第44卷第5期 土木与环境工程学报(中英文) Vol.44 No.5
2022年10月 Journal of Civil and Environmental Engineering Oct. 2022

DOI:10.11835/j.issn.2096-6717.2021.194 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

基于吉布斯采样与压缩感知的二维非平稳CPT数据快速插值方法

朱文清[1],赵腾远[2],宋超[2],王宇[3],许领[2]

(1. 西安科技大学 地质与环境学院,西安 710054;2.西安交通大学 人居环境与建筑工程学院,西安 710049;3. 香港城市大学 建筑学及土木工程学系,香港 999077)

摘　要:静力触探试验(Cone Penetration Test,CPT)常被用于确定地下土体分层情况及层内土体的力学参数等。由于工期、工程投入、技术等条件限制,沿水平方向的CPT钻孔数目通常非常有限,有必要利用空间插值或随机模拟来估计未采样位置的CPT试验数据。提出一种有效的蒙特卡洛方法,可直接根据有限的CPT试验钻孔数据估计未采样位置的CPT数据,该方法将二维贝叶斯压缩感知框架与吉布斯采样相结合,并引入克罗内克积以提高其计算效率,然后用一系列数值及实际工程案例验证了所提方法的可靠性。结果表明:该插值方法合理,不仅能如实反映数据本身的非平稳特点,且采用序列更新技术后可显著降低时间成本,具有更强的适应能力。此外,插值结果的准确性、可靠性与已有CPT钻孔的距离成反比、与已有钻孔的数目成正比,反映出方法本身数据驱动的特点。

关键词:场地概率勘察;空间变异性;机器学习;数据驱动;马尔科夫链蒙特卡洛

中图分类号:TU413.3　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:2096-6717(2022)05-0098-11

Efficient interpolation method for 2D non-stationary CPT data using Gibbs sampling and compressive sampling

ZHU Wenqing[1], *ZHAO Tengyuan*[2], *SONG Chao*[2], *WANG Yu*[3], *XU Ling*[2]

(1. College of Geology and Environment, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, P. R. China;
2. School of Human Settlements and Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China;
3. Department of Architecture and Civil Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong SAR 999077, P. R. China)

Abstract: Cone penetration test (CPT) is commonly used to determine the stratification of underground soil and the mechanical parameters of soils in stratification. Due to time, resources and/or technical constraints, the number of CPT soundings along with a horizontal direction is generally limited. In such cases, spatial interpolation or stochastic simulation methods is a necessary choice to estimate CPT data at

收稿日期:2021-06-02

基金项目:中央高校基本科研业务费(xjh012020046)

作者简介:朱文清(1995-),男,主要从事地质灾害防治研究,E-mail:zhuwenqing0304@163.com。
赵腾远(通信作者),男,副教授,E-mail:tyzhao@xjtu.edu.cn。

Received: 2021-06-02

Foundation item: Fundamental Research Funds for the Central Universities (No. xjh012020046).

Author brief: ZHU Wenqing (1995-), main research interest: geological disaster prevention, E-mail: zhuwenqing0304@163.com.
ZHAO Tengyuan (corresponding author), associate professor, E-mail: tyzhao@xjtu.edu.cn.

un-sampled locations. This paper proposes an efficient method for simulating CPT data at un-sampled locations directly from a limited number of CPT records. The approach couples the framework of 2D Bayesian compressive sensing with Gibbs sampling, where Kronecker product is introduced for facilitating its simulation efficiency. Both numerical simulations and case histories are used to illustrate the presented method. Results show that the proposed method is reasonable, which can not only reflect the non-stationary characteristics of the data, but also significantly reduce the time cost and have reasonable adaptability after using the sequential updating technique. In addition, the accuracy and reliability of interpolation are negatively and positively proportional to the distance from existing CPT soundings and the number of existing CPT soundings, which demonstrates the data-driven nature of the proposed method.

Keywords: probabilistic site investigation; spatial variability; machine learning; data-driven; Markov Chain Monte Carlo

岩土工程场地勘察的目标是通过室内或现场原位试验合理地描述地下土层界面并表征土层内土体物理、力学参数的空间变异性[1-2]。与室内试验[3]相比，原位测试方法，如静力触探试验[4]（Cone Penetration Test，CPT）成本更加低廉、测试更加快捷[5-6]。此外，静力触探试验（CPT）能在深度方向获得近乎连续性的锥尖阻力（q_c）和侧摩阻力（f_s）数据，并以此作为土体的力学响应[7]。因此，CPT 广泛应用于表征岩土场地参数、地下土体分层[8-11]、砂土液化评估[12-13]、确定随机场的相关函数和参数等[14-15]。

尽管 CPT 广泛应用于岩土场地勘察并沿深度方向获得近乎连续的土体力学响应[16]，但由于工期、项目投入及技术等条件限制，在特定的工程场地或岩土工程项目中，沿水平方向的 CPT 钻孔数量通常很少。为解决该问题，学者们提出了众多方法来估计未采样位置处的 CPT 数据。例如，Fenton[17]提出了采用随机场的方法估计未采样位置的 CPT 数据，但该方法需要大量的 CPT 数据标定自相关函数。此外，该方法并未考虑 CPT 数据在水平方向的空间自相关性。Cai 等[18]虽然考虑了水平、深度方向的相关性，并利用条件随机场来估计未采样位置的 CPT 数据，却依然难以回避平稳随机场假定以及参数估计问题。Juang 等[19]提出了利用神经网络估计三维场地未采样位置的 CPT 数据。虽然该方法在数据拟合及外插上效果显著，近年来在多个领域得以应用，但由于其可解释性差，较难合理量化插值过程中产生的不确定性。量化的不确定性可以有效反映插值结果的可靠性大小。地理统计方法，如克里金法可以有效解决这一问题[20-21]，但该方法仅适用于满足平稳性假设的特定土层，很难应用于地下存在多个土层且空间边界不确定的岩土工程场地。Wang 等[22]提出了在 CPT 钻孔数据较少时利用二维贝叶斯压缩感知理论（Bayesian Compressive Sensing，BCS）[23-24]进行岩土分区。然而，由于 CPT 钻孔深度方向数据较多，该方法计算量大，不能高效估计未采样位置的二维 CPT 数据。对于具有空间变异性且边界未知的地下土层，如何正确、高效地估计未采样位置的二维非平稳 CPT 数据，仍然是一个重大课题。

笔者提出一种计算效率较高的无参方法，可以根据数量有限的非平稳 CPT 钻孔数据估计二维剖面中未采样位置的 CPT 数据。该方法结合压缩感知（Compressive Sensing，CS）、贝叶斯框架、吉布斯采样[25-26]，并引入可快速更新计算结果的克罗内克积，以提高计算效率。与已有文献相比，该方法在估计二维 CPT 数据方面计算效率显著提高。此外，相比于随机场模型，该方法回避了自相关函数模型选择与参数估计、数据平稳性、高斯分布等假设；相比于神经网络，该方法可以合理确定 CPT 钻孔数目少带来的不确定性。值得注意的是，该方法要求不同 CPT 钻孔沿深度方向的力学响应数据一致。

