20\ 000$  就足够满足精度要求,并将其计算结果与 Terzaghi 经典固结理论解及文献<sup>[17]</sup>进行对比(如图 3)。从图 3 可以看出,当  $b$ 、 $c$  趋于无穷大时,可退化为双面完全透水边界,  $\eta = 0$  时,该方法数值解与 Terzaghi 经典固结理论解完全一致,  $\alpha = 0.5$  时,该方法解与文献<sup>[17]</sup>的解完全一致,验证了该解答的正确性及计算程序的收敛性。在固结前期,弹壶的存在使黏弹性地基的有效应力增长明显加快,而在固结后期有效应力增长减慢,最终固结达到稳定的时间要长于弹性地基。



注: — Terzaghi 经典固结理论解  
 • 本文方法解 ( $\eta=0, b, c \rightarrow \infty$ )  
 ..... 文献[17]解 ( $\alpha=0.5$ )  
 ▼ 本文方法解 ( $\alpha=0.5, b, c \rightarrow \infty$ )

图 3  $z = 2.5$  m 处有效应力比随时间的变化

Fig.3 Effective stress ratio versus time ( $z = 2.5$  m)

#### 3.2 参数分析

为进一步考察推导出的任意荷载下连续排水边界分数阶黏弹性地基固结沉降解的适用性,并分析相关参数对其固结沉降的影响,采用上述算例中的土体力学参数,以常见的梯形循环荷载及施工荷载为例进行讨论。

3.2.1 梯形循环荷载 梯形循环荷载如图 4 所示,其傅里叶级数形式为

$$p(t) = \frac{p_0}{2} + \frac{2p_0}{\lambda\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^2} \sin(\lambda m) \sin[m(\omega t - \lambda)] \right\} \quad (21)$$

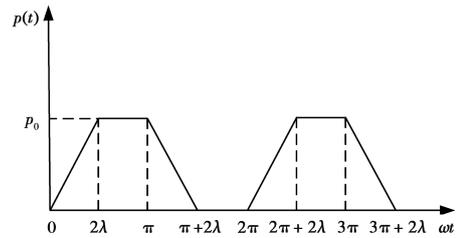


图 4 梯形循环荷载

Fig.4 Trapezoidal cyclic loading

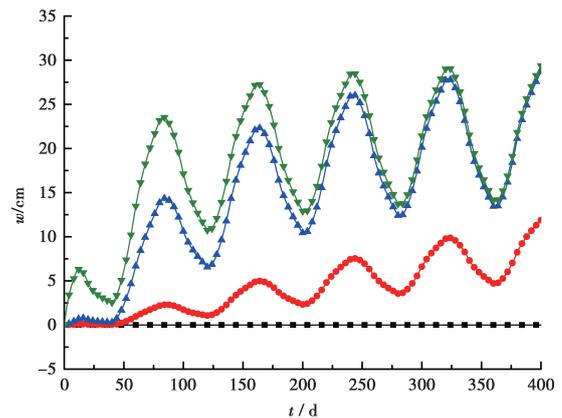
将式(21)进行 Laplace 变换可得

$$\bar{p}(s) = \frac{p_0}{2s} + \frac{2p_0}{\lambda\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{\omega \sin(\lambda m)}{ms^2 + m^3 \omega^2} e^{-\lambda s/\omega} \right] \quad (22)$$

式中: $\omega = \pi/T$ ,  $T$  为循环荷载的半周期; $\lambda$  为梯形循环荷载的加载系数,  $0 < \lambda \leq \pi/2$ 。当  $\lambda \rightarrow 0$  时可退化为矩形循环荷载,当  $\lambda = \pi/2$  时可退化为三角形循环荷载。将式(22)代入式(19)即可得到梯形循环荷载下连续排水边界分数阶黏弹性地基一维固结沉降解。取分数阶次  $\alpha = 0.1$ 、 $p_0 = 1$  MPa,半周期  $T = 40$  d,加载系数  $\lambda = \pi/4$ 。

