

doi:10.11835/j.issn.2096-6717.2020.007

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



不同随机场模拟对斜坡失稳风险评估结果的影响

李丞^{1,2}, 苏立君^{1,2,3}

(1. 中国科学院山地灾害与地表过程重点实验室; 中国科学院、水利部成都山地灾害与环境研究所, 成都 610041;
2. 中国科学院大学, 北京 100049; 3. 中国科学院青藏高原地球科学卓越创新中心, 北京 100101)

摘要:使用不确定性分析方法定量评估斜坡失稳风险结果受到学者们的日益重视。针对现有斜坡失稳风险评估中仅采用平稳随机场模拟土体抗剪强度参数分布特征的问题,以一不排水饱和粘土斜坡为例,结合有限元极限分析、强度折减法和蒙特卡洛模拟,讨论了使用非平稳随机场模型和平稳随机场模型模拟土体抗剪强度参数对计算斜坡失稳风险评估结果的影响。结果表明:使用传统的平稳随机场计算斜坡失稳风险的方法会高估斜坡失稳风险,使工程造价增加;安全系数高的斜坡滑面不一定是浅层滑面;斜坡竖直相关距离对采用非平稳随机场计算其失稳风险结果影响较小,而斜坡竖直相关距离对采用平稳随机场计算其失稳风险结果影响显著;斜坡竖直相关距离对滑动面位置和形状的影响较弱。

关键词:斜坡;随机场;蒙特卡洛模拟;可靠度;风险评估

中图分类号: TU457 **文献标志码:** A **文章编号:** 2096-6717(2020)03-0017-07

Influence of different random field simulation on the results of slope failure risk assessment

Li Cheng^{1,2}, Su Lijun^{1,2,3}

(1. Key Laboratory of Mountain Hazards and Earth Surface Process, Chinese Academy of Sciences; Institute of Mountain Hazards and Environment, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610041, P. R. China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, P. R. China; 3. Center for Excellence in Tibetan Plateau Earth Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, P. R. China)

Abstract: More and more attention has been paid to the results of quantitative assessment of slope failure risk by using uncertainty analysis method. In view of the problem that only stationary random field was used to simulate the distribution characteristics of shear strength parameters in the existing risk assessment of slope failure, in this paper, taking an undrained saturated clay slope as an example, combined with finite element limit analysis, strength reduction method and Monte Carlo simulation, the influence of shear strength parameters of soil simulated by non-stationary random field model and stable random field model on Calculation of slope instability risk assessment results were discussed. The results show that the

收稿日期: 2019-10-14

基金项目: 国家自然科学基金(41790432, 41761144077)

作者简介: 李丞(1990-), 男, 博士生, 主要从事山地灾害危险性分析研究, E-mail: lichen_200@126.com.

苏立君(通信作者), 男, 研究员, 博士生导师, E-mail: sulijun1976@163.com.

Received: 2019-10-14

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (No. 41790432, 41761144077)

Author brief: Li Cheng (1990-), PhD candidate, main research interest: risk analysis of mountain hazards, E-mail: lichen_200@126.com.

Su Lijun (corresponding author), professor, doctoral supervisor, E-mail: sulijun1976@163.com.

traditional method of calculating the risk of slope failure by using stationary random field will overestimate the risk of slope failure, which will increase the project cost. The slip surface of slope with high safety factor is not necessarily a shallow slip surface. The vertical correlation distance of slope has little influence on the calculation of its failure risk by using non-stationary random field, while the vertical correlation distance of slope has significant influence on the calculation of its failure risk by using stationary random field. The influence of vertical correlation distance on position and shape of sliding surface is weak. The research results can provide guidance for the accurate evaluation of slope stability.