1　二维 CPT 数据的贝叶斯压缩感知

1.1　二维贝叶斯压缩感知框架

压缩感知（CS）是信号处理领域中新提出的采样方法[27-28]。基于信号本身的可压缩性，CS 可以将随着时间或空间变化且自相关的信号从它的小部分数据中重建出来。“可压缩性”意味着信号可表示为少量基函数的加权求和。以一组二维的归一化 CPTU 数据 Q_t（见图 1）说明 CS 的基本概念。$Q_t=(q_t-\sigma_v)/\sigma'_v$ 且 $q_t=q_c+(1-a)u$，其中，σ_v 和 σ'_v 分

别为土体的垂直总应力和有效应力，a 和 u 分别为圆锥面积比和孔隙水压力[29]。用 $\boldsymbol{F}$ 表示上述二维 Q_t 数据，其为 $N_z \times N_x$ 的二维矩阵。数学上 $\boldsymbol{F}$ 可表示为[27]

$$\boldsymbol{F} = \sum_{t=1}^{N} \boldsymbol{B}_t^{2D} \omega_t^{2D} \tag{1}$$

式中：$N = N_z \times N_x$；$\boldsymbol{B}_t^{2D}$ 是与 $\boldsymbol{F}$ 同等大小的二维矩阵，表示一系列具有不同特征的二维基函数，其构建与 $\boldsymbol{F}$ 本身无关；ω_t^{2D} 是与 $\boldsymbol{B}_t^{2D}$ 对应的权重系数，表示 $\boldsymbol{B}_t^{2D}$ 对 $\boldsymbol{F}$ 贡献的大小。式(1)中，ω_t^{2D} 大多数元素的值都接近于零，这表明可以使用少量 CPT 钻孔数据(见图 2)确定 ω_t^{2D} 中极少数重要元素，进而合理估计出二维 CPT 数据 $\boldsymbol{F}$。令 $\hat{\omega}_t^{2D}$ 表示估算的 ω_t^{2D}。重建的二维 CPT 数据 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 则表示为

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \sum_{t=1}^{N} \boldsymbol{B}_t^{2D} \hat{\omega}_t^{2D} \tag{2}$$

由式(2)可以看出，重建 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 的关键是根据有限数量的 CPT 钻孔数据估算 $\hat{\omega}_t^{2D}$。

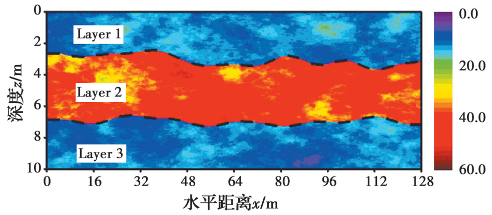
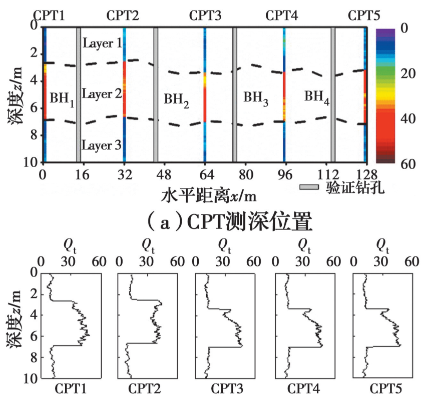


图 1　有两个土层边界的二维非平稳 Q_t 数据

Fig. 1　A set of 2D non-stationary Q_t data with two layers boundaries



(a) CPT测深位置

(b) CPT钻孔 Q_t 随深度变化的关系曲线

图 2　CPT 测深位置及孔内 Q_t 随深度的变化曲线

Fig. 2　CPT sounding locations and variation curves of Q_t with depth

1.2　二维 CPT 数据与 $\hat{\omega}_t^{2D}$ 的关系

令矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 表示从场地中 n_b(n_b>1)个 CPT 钻孔中获得的数据集，并用它来估计 $\hat{\omega}_t^{2D}$。$\boldsymbol{Y}$ 与 ω_t^{2D} 的关系可以通过 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 之间的关系推导出来。如图 1、图 2 所示，CPT 数据 $\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的子集，为大小 $N_z \times n_b$ 的矩阵。根据式(1)，$\boldsymbol{F}$ 是一个与 ω_t^{2D} 有关的函数，故而 $\boldsymbol{Y}$ 亦是 ω_t^{2D} 的函数。数学上，$\boldsymbol{Y}$ 表示为 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}$。其中，$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}$ 反映了 CPT 沿水平方向(即图 2(a)中 x 轴)的勘测位置。上标“T”表示转置运算。

此外，式(1)中 $\boldsymbol{F}$ 可以分解为矩阵形式 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}_z^{1D}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{B}_x^{1D})^{\mathrm{T}}$[30]，$\boldsymbol{B}_z^{1D}$ 与 $\boldsymbol{B}_x^{1D}$ 分别代表为 $N_z \times N_z$ 和 $N_x \times N_x$ 的一维正交矩阵。$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}_z^{1D}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{B}_x^{1D})^{\mathrm{T}}$ 是式(1)的矩阵形式表达。将 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}_z^{1D}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{B}_x^{1D})^{\mathrm{T}}$ 代入 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}$，可得

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}_z^{1D}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{B}_x^{1D})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_z^{1D}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{A}_x = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{B}_x^{1D}$。为运算方便，通过依次叠加($\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}$)的列，将 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}$ 向量化为长度为 $M = (n_b \times N_1)$ 的列向量 $\boldsymbol{y}^{2D}$

$$\boldsymbol{y}^{2D} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}) = [\boldsymbol{B}_z^{1D} \otimes \boldsymbol{A}_x]\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}^{2D} \tag{4}$$

式中：vec(•)表示向量化；$\boldsymbol{\omega}^{2D} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}})$，是式(1)中 ω_t^{2D} 的向量化表示；“$\otimes$”表示克罗内克积；$\boldsymbol{A}$ 定义为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B}_z^{1D} \otimes \boldsymbol{A}_x) = \begin{bmatrix} b_{1,1}\boldsymbol{A}_x & \cdots & b_{1,N_1}\boldsymbol{A}_x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N_1,1}\boldsymbol{A}_x & & b_{N_1,N_1}\boldsymbol{A}_x \end{bmatrix} \tag{5}$$

有关克罗内克积的更多细节问题可参考文献[31]。根据式(4)可在贝叶斯框架下推导并估计 $\hat{\omega}_t^{2D}$。

1.3　$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的贝叶斯估计

因为贝叶斯方法可以有效处理各种不确定性，如模型不确定性与空间变异性，因此采用该方法估计 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$。在贝叶斯框架下，$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的估计信息通过其后验概率密度函数(PDF)来反映，即 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D} | \boldsymbol{y}^{2D})$[32]。

$$P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D} \mid \boldsymbol{y}^{2D}) = \frac{P(\boldsymbol{y}^{2D} \mid \hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})}{P(\boldsymbol{y}^{2D})} \tag{6}$$