1) 透水性影响因子  $b$ 、 $c$

图 5 为梯形循环荷载下  $b$ 、 $c$  取不同值时对黏弹性地基固结沉降的影响。由图 5 可知,当  $b$ 、 $c$  都等



注: —  $b=c=0$       —  $b=0.002/d, c=0.001/d$   
 —  $b=0.02/d, c=0.01/d$       —  $b=2/d, c=1/d$

图 5 不同  $b$  和  $c$  时沉降变化曲线 ( $\alpha=0.1$ )

Fig.5 Settlement curves with different  $b$  and  $c$  ( $\alpha=0.1$ )

于 0 时,土层上下边界都不排水,外荷载全部转化为孔隙水压力,固结沉降量恒为 0;在循环荷载作用下,地基沉降呈振荡增长,但并非随荷载的变化同时发生,而是滞后于循环荷载的变化;影响因子  $b$ 、 $c$  越大时,即边界透水性越好时,固结沉降速率越快,沉降达到稳定的时间越短,并且其振荡幅值随着  $b$ 、 $c$  的增大而增大。实际工程中,针对不同边界透水性的工况可以通过调整参数  $b$  和  $c$  来近似模拟实际土层的非对称排水固结特性。

### 2) 分数阶次 $\alpha$

透水性影响因子  $b=0.03/d$ 、 $c=0.02/d$  时,不同分数阶次  $\alpha$  对固结沉降的影响如图 6 所示。 $\alpha$  描述了材料的多种流动状态性质,具有一定的物理意义<sup>[16]</sup>。从图 6 可以看出,当其他参数不变时, $\alpha$  越大,固结沉降发展速率越慢,但随着时间延长,情况则正好相反,即  $\alpha$  越小,固结沉降越慢,这与文献<sup>[17]</sup>恒载条件下的规律一致。由此可见,最终固结沉降达到稳定的时间随着  $\alpha$  的增大而缩短。另外,随着分数阶次  $\alpha$  的增大,理论沉降曲线的振荡幅值明显减小,土体对外加荷载变化的敏感程度减小。

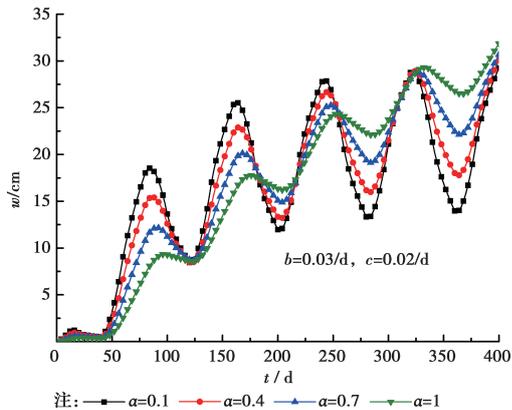


图 6 不同分数阶次  $\alpha$  的沉降变化曲线

Fig.6 Settlement curves with different fractional order  $\alpha$

### 3) 半周期 $T$ 及加载系数 $\lambda$

图 7、图 8 分别为透水性影响因子  $b=0.03/d$ 、 $c=0.02/d$  时,梯形循环荷载的半周期  $T$  及加载系数  $\lambda$  对固结沉降的影响, $\lambda=\pi/2$  时,即为三角形循环荷载。分析图 7 可知,梯形循环荷载的周期越大,分数阶黏弹性饱和土体一维固结沉降发展变化越明显,振荡幅值越大。从图 8 可以看出,加载系数  $\lambda$  越大,即梯形荷载加载阶段速率越慢,在固结初期,其沉降量反而越大,随着时间的延长,加载系数  $\lambda$  越大,沉降发展速率越慢,波动性也越小。