Keywords: slope; random field; Monte Carlo simulation; reliability; risk assessment

已有研究表明^[1-3],土体参数空间变异性对斜坡稳定性影响显著。通常,斜坡滑动面倾向于寻找最不利的失稳路径,这些滑动面不仅存在一定的空间变异性,而且相互之间具有相关性,因此,斜坡存在多种滑动面形式^[1-2]。从工程角度来看,不仅要考虑斜坡的稳定性,还应考虑斜坡的失稳后果,若不考虑滑动面间相关性的影响,就会高估斜坡的失稳风险^[3]。近年来,斜坡失稳风险评价受到了较多的关注。Li等^[4]将子集模拟算法引入随机有限元算法,为小概率水平下的斜坡失稳风险计算提供了一种有效方法。Li等^[5]提出一种基于具有代表性滑动面的极限平衡法,可为边坡失稳风险提供定量评价。Xiao等^[6]提出辅助随机有限元法,使得随机有限元算法在三维斜坡风险评估中得到应用。Jiang等^[7]在极限平衡分析框架下,提出一种考虑土体二维空间变异性的边坡失稳风险定量评估方法。

上述研究中,均采用平稳随机场模型来描述土体性质的空间变异性^[8],然而,土体受沉积条件、地质和环境等作用影响,导致相应的土体参数呈现沿埋深变化的趋势^[9]。值得注意的是,目前,已有学者^[10-13]认识到土体参数非平稳分布特征对斜坡概率分析的影响。由文献[10-13]可知,文献[4-7]高估了斜坡失稳概率,因此,在评价斜坡失稳风险时需考虑土体抗剪强度参数的非平稳分布特征。

学者们很少关注使用非平稳随机场表征土体抗剪强度参数来评价斜坡失稳风险。针对这一问题,笔者采用随机场模拟土体抗剪强度参数分布特征,结合有限元极限分析法、强度折减法 and Monte Carlo 模拟来计算斜坡安全系数和失效概率,并讨论了使用非平稳随机场和平稳随机场模拟土体抗剪强度参数分布特征的差异对斜坡失稳风险的影响。

1 不排水抗剪强度参数非平稳随机场模拟

土体参数的空间变异性由趋势参数和随机波动

参数组成,不同深度处的土体参数 $\xi(d)$ 可表示为^[9]

$$\xi(d) = t(d) + w(d) \quad (1)$$

式中: d 为地面以下土体深度; $t(d)$ 为趋势参数函数,即土体参数在埋深 d 处的均值; $w(d)$ 为随机波动参数函数, $w(d)$ 为均值和标准差不随深度变化的统计平稳随机场^[9]。 $t(d)$ 与土体物质组成、沉积条件和固结过程等有关^[14]。对于正常固结粘土层, $t(d)$ 从地表处沿深度增加(起始值为0);对于高度超固结粘土层, $t(d)$ 沿深度不发生变化;对于土层较厚的超固结粘土层, $t(d)$ 从地表处沿深度增加(起始值为某固定值)。尽管土体参数沿深度方向可能存在非线性变化的趋势,为简单起见, $t(d)$ 一般选择简单的线性函数^[15]。为此,只研究超固结粘土层趋势参数函数从地表处沿深度增加的情况。据此,土体不排水抗剪强度参数 c_u 由某一定值 c_{u0} 随深度增加的表达式为^[11,13]

$$c_u(d) = c_{u0} + \rho \sigma_v = c_{u0} + \rho \gamma d \quad (2)$$

式中: c_{u0} 为地面处土体的不排水抗剪强度,kPa; ρ 为土体不排水抗剪强度随深度增加的速率,kPa/m; σ_v 为垂直有效应力,kPa, $\sigma_v = \gamma d$; γ 为土体重度,kN/m³, d 为地面以下土体深度,m。采用文献[11,13]的方法,模拟土体不排水抗剪强度的非平稳分布特征:首先,将 c_{u0} 模拟为均值为 $\mu_{c_{u0}}$ 和标准差为 $\sigma_{c_{u0}}$ 的对数正态平稳随机场,然后,考虑 c_u 随深度线性变化的影响,就此得到 c_u 的二维非平稳随机场为

$$c_u(x, d) = c_{u0}(x, d) \frac{\mu_{c_{u0}} + \rho \gamma d}{\mu_{c_{u0}}} \quad (3)$$

根据式(3),得 c_u 的均值和标准差分别为

$$\begin{aligned} \mu_{c_u} &= \mu_{c_{u0}} + \rho \gamma d \\ \sigma_{c_u}(d) &= \text{COV}_{c_{u0}} (\mu_{c_{u0}} + \rho \gamma d) \end{aligned} \quad (4)$$