式中：$P(\boldsymbol{y}^{2D} | \hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})$ 为似然函数，反映了给定 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 条件下得到 $\boldsymbol{y}^{2D}$ 的合理性；$P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})$ 是不考虑 $\boldsymbol{y}^{2D}$ 时 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的先验 PDF；$P(\boldsymbol{y}^{2D})$ 是归一化常数，保证 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D} | \boldsymbol{y}^{2D})$ 的积分为常数 1。

显然，构建式(6)中 $P(\boldsymbol{y}^{2D} | \hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})$ 和 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})$ 是进行贝叶斯估计的核心，分别构建为高斯似然函数和多层先验分布。为了推导 $P(\boldsymbol{y}^{2D} | \hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})$，以均值为零且方差未知的高斯随机变量 ε 表示 $\boldsymbol{y}^{2D}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}^{2D}$ 之间的残差。另外，为方便推导，将 ε 的方差的倒数表示

为 τ。假定残差之间相互独立，$P(\boldsymbol{y}^{2D}|\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})$ 可表示为

$$P(\boldsymbol{y}^{2D} \mid \hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\tau) = \tau^{M/2}/(2\pi)^{M/2} \times \exp[-\tau(\boldsymbol{y}^{2D}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})^{T}(\boldsymbol{y}^{2D}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})/2] \quad (7)$$

式中：τ 未知，可将其作为随机变量并与 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 同步更新。因此，需构建 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\tau)=P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})P(\tau)$。根据 Zhao 等[33]、Zhao 等[34]的研究，$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的先验信息模型构建如下：首先，令 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的每个元素均服从均值为零、方差为 α_t^{-1} 的高斯分布，则 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}|\boldsymbol{\alpha})$ 可表示为 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}|\boldsymbol{\alpha})=\prod_{t=1}^{N}\alpha_t^{1/2}\ (2\pi)-1/2\exp[-\alpha_t\ (\hat{\boldsymbol{\omega}}_t^{2D})^2/2]$，其中，$\boldsymbol{\alpha}$ 是表示 α_t 的矢量形式；其次，假定 α_t 服从参数为 1 和 $\gamma/2\ (\gamma>0)$ 的逆伽玛分布，即 $P(\alpha_t|\gamma)=\gamma/2\alpha_t^{-2}\exp[-\gamma/2\cdot\alpha_t^{-1}]\ (t=1,2\cdots N)$ 且 $P(\boldsymbol{\alpha}|\gamma)=\prod_{t=1}^{N}P(\alpha_t|\gamma)$；最后，假定 γ 服从伽马分布，即 $P(\gamma)=(b_0)a_0\gamma^{a_0-1}\exp(-b_0\gamma)/\Gamma(a_0)$，其中 a_0 和 b_0 为极小非负数（如 $a_0=b_0=10^{-4}$），这对构建 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的无信息先验分布至关重要。此外，假定 τ 亦服从伽玛分布，且 $P(\tau)=d_0\ c_0\tau^{c_0-1}\exp(-d_0\tau)/\Gamma(c_0)$，$c_0$ 和 d_0 分别取值为 1 和 10^{-4}，可以使得 $P(\tau)$ 成为 τ 的无信息先验分布。

将 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}|\boldsymbol{\alpha})$、$P(\boldsymbol{\alpha}|\gamma)$ 和 $P(\tau)$ 代入 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\tau)$，可得到联合先验 PDF

$$P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\tau) = P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D} \mid \boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{\alpha} \mid \gamma)p(\gamma)p(\tau) \quad (8)$$

由于将 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 γ 均视为随机变量，因此在式(8)中使用了 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\tau)$，而非 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\tau)$。基于式(6)中的贝叶斯定理、式(7)中的似然函数以及式(8)中的先验 PDF，后验 PDF 可表示为 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\tau|\boldsymbol{y})=P(\boldsymbol{y}^{2D}|\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\tau)\times P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\tau)/P(\boldsymbol{y}^{2D})$。由于 $P(\boldsymbol{y}^{2D})$ 无解析表达式，故 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\tau|\boldsymbol{y})$ 亦无解析解。然而，笔者发现，在给定其他 3 个参数的条件下，$(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\tau)$ 中剩余参数的后验概率密度函数均有解析解。例如，以 $\boldsymbol{\alpha}$、γ、τ 为条件的 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的后验 PDF 服从多元高斯分布，均值和协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\mu}_{\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}} = COV_{\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{2D}\tau$$
$$\mathbf{COV}_{\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}} = (\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}\tau+\boldsymbol{D}^{\alpha})^{-1} \quad (9)$$

式中：$\boldsymbol{D}^{\alpha}$ 是 $N\times N$ 的对角矩阵，且对角线上元素为 $\boldsymbol{D}^{\alpha}(t,t)=\alpha_t$。其他几个分布 $P(\boldsymbol{\alpha}|\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\tau,\gamma,\boldsymbol{y}^{2D})$、$P(\tau|\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\boldsymbol{y}^{2D})$ 和 $P(\gamma|\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\tau,\boldsymbol{y}^{2D})$ 分别服从广义逆高斯分布和两个伽玛分布。更多细节可以参考文献[32]，此处只将结果展示如下，其中 $P(\boldsymbol{\alpha}|\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\tau,\gamma,\boldsymbol{y}^{2D})$ 推导为

$$P(\boldsymbol{\alpha} \mid \hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\tau,\gamma,\boldsymbol{y}^{2D}) = \prod_{t=1}^{N}\exp\left(-\frac{a_t\alpha_t+b_t\alpha_t^{-1}}{2}\right)\times (\alpha_t)\ p-1\ \frac{(a_t/b_t)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{a_tb_t})} \quad (10)$$

式中：$a_t=\hat{\boldsymbol{\omega}}_t^{2D}$；$b_t=\gamma$；$p=-1/2$；$K_p(\cdot)$ 表示参数为 p 的第二类修正 Bessel 函数。$P(\tau|\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\boldsymbol{y}^{2})$ 和 $P(\gamma|\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\alpha,\tau,\boldsymbol{y}^{2D})$ 可分别为

$$P(\tau \mid \hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\boldsymbol{y}^{2D}) = (d_n)c_n\tau^{c_n-1}\exp(-d_n\tau)/\Gamma(c_n) \quad (11a)$$

$$P(\gamma \mid \hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\tau,\boldsymbol{y}^{2D}) = (\gamma_b)\gamma_a\gamma^{\gamma_a-1}\exp(-\gamma_b\gamma)/\Gamma(\gamma_a) \quad (11b)$$

式中：$c_n=M/2+c_0$；$d_n=d_0+1/2(\boldsymbol{y}^{2D})^{T}(\boldsymbol{y}^{2D})-(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})^{T}\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{y}^{2D}+1/2(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})^{T}\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$；$\gamma_a=N+a_0$ 和 $\gamma_b=b_0+\sum_{t=1}^{N}\alpha_t^{-1}$。由于 $(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\tau)$ 这些变量相互依存，难以得出 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的解析解。鉴于上述条件，概率密度函数的解析性即式(9)～式(11)，笔者采用 MCMC 模拟中的吉布斯采样算法最终估计获得 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的统计特征。