### 4) 弹性模量 $E$ 及黏弹性体的延迟时间 $F$

考察土体力学参数弹性模量  $E$  及黏弹性体的延迟时间  $F$  对固结沉降的影响,结果如图 9、图 10

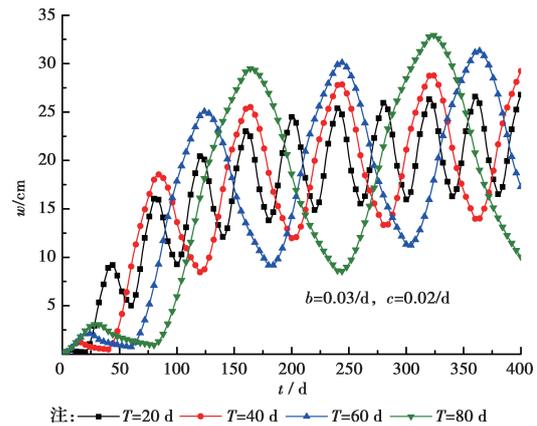


图 7 不同半周期  $T$  的沉降变化曲线 ( $\alpha=0.1$ )

Fig.7 Settlement curves with different cyclic loading parameter  $T$  ( $\alpha=0.1$ )

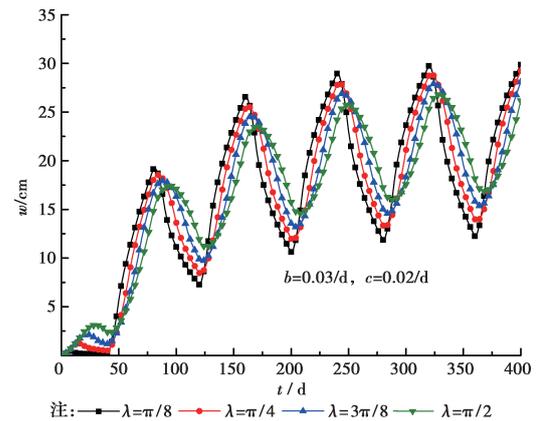


图 8 不同加载系数  $\lambda$  的沉降变化曲线 ( $\alpha=0.1$ )

Fig.8 Settlement curves with different cyclic loading parameter  $\lambda$  ( $\alpha=0.1$ )

所示。分析图 9 可知,由于弹性模量直接影响土体的压缩性,弹性模量越大,土体越难被压缩,最终沉降量越小,固结沉降达到稳定的时间越短,图中体现为随着弹性模量  $E$  的增大沉降变化曲线越来越早的趋于稳定波动状态。此外,弹性模量  $E$  越大,循环荷载下固结沉降的振荡幅值越小。从图 10 可以看出,由于边界透水性较差,当其他土体参数不变时,黏弹性体的延迟时间  $F$  对固结沉降的影响主要体现在固结中、后期,黏弹性体的延迟时间  $F$  越大,即黏滞系数  $\eta$  越大,固结沉降速率越慢,循环荷载下分数阶黏弹性饱和土体达到最终沉降稳定所需的时间越长。

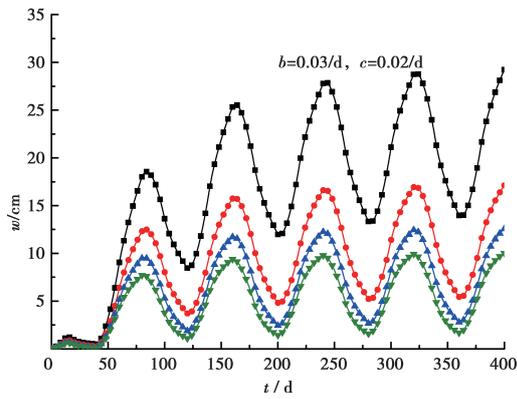
3.2.2 施工荷载 如图 11 所示,施工荷载形式可表示为

$$p(t) = \begin{cases} \frac{p_0}{2D}t & 0 < t < D \\ p_0/2 & t \geq 0 \end{cases} \quad (23)$$