模拟随机场的数据为土体参数的均值、方差以及方差折减函数,而方差折减函数取决于相关函数及相关距离。方差折减函数用于描述空间平均后的方差和点方差的关系,如式(5)所示。

$$\Gamma(D) = \frac{2}{D} \int_0^D \left(\frac{\theta}{D} \right) \rho(\theta) d\theta \quad (5)$$

式中: D 为平均间距; $\rho(\theta)$ 为相关函数,可由协方差函数求得。Li 等^[16]研究了不同相关函数对边坡可靠度的影响,发现相关函数对可靠度影响不大,因此,选用形式简单的指数型相关函数

$$\rho(x_1, x_2; y_1, y_2) = e^{-\left(\frac{|x_1 - x_2| |y_1 - y_2|}{l_h l_v} \right)} \quad (6)$$

式中: x_1, x_2, y_1, y_2 是随机场域内的坐标; l_h 和 l_v 分别表示水平和垂直相关距离。通过 Karhunen-Loeve 级数展开法^[17]生成随机场。

2 斜坡安全系数计算和失稳风险评估方法

采用有限元极限分析下限法进行斜坡稳定性计算。有限元极限分析下限法指出:在任何静力许可应力场内可以计算真实极限荷载的下限值(或“安全值”)。静力许可应力场需满足平衡条件、应力边界条件和屈服条件(应力必须位于应力空间的屈服面内部或之上)。下限解是求解满足静力许可条件的最大破坏荷载^[18]。

使用强度折减法,计算边坡安全系数^[18]

$$F_s = \frac{\text{土体抗剪强度}}{\text{极限平衡状态剪应力}} = \frac{c}{c_{cr}} \quad (7)$$

图 1 给出了有限元极限分析下限法的斜坡安全系数分析流程^[18]。TOL 为收敛精度,文中取 0.001。

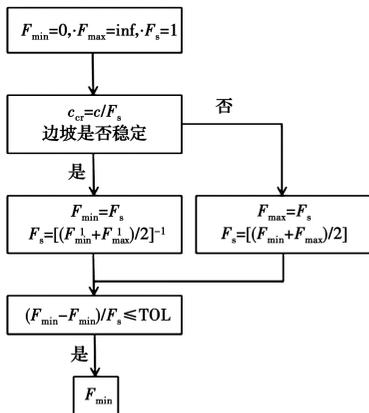


图 1 有限元极限分析下限解的斜坡安全系数分析流程

Fig. 1 Analysis flow of lower limit solution of finite element limit analysis of slope safety factor

在强度折减过程中,采用 K 聚类方法(K-means clustering method)^[17]搜索滑面的形状和位置,据此滑面计算滑坡体积。

斜坡每一次计算都会生成一个安全系数。对于

一系列随机场实现,使用 Monte Carlo 方法可获得全部安全系数, Monte Carlo 方法的具体思路如图 2 所示。因此, Monte Carlo 方法被用于产生足够数量的不排水抗剪强度随机场,并进行斜坡稳定性分析。

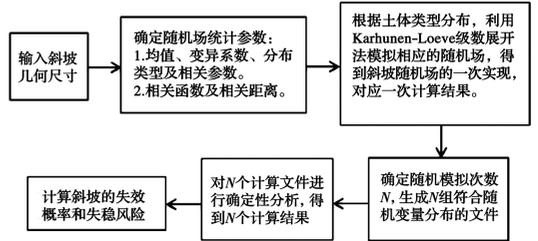


图 2 利用 Monte Carlo 模拟计算斜坡失效概率和失稳风险的流程图

Fig. 2 The flow chart of calculating slope failure probability and failure risk by Monte Carlo simulation

用式(8)计算斜坡失效概率。

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F_s(x_i) < 1] \quad (8)$$

式中: P_f 为斜坡失效概率; $F_s(x_i)$ 为对应于随机场实现的安全系数; N 为 Monte Carlo 模拟次数; $I[\square]$ 是指示函数。当 $F_s(x_i) < 1$ 时, $I[\square] = 1$; 否则 $I[\square] = 0$ 。