2　$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的高效随机模拟

2.1　吉布斯采样(phthalic anhydride)

尽管 $P(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}|\boldsymbol{y})$ 无解析解，但可采用吉布斯采样方法生成大量 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 后验样本对其进行表征。吉布斯采样过程为：1）提供 $\boldsymbol{\alpha}$、τ、和 γ 的初始值，将初始值代入式(9)，计算 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的均值和协方差矩阵并由此生成一组 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 样本。2）将随机产生的样本与已知的 τ、γ 值同时代入式(10)，产生一组 $\boldsymbol{\alpha}$ 样本。3）将随机产生的 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$、$\boldsymbol{\alpha}$ 样本以及已知的 γ，代入式(11a)，τ 为 $P(\tau|\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\gamma,\boldsymbol{y}^{2D})$ 中的唯一变量。4）在式(11b)中代入 $\boldsymbol{\alpha}$、τ 和 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$，即 γ 为 $P(\gamma|\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D},\boldsymbol{\alpha},\tau,\boldsymbol{y}^{2D})$ 中的唯一变量。5）收集 $\boldsymbol{\alpha}$、τ 和 γ 的样本，并在步骤 1）中替换 $\boldsymbol{\alpha}$、τ 和 γ 的值，然后重复该过程，直到获得指定数量的 MCMC 样本。值得注意的是，吉布斯采样是马尔科夫链蒙特卡洛（Markov Chain Monte Carlo，MCMC）的一种特殊形式，与传统的 MCMC 方法不同，吉布斯采样可以有效处理高维参数问题。这是由于吉布斯采样需要已知待处理参数的条件概率分布，如式(9)～式(11)。相比之下，传统 MCMC 方法中的算法，如 Metroplis-Hasting 更加泛化，在未知参数维度较高的时候，由于难以找到合适的高维提议分布（proposal probability density function），进而导致生成样本的接受率过低，计算效率因此受到

极大影响。

由于 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 服从多元高斯分布，可在步骤1)中用Cholesky分解方法随机产生 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 样本，表示为

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}=\boldsymbol{\mu}_{\hat{\omega}^{2D}}+\boldsymbol{L}_{\hat{\omega}^{2D}}\boldsymbol{z} \tag{12}$$

式中：$\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}=(\boldsymbol{L}_{\hat{\omega}^{2D}})(\boldsymbol{L}_{\hat{\omega}^{2D}})^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{L}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 是下三角矩阵；$\boldsymbol{z}$ 是长度为 $N=N_1\times N_2$ 的列向量，其中每个元素都是均值为零、方差为1的标准高斯随机变量。式(12)表明，可通过独立分布的 $\boldsymbol{z}$ 来随机生成 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 样本。然而，由于 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的协方差矩阵 $\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 过于庞大，基于式(12)的分解无法在普通个人电脑上执行。此外，吉布斯采样流程涉及 $\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 的反复更新与分解，这就使得直接通过式(12)生成 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的样本极其困难，进而导致难以高效随机生成非平稳的二维CPT数据。

2.2　$\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 和 $\boldsymbol{\mu}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 的序列更新

由式(9)可知，$\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 是关于式(5)中已定义的 $\boldsymbol{A}$ 的函数。根据式(5)，计算 $\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 的因子 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 可推导为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}_z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_z)\otimes(\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_x)=\boldsymbol{I}_z\otimes(\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_x) \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{B}_z$ 为单位正交矩阵。因此，$\boldsymbol{I}_z=\boldsymbol{B}_z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_z$ 为单位矩阵。将式(13)代入 $\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 中，得到 $\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}=[(\boldsymbol{I}_z\otimes(\tau\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_x))+\boldsymbol{D}^{\alpha}]^{-1}$。根据克罗内克积的定义，$\boldsymbol{I}_z\otimes(\tau\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_x)$ 可表示为

$$\boldsymbol{I}_z\otimes(\tau\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_x)=\begin{bmatrix}(\tau\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_x) & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \cdots & (\tau\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_x)\end{bmatrix} \tag{14}$$

式中“$\boldsymbol{0}$”是一个 $N_x\times N_x$ 的零元素矩阵。将式(14)代入 $\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}$，得

$$\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}=\begin{bmatrix}(\tau\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_x)+\boldsymbol{D}_1^{\alpha} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \cdots & (\tau\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_x)+\boldsymbol{D}_{N_1}^{\alpha}\end{bmatrix}^{-1} \tag{15}$$

式中：$\boldsymbol{D}_1^{\alpha}$、$\boldsymbol{D}_2^{\alpha}\cdots\boldsymbol{D}_{N_1}^{\alpha}$ 均为大小 $N_2\times N_2$ 的对角矩阵，分别表示 $\boldsymbol{D}^{\alpha}$ 中 N_2 个连续且互斥的对角线元素。由式(15)可知，$\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 为分块对角矩阵，可按式(16)计算。

$$\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}=\begin{bmatrix}\mathbf{COV}^{1}_{\hat{\omega}^{2D}} & & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \cdots & \mathbf{COV}^{N_1}_{\hat{\omega}^{2D}}\end{bmatrix} \tag{16}$$

式中：$\mathbf{COV}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}=[(\tau\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_x)+\boldsymbol{D}_i^{\alpha}]^{-1}$。式(16)将$(N_1\times N_2)\times(N_1\times N_2)$的巨型矩阵的逆矩阵运算简化为一系列尺寸为 $N_2\times N_2$ 小矩阵的逆矩阵的运算。此外，式(16)中无 $\boldsymbol{B}_z$ 项，这进一步提高了 $\mathbf{COV}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 的分解效率。

利用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}_z^{1D}\otimes\boldsymbol{A}_x)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}_z^{1D})^{\mathrm{T}}\otimes(\boldsymbol{A}_x)^{\mathrm{T}}$ 与式(16)可得到 $\boldsymbol{\mu}_{\hat{\omega}D^{2D}}$

$$\boldsymbol{\mu}_{\hat{\omega}^{2D}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}^{1}_{\hat{\omega}^{2D}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\mu}^{N_1}_{\hat{\omega}^{2D}}\end{bmatrix} \tag{17}$$

式中：$\boldsymbol{\mu}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}=\tau\sum_{j=1}^{N_1}b_{j,i}\mathbf{COV}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}\boldsymbol{A}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_j^{2D}$，为 $\boldsymbol{\mu}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 的第 i 项第 N_x 个连续元素；$\boldsymbol{y}_j^{2D}$ 为 $\boldsymbol{y}$ 的第 j 项第 n_b 个连续元素；$b_{j,i}$ 为位于矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 第 j 行与第 i 列的元素。将式(16)、式(17)代入式(12)，得