式中: $D$  为施工期加载时间。

对式(23)作 Laplace 变换得

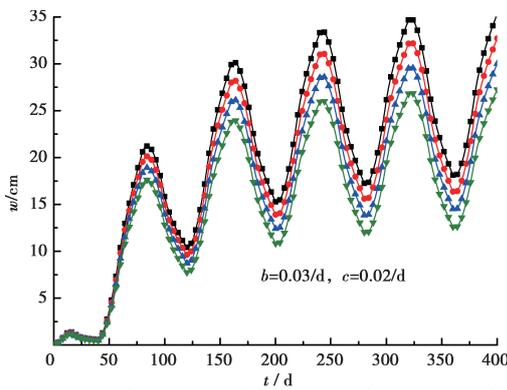
$$\bar{p}(s) = \frac{p_0}{2D_s^2}(1 - e^{-sD}) \quad (24)$$



注: —  $E=6$  MPa —  $E=12$  MPa —  $E=18$  MPa —  $E=24$  MPa

图 9 不同弹性模量  $E$  的沉降变化曲线 ( $\alpha=0.1$ )

Fig.9 Settlement curves with different elastic modulus  $E$  ( $\alpha=0.1$ )



注: —  $F=10^0$  d —  $F=10^1$  d —  $F=10^2$  d —  $F=10^3$  d

图 10 不同黏弹性体的延迟时间  $F$  的沉降变化曲线 ( $\alpha=0.1$ )

Fig.10 Settlement curves with different viscoelastic delay time  $F$  ( $\alpha=0.1$ )

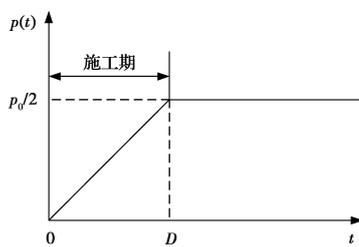
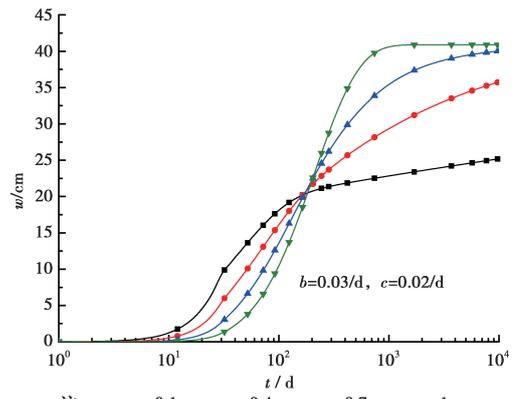


图 11 施工荷载

Fig.11 Construction loading

取  $b=0.03/d, c=0.02/d, p_0=1$  MPa, 分析施工荷载下分数阶次  $\alpha$  及施工期加载时间  $D$  对固结沉降的影响, 如图 12、图 13 所示。

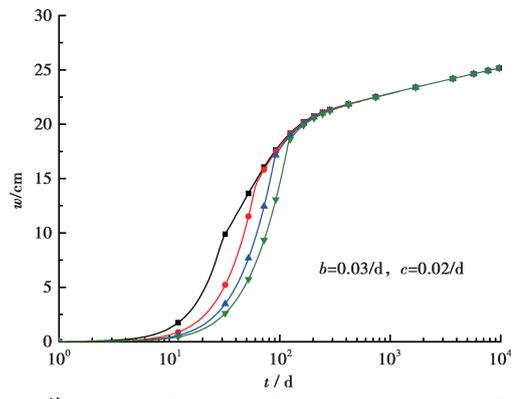
由图 12 可知, 在固结前期, 施工荷载下分数阶黏弹性地基固结沉降的发展速率随着  $\alpha$  的增大而减慢, 而在固结后期,  $\alpha$  增大使固结沉降增长加快, 达到最终沉降量的时间减短。从图 13 可以看出, 其他参数不变时, 施工期加载时间  $D$  越大, 即施工速率越慢, 固结沉降变化越慢, 但由于最终荷载不变, 施工期结束后, 沉降变化曲线最终一致。



注: —  $\alpha=0.1$  —  $\alpha=0.4$  —  $\alpha=0.7$  —  $\alpha=1$

图 12 不同分数阶次  $\alpha$  的沉降变化曲线 ( $D=30$  d)