在得到斜坡失效概率及失效后果后,斜坡失稳风险 R 可以被评价为

$$R = C \times P_f \quad (9)$$

式中: C 为斜坡失稳后的量化结果^[17]。式(9)仅适用于斜坡滑动面形式唯一时的情况。然而,在评价空间变异性的斜坡中可能存在多种滑动面形式,所以,每种斜坡滑动面形式相关的后果都应该单独评估,于是,采用文献[17,19]中的公式评估斜坡失稳风险。

$$R = \sum_{i=1}^{N_f} P_i C_i = P_f \bar{C} \quad (10)$$

式中: P_i 为第 i 个失效模式的失效概率; C_i 为第 i 个滑动面形式的失效后果; N_f 为失效模式的数目; P_f 为斜坡失效概率; \bar{C} 为失效模式的平均失效后果。

3 算例分析

3.1 土体不排水强度参数随机场模拟

以文献[13]的一个不排水饱和粘土斜坡为例进行分析,如图 3 所示。根据文献[13]可知,斜坡高度 10 m,坡比为 1:2,土体重度 $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ 。

斜坡模型划分为 1 000 个三角形单元, Monte Carlo 模拟次数在计算结果满足精度的条件下,计算

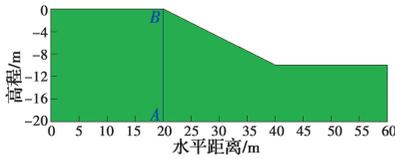


图 3 不排水饱和粘土斜坡

Fig. 3 The undrained saturated clay slope

次数为 1 000 次。为描述 c_u 沿深度方向的非平稳分布特征,即 c_u 均值和标准差随埋深的增加而增大的特性,将 c_u 模拟为 $\mu_{c_{u0}} = 14.669$ kPa 和 $\sigma_{c_{u0}} = 4.034$ kPa 的对数正态平稳随机场,水平相关距离 $\delta_h = 19$ m, 竖直相关距离 $\delta_v = 1.9$ m, 参数 ρ 为 0.15, 变异系数为 25%。同时,为了比较采用非平稳随机场和平稳随机场模拟土体抗剪强度参数空间变异性的差异对斜坡可靠度和失稳风险的影响,参照文献[10, 20]的做法,取斜坡中部($z = -10$ m)处的不排水强度均值和变异系数分别为 44.67 kPa 和 27.5%, 模拟对应的 c_u 对数正态平稳随机场实现值,也取 $\delta_h = 19$ m 和 $\delta_v = 1.9$ m。

为了便于说明,定义使用非平稳随机场模拟土体抗剪强度参数时为工况 1,使用平稳随机场模拟土体抗剪强度参数时为工况 2。图 4 和图 5 给出了 $c_u(x, d)$ 沿深度方向(图 3 中的 AB 截面)的 3 次典型实现值。由图 4 可知,工况 1 的 c_u 均值随着埋深的增加而增大,通过分析 c_u 典型实现值沿埋深方向的变化趋势可知, σ_{c_u} 同样沿埋深增加,说明此模型能够模拟 c_u 的非平稳分布特征。由图 5 可知,工况 2 由于没有考虑趋势分量的影响^[11], c_u 值的大小与深度没有关系,其相应的 c_u 典型实现值呈现杂乱无章的变化,导致土体内部随机场实现值变化较大。此外,由工况 1 获得的随机场实现值,大多分布在 c_u 均值的右侧,由工况 2 获得的随机场实现值在 c_u 均值两侧较均匀的波动。

将工况 1 和工况 2 获得的二维非平稳随机场和二维平稳随机场 $c_u(x, d)$ 典型实现值分别赋予给斜坡模型,如图 6 和图 7 所示。由图 6 和图 7 可知,红色部分为 c_u 值较大区域,蓝色部分为 c_u 值较小区域。此外,土性参数空间变异性导致多种滑动面形式,滑动面位置和形状及其安全系数均发生明显变化,即:斜坡安全系数与滑动面位置和形状没有直接联系。