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\omega}}_1^{2D}\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{N_1}^{2D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}^{1}_{\hat{\omega}^{2D}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\mu}^{N_1}_{\hat{\omega}^{2D}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}^{1}_{\hat{\omega}^{2D}} & & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{L}^{N_1}_{\hat{\omega}^{2D}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{z}_{N_1}\end{bmatrix} \tag{18}$$

式中：$\hat{\boldsymbol{\omega}}_i^{2D}=\boldsymbol{\mu}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}+\boldsymbol{L}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}\boldsymbol{z}_i$，表示 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的第 N_2 个连续元素；$\boldsymbol{L}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 是对应于 $\mathbf{COV}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}$ 的下三角矩阵，且 $\mathbf{COV}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}=(\boldsymbol{L}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}})(\boldsymbol{L}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}})^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{z}_i$ 是长度为 N_2 的列向量，表示 N_x 个独立的、标准的高斯随机变量。式(18)表明 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 随机样本的产生转变为 N_1 组标准独立高斯随机变量 $\boldsymbol{z}_i$ 的随机实现。相比式(12)，式(18)中进行 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 的随机生成时仅涉及一系列大小为$(N_x\times N_x)$的矩阵运算，避免了$(N_z\times N_x)\times(N_z\times N_x)$巨型矩阵的求逆与分解。Xiao 等[35]、Ching 等[36]、Yang 等[37]也用到了类似方法。因此，该方法极大提高了 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 样本生成的计算效率。

将生成的 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 随机样本代入式(2)，生成大量非稳态二维CPT数据。值得注意的是，该方法不需要对 $\boldsymbol{F}$ 的平稳性进行假设，因此，可直接用于估计具有空间变异性和多个未知边界的土层的二维非稳态CPT数据。虽然上述公式推导看似复杂，但通过商业软件，如MATLAB[38]可以轻易地将数学表达式编译为用户函数。为了进一步说明该方法的逻辑过程，这里给出了文中方法的流程图，主要包含5个步骤。步骤1～3属于方法的准备阶段，步骤4属于方法的核心，步骤5属于方法的结尾，详见图3。此外，为了便于读者重复该工作，给出了步骤4，即方法核心的伪代码，详见图4。

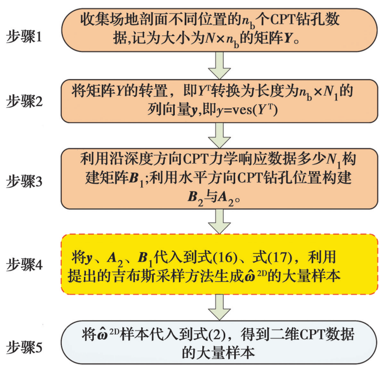


图 3　生成二维 CPT 数据的流程图

Fig. 3　A flow chart for simulating 2D CPT data

超参数初始化：令$\alpha_t=10^{-4}$,$\tau=100/\mathrm{var}(y^{2D})$,$\gamma=1$

for k=1:2100

for i=1:N_1

计算式(16–17)中的$\mathbf{COV}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}$与$\boldsymbol{\mu}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}$($i=1,2,\ldots,N_1$)

分解协方差矩阵$\mathbf{COV}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}=(\boldsymbol{L}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}})(\boldsymbol{L}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}})^T$

生成相互独立的标准高斯随机样本z_i,代入式 $\boldsymbol{\omega}^{2D}_i=\boldsymbol{\mu}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}+\boldsymbol{L}^{i}_{\hat{\omega}^{2D}}z_i$，得到$\boldsymbol{\omega}^{2D}_i$的样本

end

更新α的参数，即$\alpha_t=\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$,$b_t=\gamma$,$p=-1/2$($t=1,2,\ldots,N$),见式(10),并随机生成$\alpha$的样本

更新τ的参数，即$d_n=d_0+1/2(y^{2D}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})^T(y^{2D}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D})$并随机生成$\tau$的样本

更新γ的参数γ_B,即$\gamma_b=b_0+\sum_{t=1}^{N}\alpha_t^{-1}$,并生成$\gamma$新样本

end

图 4　引入克罗内克积吉布斯采样的伪代码

Fig. 4　Pseudo code for fast simulation of $\hat{\omega}^{2D}$ using the Gibbs sampling method with Kronecker product

3　数值模拟案例

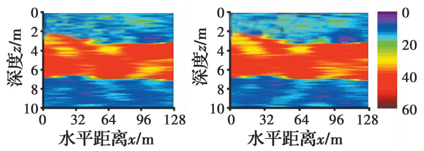
为了验证该方法,选取一组分布在 3 层土层内的二维 CPT 锥尖阻力(Q_t)数据,如图 1 所示。此例中,采用高斯平稳随机场生成器(如循环嵌入算法)在垂直方向和水平方向分别以 $\eta_z=0.02$ m 和 $\eta_x=0.5$ m 的分辨率生成每层内的 Q_t 数据[39]。随机场模拟中涉及的参数包括 Q_t 的均值、标准差 SD、垂直方向以及水平方向相关长度 λ_z 和 λ_x。第 1～3 层的均值分别取为 12、40 和 12;SD 分别为 2、5 和 2;相关长度分别为 $\lambda_z=2$ m 和 $\lambda_x=20$ m,与文献[40]一致。在生成每层 Q_t 数据时采用单指数自相关函数

$$\rho=\exp\left(-2\sqrt{\frac{(\Delta z)^2}{\lambda_z^2}+\frac{(\Delta x)^2}{\lambda_x^2}}\right) \tag{19}$$

式中:$\Delta z=z_i-z_m$ 和 $\Delta x=x_j-x_n$ 分别表示位置(z_i,x_j)和(z_m,x_n)沿 z 和 x 方向的相对距离。利用上述随机场参数和随空间变化的岩土层边界,可获得 3 层内的非稳态二维 Q_t 数据,如图 1 所示。尽管每层中的 Q_t 数据是稳态的,但由于不同土层中 Q_t 的统计量不同,图 1 所示的二维数据集是非稳态的。

如图 2 所示,当 $n_b=5$ 时的 CPT 钻孔锥尖阻力数据可作为所提出方法的输入 $\boldsymbol{Y}$(步骤 1)。首先,令 $y=\mathrm{vec}(\boldsymbol{Y}^T)$(步骤 2)。之后,记录 Q_t 沿 x 方向的位置,以此构造矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$;确定 N_z 和 N_x,N_z 代表 Q_t 数据点沿深度方向的数量,本例中 $N_z=500$。N_x 表示分辨率为 η_x 的插值后的 CPT 数据沿 x_2 方向的数量,计算公式为 $N_x=h_x/\eta_x+1$,式中 h_x 代表场地的长度。例如,令 $h_x=127.5$ m、$\eta_x=0.5$ m,则 $N_x=256$。在 MATLAB[37] 中输入使用“dctmtx”以及 N_z、N_x 构造一维正交矩阵 $\boldsymbol{B}_z^{1D}$ 与 $\boldsymbol{B}_x^{1D}$,且 $\boldsymbol{A}_x=\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{B}_x^{1D}$(步骤 3)。