Fig.12 Settlement curves with different fractional order  $\alpha$  ( $D=30$  d)



注: —  $D=30$  d —  $D=60$  d —  $D=90$  d —  $D=120$  d

图 13 不同施工期加载时间  $D$  的沉降变化曲线 ( $\alpha=0.1$ )

Fig.13 Settlement curves with different construction loading parameter  $D$  ( $\alpha=0.1$ )

## 4 结论

基于 Caputo 分数阶导数的弹壶元件修正 Kelvin 模型, 引入连续排水边界条件, 利用 Laplace 变换求得考虑连续排水边界条件时分数阶导数黏弹性地基在任意随时间变化的荷载下有效应力及沉降的解析解, 运用 Laplace 逆变换得到其时域内的数值解。通过系统的算例分析, 可以得到如下结论:

1) 循环荷载作用下, 黏土地基的沉降变化呈振荡增长, 但滞后于荷载的变化, 且振荡幅值随着边界透水性的增大而增大。

2) 分数阶次  $\alpha$  增大, 使固结前期沉降发展速率减慢, 但在固结后期,  $\alpha$  值对沉降的影响正好相反, 最终固结沉降达到稳定的时间随着  $\alpha$  的增大而缩短。另外, 随着分数阶次  $\alpha$  的增大, 循环荷载下沉降变化曲线的振荡幅值明显减小。

3) 分数阶黏弹性地基一维固结沉降的发展还与土体力学参数及荷载参数相关。弹性模量  $E$  越大,

最终沉降量越小,固结沉降达到稳定的时间越短,且循环荷载下固结沉降的振荡幅值越小;黏弹性体的延迟时间  $F$  越大,固结沉降变化速率越慢。

### 参考文献:

- [1] 潘晓东, 蔡袁强, 徐长节, 等. 循环荷载下黏弹性饱和土层的一维固结[J]. 岩土力学, 2006, 27(2): 272-276. PAN X D, CAI Y Q, XU C J, et al. One-dimensional consolidation of viscoelastic soil layer under cyclic loading [J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(2): 272-276.(in Chinese)
- [2] 解益, 李培超, 汪磊, 等. 分数阶导数黏弹性饱和土体一维固结半解析解[J]. 岩土力学, 2017, 38(11): 3240-3246. XIE Y, LI P C, WANG L, et al. Semi-analytical solution for one-dimensional consolidation of viscoelastic saturated soil with fractional order derivative [J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(11): 3240-3246.(in Chinese)
- [3] TAYLOR D W, MERCHANT W. A theory of clay consolidation accounting for secondary compression [J]. Journal of Mathematics and Physics, 1940, 19(1-4): 167-185.
- [4] TAN T K. Secondary time effects and consolidation of clays [J]. Science China Mathematics, 1958, 1(11): 1060-1075.
- [5] 金向鲁, 门福录. 粘土固结与次时间效应单维问题的近似解[J]. 水利学报, 1964(2): 69-74. JIN W L, MENG F L. An approximate solution to the unidimensional problem of clay consolidation and sub-time effects [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1964(2): 69-74.(in Chinese)
- [6] 赵维炳. 广义 Voigt 模型模拟的饱水土体一维固结理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1989, 11(5): 78-85. ZHAO W B. Gen-dimensional consolidation theory of saturated soil with generalized Voigt model simulation and its application [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1989, 11(5): 78-85.(in Chinese)
- [7] XIE K H, LIU X W. A study on one dimensional consolidation of soils exhibiting rheological characteristics [C]// Proceedings of International Symposium on Compression and Consolidation of Clayey Soils, Rotterdam, 1995: 388.
- [8] XIE K H, XIE X Y, LI X B. Analytical theory for one-dimensional consolidation of clayey soils exhibiting rheological characteristics under time-dependent loading [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2008, 32(14): 1833-1855.
- [9] 蔡袁强, 徐长节, 袁海明. 任意荷载下成层粘弹性地基的一维固结[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(3): 307-313. CAI Y Q, XU C J, YUAN H M. One-dimensional consolidation of layered viscoelastic foundations under arbitrary loading [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(3): 307-313.(in Chinese)
- [10] 张为民. 一种采用分数阶导数的新流变模型理论[J]. 湘潭大学(自然科学学报), 2001, 23(1): 30-36. ZHANG W M. A new rheological model theory with fractional order derivative [J]. Natural Science Journal of Xiangtan University, 2001, 23(1): 30-36. (in Chinese)
- [11] 刘林超, 张卫. 具有分数 Kelvin 模型的粘弹性岩体中水平圆形洞室的变形特性[J]. 岩土力学, 2005, 26(2): 121-123. LIU L C, ZHANG W. Deformation properties of horizontal round adits in viscoelastic rocks with fractional Kelvin model [J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(2): 121-123.(in Chinese)
- [12] GEMANT A. A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies [J]. Physics, 1936, 7(8): 311-317.
- [13] KOELLER R C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51(2): 299-307.
- [14] 孙海忠, 张卫. 一种分析软土黏弹性的分数阶 Kelvin 模型[J]. 岩土力学, 2007, 28(9): 1983-1986. SUN H Z, ZHANG W. Analysis of soft soil with viscoelastic fractional derivative Kelvin model [J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(9): 1983-1986.(in Chinese)
- [15] YIN D S, LI Y Q, WU H, et al. Fractional description of mechanical property evolution of soft soils during creep [J]. Water Science and Engineering, 2013, 6(4): 446-455.
- [16] 汪磊, 孙德安, 解益, 等. 任意荷载下分数阶导数黏弹性饱和土体一维固结[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(10): 1823-1831. WANG L, SUN D A, XIE Y, et al. One-dimensional consolidation of fractional order derivative viscoelastic saturated soils under arbitrary loading [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(10): 1823-1831. (in Chinese)
- [17] 刘忠玉, 杨强. 基于分数阶 Kelvin 模型的饱和黏土一维流变固结分析[J]. 岩土力学, 2017, 38(12): 3680-3687, 3697. LIU Z Y, YANG Q. One-dimensional rheological consolidation analysis of saturated clay using fractional order Kelvin's model [J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(12): 3680-3687, 3697.(in Chinese)