3.2 斜坡可靠度分析和失稳风险定量评估

获得 c_u 随机场实现值后进行斜坡可靠度分析

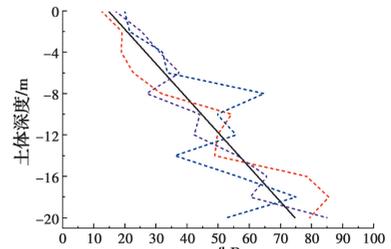
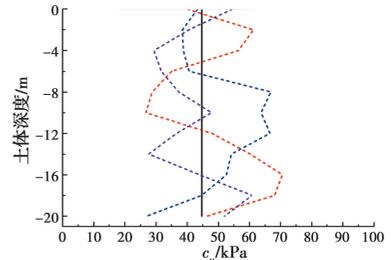
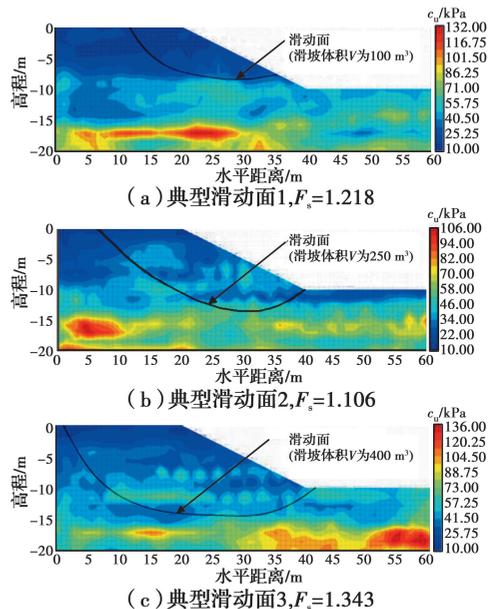
注:— c_u 均值 ——— 典型滑坡 1 c_u 实现值
----- 典型滑坡 2 c_u 实现值 ----- 典型滑坡 3 c_u 实现值图 4 工况 1 的不同 c_u 实现值Fig. 4 Different c_u for condition 1注:— c_u 均值 ----- 典型滑坡 1 c_u 实现值
----- 典型滑坡 2 c_u 实现值 ----- 典型滑坡 3 c_u 实现值图 5 工况 2 的不同 c_u 实现值Fig. 5 Different c_u for condition 2

图 6 工况 1 某次典型实现值及滑动面形式

Fig. 6 A typical realization value and failure mode for condition 1

与失稳风险定量评估。采用 Monte Carlo 进行非平稳随机场和平稳随机场斜坡可靠度计算得到的 P_f 分别为 0.044 和 0.062, 与文献[13]计算的非平稳随机场 $P_f = 0.044$ 基本一致,而且采用非平稳随机场计算得到的 P_f 小于采用平稳随机场计算得到

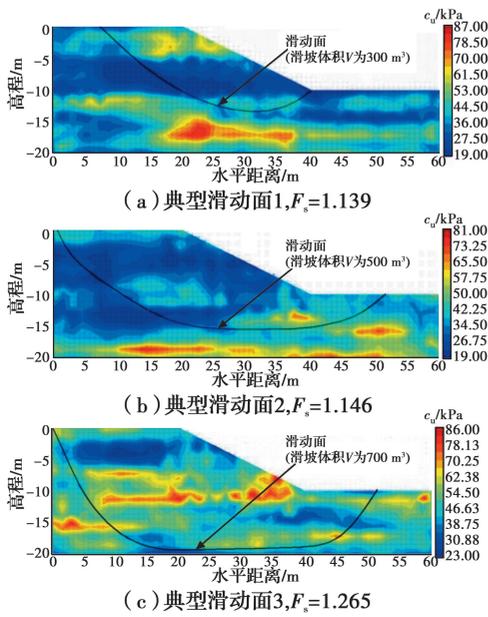


图 7 工况 2 某次典型实现值及滑动面形式
Fig. 7 A typical realization value and failure mode for condition 2