接下来按照图 4 引入克罗内克积的吉布斯采样方法,生成大量 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 样本(步骤 4)。此例中,首先随机产生了 2 100 个 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 样本。然后每隔 20 步收集一次 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 样本,从而保证在丢弃前 100 个不可信的 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 样本后,样本之间的统计相关性较弱。如此,共生成 $n_s=100$ 个相互独立的随机样本。将每次产生的 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 样本代入式(2),产生一个二维的 Q_t 样本。100 组 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{2D}$ 样本产生了 $n_s=100$ 组二维且独立的 Q_t 样本(步骤 5)。图 5 给出了上述两个 CPT 样本。值得注意的是,虽然这里只生成了 100 个相互独立的 Q_t 样本,但其统计特征基本收敛,如每一点的均值及标准差并不随着 MCMC 样本的增多而发生变化。



(a)样本#1　(b)样本#2

图 5　二维 CPT 数据模拟结果示例

Fig. 5　Two examples of simulated 2D CPT data

为了说明引入克罗内克积对计算效率的提升,记录生成上述 100 个独立 CPT 样本的时间,见表 1。由表 1 可见,使用 64 位 Windows 10 操作系统的 Intel © Core®i7-9700 3.0 GHz CPU 和 16.0 GB RAM 的计算机,生成 100 组独立二维 CPT 样本大约需 40.6 s。然而,若不采用序列更新方法,即直接采用式(12)生成样本时,同一台计算机上大约需 1 421.2 s。相比于原始方法,该算法在计算效率上提高了约 35 倍。随着 CPT 勘测钻孔数量 n_b 的增加,使用序列更新技术的计算效率提高会更为明显。

表1 不同CPT钻孔数目下，使用序列更新技术(A)和不使用序列更新技术(B)生成100组二维Q_t样本的计算时间

Table 1 Computational time for simulating 100 sets of independent 2D Q_t samples using the proposed method (method A) and that without sequential updating technique (method B) under different number n_b of CPT soundings

方法	计算时间/s			
	$n_b=5$	$n_b=15$	$n_b=25$	$n_b=50$
A	40.6	79.6	146.2	301.3
B	1 421.2	34 073.9	137 056.5	*无结果

*注：因运算所需内存过大，方法B在笔者电脑中无法运行。

利用上述100个二维Q_t样本可得其均值，如图6所示。结果表明，即使在未知地下边界处，Q_t均值的分布也与图1所示较为一致。表明利用该方法生成的二维非稳态Q_t样本在统计上保留了图1中Q_t原始数据的非稳态模式。此外，根据生成的二维Q_t样本还可计算每一点的标准差，见图7。结果表明，CPT钻孔位置处的标准差非常小，说明在这些位置估计的Q_t可靠性和可信度较高。因为这些位置的Q_t数据已知，并将其作为建议方法的输入。相反，因为远离测量点的位置有效信息极少，导致远离CPT钻孔位置的样本标准差相对较大。

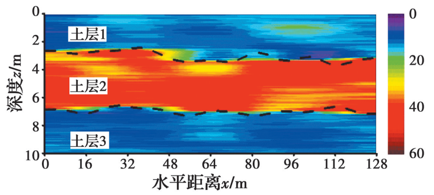


图6 MCMC模拟Q_t数据的均值

Fig. 6 Averaged Q_t from the simulated MCMC samples

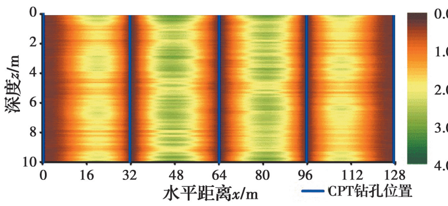


图7 MCMC模拟Q_t数据的标准差

Fig. 7 *SD* of Q_t from the simulated MCMC samples

为了进一步验证该方法插值的合理性，比较图2(a)中4个未测量钻孔(即BH_1、BH_2、BH_3、BH_4)的Q_t数据。图8(a)～(c)分别以虚线绘制了该方法在这4个钻孔位置插值的Q_t数据。为进行比较，图8以粗线给出了BH_1至BH_4处的原始Q_t变化曲线。图8显示，每个子图中虚线的变化趋势与实线一致，表明利用提出的方法生成的Q_t样本是合理、可靠的，并较为合理地刻画了图1中CPT数据的非平稳特点。

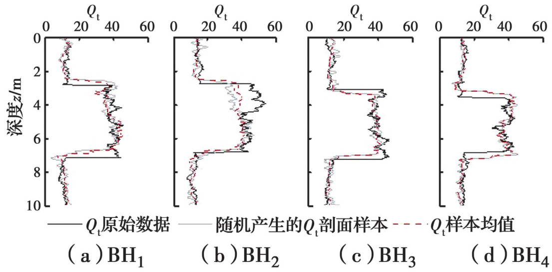


图8 位置BH_1到BH_4处的Q_t均值与原始数据的对比

Fig. 8 Comparison between averaged Q_t profile and the original one at locations BH_1 to BH_4

值得注意的是，图8中虚线、灰线和粗实线之间存在一些差异。这是因为使用提出的方法时，输入的CPT钻孔数量较少。当n_b增加时，二维Q_t样本会更加接近CPT真实数据。

4 CPT测深数量的影响

采用$n_b=5$、15、25和50的案例探讨该方法的性能。对于每个n_b案例，前述方法随机生成100个独立的二维Q_t样本，然后利用这100个Q_t样本计算每个位置的Q_t均值及标准差，详见图9、图10。由图9可以看出，随着n_b的增加，每个位置的Q_t样本均值越来越接近于图1。当$n_b=25$时，Q_t样本均值与实测Q_t几乎相同。此外，图10显示，随着n_b的增加，每个位置估算的Q_t标准差不断减小，表明每个位置Q_t估算值的可靠性和置信度都有所提高。该计算结果反映了本文所提方法的数据驱动本质。

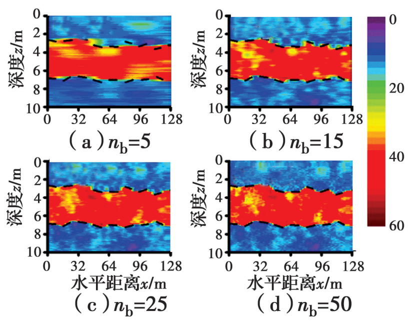


图9 n_b对二维Q_t样本均值的影响

Fig. 9 Effect of n_b on 2D Q_t averaged from the MCMC samples

另外，随着n_b的增加，采用序列更新技术的计算时间会略有延长，如表1所示。但与不采用序列更

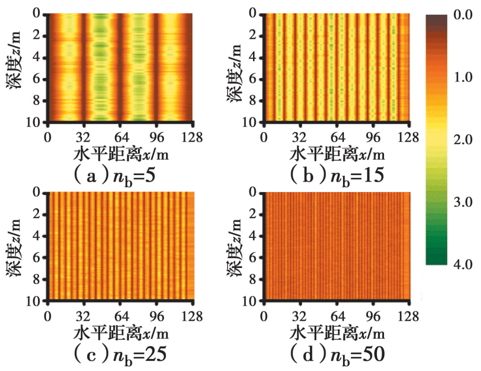


图 10　n_b对 MCMC 样本二维 Q_t数据标准差的影响

Fig. 10　Effect of n_b on SD of 2D Q_t estimated from the MCMC samples

新技术的方法相比,该方法所增加的计算时间几乎可以忽略。当 n_b＝15 时,该方法仅需约 79.6 s,而未采用序列更新技术的方法需 9 h 以上(见表 1)。两种方法计算时间的差距表明,所提出的方法可显著提高计算效率。