- [18] 梅国雄, 夏君, 梅岭. 基于不对称连续排水边界的太沙基一维固结方程及其解答[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(1): 28-31.  
MEI G X, XIA J, MEI L. Terzaghi's one-dimensional consolidation equation and its solution based on asymmetric continuous drainage boundary [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(1): 28-31.(in Chinese)
- [19] 蔡袁强, 梁旭, 郑灶锋, 等. 半透水边界的粘弹性土层在循环荷载下的一维固结[J]. 土木工程学报, 2003, 36(8): 90-94.  
CAI Y Q, LIANG X, ZHENG Z F, et al. One-dimensional consolidation of viscoelastic soil layer with semi-permeable boundary under cyclic loadings [J]. Chinese Journal of Civil Engineering, 2003, 36(8): 86-90.(in Chinese)
- [20] 汪磊, 李林忠, 徐永福, 等. 半透水边界下分数阶黏弹性饱和土一维固结特性分析[J]. 岩土力学, 2018, 39(11): 4142-4148.  
WANG L, LI L Z, XU Y F, et al. Analysis of one - dimensional consolidation of fractional viscoelastic saturated soils with semi-permeable boundary [J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(11): 4142-4148. (in Chinese)
- [21] 宋剑鹏, 谢晨, 朱洵, 等. 广义透水边界下坝基非线性一维固结分析[J]. 人民黄河, 2018, 40(9): 100-103, 107.  
SONG J P, XIE C, ZHU X, et al. Generalized drainage boundary applied in dam foundation with one-dimensional non-linear consolidation [J]. Yellow River, 2018, 40(9): 100-103, 107.(in Chinese)
- [22] DURBIN F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method [J]. The Computer Journal, 1974, 17(4): 371-376.

(编辑 胡玲)