的 P_f ,这与文献[20-21]得出的结论吻合。工况 1 和工况 2 情况下混合滑动体积的直方图如图 8 和图 9 所示。从图 8 和图 9 可知,当考虑土体抗剪强度参数非平稳分布特征时,斜坡滑动体积的峰值约在 250 m^3 左右,而不考虑土体抗剪强度参数非平稳分布特征时,斜坡滑动体积的峰值约在 750 m^3 左右。

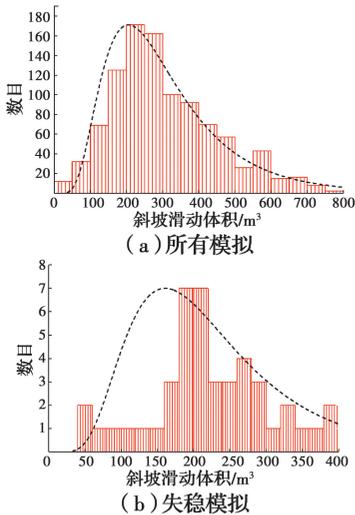


图 8 工况 1 混合滑动体积直方图
Fig. 8 Mixed sliding volume histogram for condition 1

浅层滑动面位置和深层滑动面位置的定义如文献[17]所述,本文不再描述。不同工况下斜坡发生不同滑动面位置的直方图如图 10 和图 11 所示,从图 10 和图 11 可知,深层滑动面是主要的滑动面形式,在工

况 2 情况下,深层滑动面的比例远大于工况 1。工况 1 和工况 2 的斜坡失稳风险分别为 9.8、35.69 m^3 。

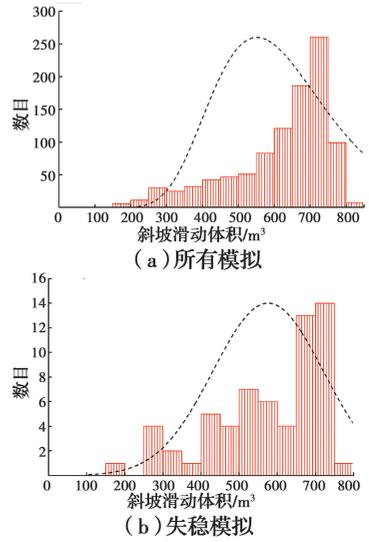


图 9 工况 2 混合滑动体积直方图

Fig. 9 Mixed sliding volume histogram condition 2

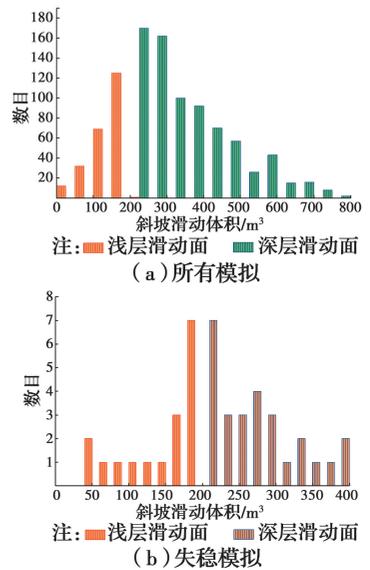


图 10 工况 1 分解滑动体积直方图

Fig. 10 Decomposition sliding volume histogram for condition 1

3.3 空间变异性对失效概率和失稳风险的影响

由于土体抗剪强度参数水平方向的空间变异性对斜坡可靠度计算的影响并不显著^[13],故重点讨论土体抗剪强度参数垂直方向的空间变异性对斜坡失效概率和失稳风险的影响。共考虑 6 个竖直相关距离 δ_v ,即 1、2、3、4、5、6 m,水平相关距离均取 $\delta_h = 19$ m。图 12 给出了不同 δ_v 下 P_f 和 \bar{C} 的变化曲线。由图 12 可知,当 δ_v 从 1 m 增加到 6 m 时,工况 2 的 P_f 从 2.1% 增加到 11.8%, \bar{C} 从 13.06 m^3 增加到

65.10 m³, 相比之下, 工况 1 的失效概率和失稳风险增加趋势较缓。此外, 图 13 通过分析统计了两种工况下不同 δ_v 斜坡发生两种滑动面位置的比例。从图 13 可以看出, 在工况 1 情况下, 浅层滑动面位置的失稳比例约占 23% 左右, 相比之下, 工况 2 情况下的浅层滑动面位置几乎很少。显然, 在改变竖直相关距离的情况下, 深层滑动面位置依然是主要的滑动面形式。