值得强调的是,该方法可以较为合理地考虑 CPT 钻孔数量导致的不确定性,为了定量说明不确定性的大小,根据图 9、图 10 分别计算出了 n_b＝5、15、25、50不同情况下变异系数($\delta=\sigma/\mu\times 100\%$)的中位数,分别是 11.80%、10.86%、9.36%与 8.10%。此外,根据计算经验,该方法能适用的最少 CPT 钻孔数在 4～5 个左右,如果 CPT 钻孔更少,应谨慎使用该方法。

5　工程应用

为进一步验证方法的有效性,选取位于日本冈山河堤的某工程场地进行验证研究。该场地自上而下主要由砂土、黏土或粉土、砂土组成。其中上层砂土厚约 2 m,黏土最厚约 3 m,粉土厚约 1～2 m,粉土下面仍主要以砂土为主。为了探明该河堤的软土空间分布,日本工程师在此进行了一系列的 CPT。选取其中的 CPT-201～CPT-207 来验证该方法。图 11 给出了上述 7 个 CPT 钻孔的位置分布图,其中,CPT-204 用来验证,其余 CPT 标准化 Q_t数据当作输入。所有的数据均来自 TC304 免费数据库(http://140.112.12.21/issmge/tc304.htm)。按照该方法,可以得到 Q_t的二维剖面分布,其均值与标准差见图 12。由图 12 可知,估计的 Q_t数据离 CPT 钻孔位置愈接近,对应的标准差愈小,反之,则愈大。由于这是真实原位试验数据,无法得知 CPT-204 以外的真实数据。这里以 CPT-204 对应的 Q_t数据与此位置的估计数据进行对比,见图 13。图 13 显示,虽然估计值与试验值之间存在一定差距,但两者趋势基本一致;此外,CPT-204 的大部分实测试验值落在估计值的 95%置信区间里,间接说明该方法的准确性以及鲁棒性。

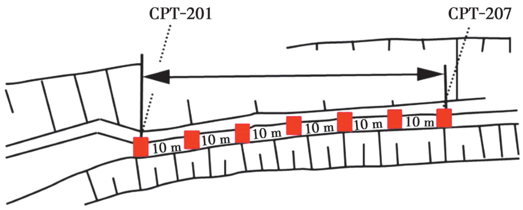


图 11　CPT 钻孔 201 到 207 分布图

Fig. 11　Spatial distribution of CPT soundings ranging from CPT-201 to CPT-207

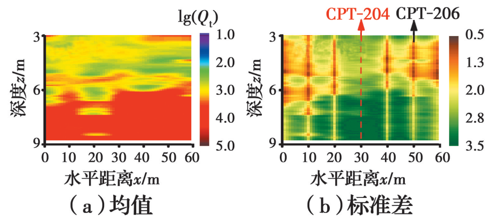


图 12　日本冈山河堤 Q_t剖面估计结果

Fig. 12　Estimated Q_t profile of the Okayama Riverbank in Japan

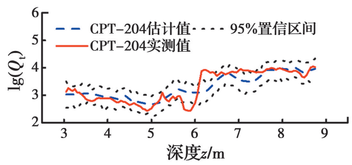


图 13　CPT-204 估计值与实测值的对比

Fig. 13　Comparison between predicted and measured Q_t at CPT-204

6　结论

基于吉布斯采样与贝叶斯压缩感知方法,提出了一种快速估计未采样位置的非平稳静力触探测试数据(CPT)的方法。该方法属于无参估计范畴,能够自动考虑静力触探数据沿水平方向的相关性,同时回避了水平、深度方向自相关函数的采用以及数据平稳性等假设。生成的 CPT 数据可用于解决各种岩土工程和地质工程问题,如土壤分层和分区、土壤液化潜力评估及其空间变异性表征、岩土设计参数的间接估计等。该方法为解决实际工程问题提供了一种概率工具,尤其是针对在实践中经常遇到的沿水平方向的 CPT 勘测钻孔数量较少的情况。最

后,通过数值与实际工程案例对提出的方法进行验证,结果表明,该方法较为准确,并且采用序列更新技术后可显著提高计算效率,具有较强的鲁棒性。

参考文献:

[1] MATTHEWS M C, SIMONS N E. Site investigation: A handbook for engineers [M]. Hoboken, New Jersey, U. S: Wiley-Blackwell, 1995.

[2] 张继周, 缪林昌, 王华敬. 土性参数不确定性描述方法的探讨[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(12): 1936-1940.
ZHANG J Z, MIAO L C, WANG H J. Methods for characterizing variability of soil parameters [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(12): 1936-1940. (in Chinese)

[3] 刘松玉, 蔡正银. 土工测试技术发展综述[J]. 土木工程学报, 2012, 45(3): 151-165.
LIU S Y, CAI Z Y. Review of the geotechnical testing [J]. China Civil Engineering Journal, 2012, 45(3): 151-165. (in Chinese)

[4] 刘松玉, 吴燕开. 论我国静力触探技术(CPT)现状与发展[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(4): 553-556.
LIU S Y, WU Y K. On the state-of-art and development of CPT in China [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(4): 553-556. (in Chinese)

[5] 沈小克, 蔡正银, 蔡国军. 原位测试技术与工程勘察应用[J]. 土木工程学报, 2016, 49(2): 98-120.
SHEN X K, CAI Z Y, CAI G J. Applications of in situ tests in site characterization and evaluation [J]. China Civil Engineering Journal, 2016, 49(2): 98-120. (in Chinese)

[6] 孟高头, 张德波, 刘事莲, 等. 推广孔压静力触探技术的意义[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(3): 314-318.
MENG G T, ZHANG D B, LIU S L, et al. The significance of piezocone penetration test [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, 22(3): 314-318. (in Chinese)

[7] LUNNE T, POWELL J J M, ROBERTSON P K. Cone penetration testing in geotechnical practice [M]. London, UK: Taylor & Francis: CRC Press, 2002.

[8] 曹子君, 郑硕, 李典庆, 等. 基于静力触探的土层自动划分方法与不确定性表征[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(2): 336-345.
CAO Z J, ZHENG S, LI D Q, et al. Probabilistic characterization of underground stratigraphy and its uncertainty based on cone penetration test [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(2): 336-345. (in Chinese)

[9] CAO Z J, ZHENG S, LI D Q, et al. Bayesian identification of soil stratigraphy based on soil behaviour type index [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2019, 56(4): 570-586.