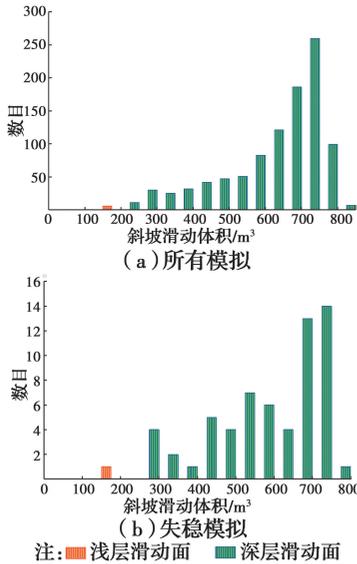


图 11 工况 2 分解滑动体积直方图

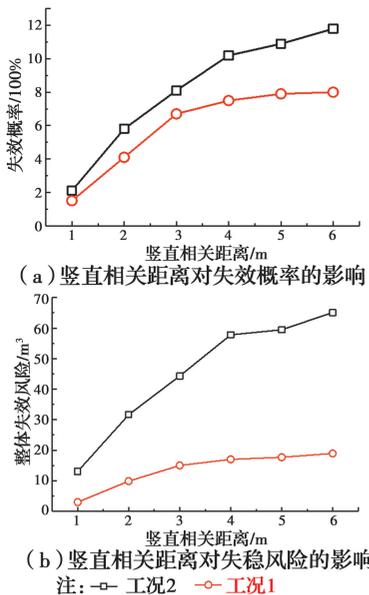


图 12 竖直相关距离对失效概率和失稳风险的影响

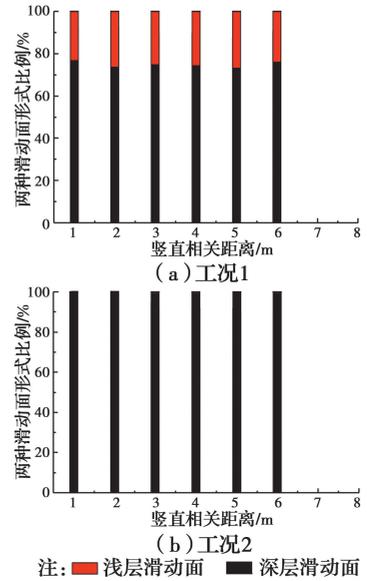


图 13 竖直相关距离对滑动面形式的影响

4 结论

结合有限元极限分析、强度折减法和蒙特卡洛模拟, 比较了使用非平稳随机场模型和平稳随机场模型对计算斜坡失稳风险和滑动面位置和形状的影响, 得到以下结论:

- 1) 当土体参数存在空间变异性时, 仅由斜坡安全系数是无法准确评价滑坡体积大小和位置及所产生的失稳风险, 故需与具体滑动面形式及滑坡体积结合, 进行滑坡风险综合分析。
- 2) 采用平稳随机场计算得到的斜坡深层滑动面的数量远远大于采用非平稳随机场。
- 3) 斜坡竖向空间变异性对采用非平稳随机场计算其失稳风险的影响较小, 对失效概率的影响较大, 相比之下, 斜坡竖向空间变异性对采用平稳随机场计算其失稳风险和失效概率的影响显著。
- 4) 在边坡稳定性理论分析中(如极限分析法和极限平衡法), 需预先设定滑动面位置和形状。在这种情况下, 精确的滑动面位置和形状可以大大提高理论方法的分析精度。不同随机场模拟得到的边坡滑动面位置和形状及失稳风险可以帮助工程师预测和解释实际场地的边坡滑动面位置和形状, 从而提高滑坡危险性评价的准确性。

参考文献:

[1] AHMED A, SOUBRA A H. Probabilistic analysis of

- strip footings resting on a spatially random soil using subset simulation approach [J]. *Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards*, 2012, 6(3): 188-201.
- [2] ZENG P, JIMENEZ R, JURADO-PINA R. System reliability analysis of layered soil slopes using fully specified slip surfaces and genetic algorithms [J]. *Engineering Geology*, 2015, 193: 106-117.
- [3] 杨智勇, 李典庆, 曹子君, 等. 考虑土质边坡多失效模式的区域概率风险分析方法[J]. *工程力学*, 2019, 36(5): 216-225, 234.
- YANG Z Y, LI D Q, CAO Z J, et al. Region probability method for soil slope risk assessment involving multiple failure modes [J]. *Engineering Mechanics*, 2019, 36(5): 216-225, 234. (in Chinese)
- [4] LI D Q, XIAO T, CAO Z J, et al. Enhancement of random finite element method in reliability analysis and risk assessment of soil slopes using Subset Simulation [J]. *Landslides*, 2016, 13(2): 293-303.
- [5] LI L, CHU X S. Risk assessment of slope failure by representative slip surfaces and response surface function [J]. *KSCSE Journal of Civil Engineering*, 2016, 20(5): 1783-1792.
- [6] XIAO T, LI D Q, CAO Z J, et al. Three-dimensional slope reliability and risk assessment using auxiliary random finite element method [J]. *Computers and Geotechnics*, 2016, 79: 146-158.
- [7] JIANG S H, HUANG J S, YAO C, et al. Quantitative risk assessment of slope failure in 2-D spatially variable soils by limit equilibrium method [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 47: 710-725.
- [8] ELRAMLY B, MAHMOUD H. Probabilistic analyses of landslide hazards and risks, bridging theory and practice [J]. *Clinical Radiology*, 2001, 67(Sup1): S15.
- [9] PHOON K K, KULHAWY F H. Characterization of geotechnical variability [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1999, 36(4): 612-624.
- [10] SRIVASTAVA A, BABU G L S. Effect of soil variability on the bearing capacity of clay and in slope stability problems [J]. *Engineering Geology*, 2009, 108(1/2): 142-152.
- [11] GRIFFITHS D V, HUANG J, FENTON G A. Probabilistic slope stability analysis using RFEM with non-stationary random fields[C]// *Geotechnical Safety and Risk V*. 2015.
- [12] ZHU D, GRIFFITHS D V, HUANG J, et al. Probabilistic stability analyses of undrained slopes with linearly increasing mean strength [J]. *Géotechnique*, 2017, 67(8): 733-746.
- [13] JIANG S H, HUANG J S. Modeling of non-stationary random field of undrained shear strength of soil for slopereliability analysis [J]. *Soils and Foundations*, 2018, 58(1): 185-198.
- [14] ASAOKA A, GRIVAS D A. Spatial variability of the undrained strength of clays [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 1982, 19(6): 128.
- [15] PHOON K, NADIM F, UZIELLI M, et al. Soil variability analysis for geotechnical practice [M]// *Characterisation and Engineering Properties of Natural Soils*, London: Taylor & Francis, 2006: .
- [16] LI K S, LUMB P. Probabilistic design of slopes [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1987, 24(4): 520-535.
- [17] HUANG J, LYAMIN A V, GRIFFITHS D V, et al. Quantitative risk assessment of landslide by limit analysis and random fields [J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, 53: 60-67.
- [18] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V. Strength reduction finite-element limit analysis [J]. *Géotechnique Letters*, 2015, 5(4): 250-253.
- [19] General principles on reliability for structures: ISO 2394: 1973/1989/1998/2015 [S]. Geneva: International Organization for Standardization.
- [20] LI D Q, QI X H, PHOON K K, et al. Effect of spatially variable shear strength parameters with linearly increasing mean trend on reliability of infinite slopes [J]. *Structural Safety*, 2014, 49: 45-55.
- [21] 祁小辉, 李典庆, 周创兵, 等. 考虑不排水抗剪强度空间变异性的条形基础极限承载力随机分析[J]. *岩土工程学报*, 2014, 36(6): 1095-1105.
- QI X H, LI D Q, ZHOU C B, et al. Stochastic analysis of ultimate bearing capacity of strip footing considering spatial variability of undrained shear strength [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, 36(6): 1095-1105. (in Chinese)