[10] 刘松玉, 邹海峰, 蔡国军, 等. 基于CPTU的土分类方法在港珠澳大桥中的应用[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(Sup2): 1-4.
LIU S Y, ZOU H F, CAI G J, et al. Application of CPTU-based soil classification methods in Hong Kong-Zhuhai-Macao Bridge [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(Sup2): 1-4. (in Chinese)

[11] 林军, 蔡国军, 刘松玉, 等. 基于孔压静力触探力学分层的土体边界识别方法研究[J]. 岩土力学, 2017, 38(5): 1413-1423.
LIN J, CAI G J, LIU S Y, et al. Identification of soil layer boundaries using mechanical layered method base on piezocone penetration test data [J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(5): 1413-1423. (in Chinese)

[12] WANG Y, FU C, HUANG K. Probabilistic assessment of liquefiable soil thickness considering spatial variability and model and parameter uncertainties [J]. Géotechnique, 2017, 67(3): 228-241.

[13] 邹海峰, 刘松玉, 蔡国军, 等. 基于电阻率CPTU的饱和砂土液化势评价研究[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(7): 1280-1288.
ZOU H F, LIU S Y, CAI G J, et al. Evaluation of liquefaction potential of saturated sands based on piezocome penetration tests on resistivity [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(7): 1280-1288. (in Chinese)

[14] STUEDLEIN A W, KRAMER S L, ARDUINO P, et al. Geotechnical characterization and random field modeling of desiccated clay [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2012, 138(11): 1301-1313.

[15] CAO Z J, WANG Y. Bayesian model comparison and selection of spatial correlation functions for soil parameters [J]. Structural Safety, 2014, 49: 10-17.

[16] 郑栋, 李典庆, 黄劲松. 基于CPTU和MASW勘察信息融合的二维土性参数剖面贝叶斯表征方法[J]. 应用基础与工程科学学报, 2021, 29(2): 337-354.

ZHENG D, LI D Q, HUANG J S. A Bayesian characterization approach for 2D profiles of soil properties via integrating information from CPTU and MASW in site investigation [J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2021, 29(2): 337-354. (in Chinese)

[17] FENTON G A. Random field modeling of CPT data [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1999, 125(6): 486-498.

[18] CAI Y M, LI J H, LI X Y, et al. Estimating soil resistance at unsampled locations based on limited CPT data [J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 2019, 78(5): 3637-3648.

[19] JUANG C H, JIANG T, CHRISTOPHER R A. Three-dimensional site characterization: Neural network approach [J]. Géotechnique, 2001, 51(9): 799-809.

[20] 王长虹,朱合华,钱七虎. 克里金算法与多重分形理论在岩土参数随机场分析中的应用[J]. 岩土力学, 2014, 35(Sup2): 386-392.
WANG C H, ZHU H H, QIAN Q H. Application of Kriging methods and multi-fractal theory to estimate of geotechnical parameters spatial distribution [J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(Sup2): 386-392. (in Chinese)

[21] 刘志平,何秀凤,张淑辉. 多测度加权克里金法在高边坡变形稳定性分析中的应用[J]. 水利学报, 2009, 40(6): 709-715.
LIU Z P, HE X F, ZHANG S H. Multi-distance measures weighted Kriging method for deformation stability analysis of steep slopes [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2009, 40(6): 709-715. (in Chinese)

[22] WANG Y, HU Y, ZHAO T Y. Cone penetration test (CPT)-based subsurface soil classification and zonation in two-dimensional vertical cross section using Bayesian compressive sampling [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2020, 57(7): 947-958.

[23] CANDES E J, WAKIN M B. An introduction to compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21-30.

[24] JI S H, XUE Y, CARIN L. Bayesian compressive sensing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2346-2356.

[25] 赵腾远, ALADEJARE Adeyemi Emman, 王宇. 基于贝叶斯方法的模型选择以及岩石性质概率表征[J]. 武汉大学学报(工学版), 2016, 49(5): 740-744.
ZHAO T Y, ALADEJARE A E, WANG Y. Bayesian model selection and characterization for rock properties [J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2016, 49(5): 740-744. (in Chinese)

[26] 曹子君,赵腾远,王宇,等. 基于贝叶斯等效样本的土体杨氏模量的统计特征确定方法[J]. 防灾减灾工程学报, 2015, 35(5): 581-585.
CAO Z J, ZHAO T Y, WANG Y, et al. Characterization of Young's modulus of soil using Bayesian equivalent samples [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2015, 35(5): 581-585. (in Chinese)

[27] CANDES E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.

[28] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.

[29] BURNS S E, MAYNE P W. Analytical cavity expansion-critical state model for piezocone dissipation in fine-grained soils [J]. Soils and Foundations, 2002, 42(2): 131-137.

[30] ZHAO T Y, HU Y, WANG Y. Statistical interpretation of spatially varying 2D geo-data from sparse measurements using Bayesian compressive sampling [J]. Engineering Geology, 2018, 246: 162-175.

[31] PETERSEN K, PEDERSEN M. The matrix cookbook [R]. Technical University Denmark, Kongens Lyngby, Denmark, 2012.

[32] ZHAO T Y, WANG Y. Non-parametric simulation of non-stationary non-Gaussian 3D random field samples directly from sparse measurements using signal decomposition and Markov Chain Monte Carlo (MCMC) simulation [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2020, 203: 107087.

[33] ZHAO Q B, ZHANG L Q, CICHOCKI A. Bayesian sparse tucker models for dimension reduction and tensor completion [J/OL]. Computer Science, https://arxiv.org/abs/1505.02343.

[34] ZHAO T Y, XU L, WANG Y. Fast non-parametric simulation of 2D multi-layer cone penetration test (CPT) data without pre-stratification using Markov

Chain Monte Carlo simulation [J]. Engineering Geology, 2020, 273: 105670.

[35] XIAO T, LI D Q, CAO Z J, et al. CPT-based probabilistic characterization of three-dimensional spatial variability using MLE [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2018, 144(5): 04018023.

[36] CHING J, HUANG W H, PHOON K K. 3D probabilistic site characterization by sparse Bayesian learning [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2020, 146(12): 04020134.

[37] YANG Z Y, CHING J. Simulation of three-dimensional random field conditioning on incomplete site data [J]. Engineering Geology, 2021, 281: 105987.

[38] MATHWORKS I. MATLAB: The language of technical computing [EB/OL]. [2021-05-21]. http://www.mathworks.com/products/matlab/.

[39] DIETRICH C R, NEWSAM G N. A fast and exact method for multidimensional Gaussian stochastic simulations [J]. Water Resources Research, 1993, 29(8): 2861-2869.

[40] PHOON K K, KULHAWY F H. Characterization of geotechnical variability [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, 36(4): 612-624.

(编辑　黄廷)