

DOI: 10.11835/j.issn.2096-6717.2021.086



开放科学(资源服务)标识码OSID:



变荷载下考虑起始水力坡降与连续排水边界的固结解

李全军¹, 陈余², 金丹丹², 李传勋²

(1. 江苏省地矿局第三地质大队, 江苏镇江 212001; 2. 江苏大学土木工程与力学学院, 江苏镇江 212013)

摘要:采用连续排水边界的必要性及软黏土中水的渗流存在着起始水力坡降(i_0)的现象已逐渐被认识,但变荷载下同时考虑连续排水边界条件和起始水力坡降的一维固结解析解还鲜见报道。针对外荷载随时间逐渐增加的实际情况,建立变荷载下同时考虑连续排水边界和起始水力坡降的固结模型。采用傅里叶变换及拉普拉斯变换获得模型的近似解析解,利用该解答分析动边界移动规律、超静孔隙水压力随时间的消散规律及平均固结度的增长规律。结果表明:在加载速率不变的情况下,起始水力坡降下排水面透水情况对固结性状的影响与其在达西定律下相同,透水情况越好,孔压消散速率越快;透水情况越差,超静孔隙水压力消散速度越慢。与完全透水边界条件下相比,连续排水条件下起始水力坡降 i_0 对固结性状影响无明显改变, i_0 越大,移动边界到达土层底部的时间越长,固结完成时土中残留的超静孔压越大,按孔压定义的平均固结度越小; i_0 值越小,移动边界到达土层底部的时间越短,固结完成时土中残留的超静孔压越小,按孔压定义的平均固结度越大。在起始水力坡降和边界排水条件不变的情况下,随着加载时间的增加,超静孔隙水压力峰值越小,超静孔隙水压力达到峰值的时间越长,但加载时间对超静孔压残留值及按孔压定义的平均固结度无影响。

关键词:变荷载;连续排水边界;起始水力坡降;移动边界;解析解

中图分类号: TU433

文献标志码: A

文章编号: 2096-6717(2023)01-0122-13

Analytical solution of consolidation considering initial hydraulic gradient and continuous drainage boundary under variable load

LI Quanjun¹, CHEN Yu², JIN Dandan², LI Chuanxun²

(1. The Third Geology Group of Jiangsu Geology & Mineral Exploration Bureau, Zhenjiang 212001, Jiangsu, P. R. China; 2. Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, Jiangsu, P. R. China)

Abstract: It has been gradually recognized of the existing of initial hydraulic gradient(i_0) during water seepage in soft clay and the necessity of considering continuous drainage boundary is being accepted more and more.

收稿日期: 2021-01-05

基金项目: 国家自然科学基金(51878320)

作者简介: 李全军(1969-),男,高级工程师,主要从事岩土工程研究, E-mail: jsdzcz@sina.com。

李传勋(通信作者),男,教授, E-mail: lichuanxun@yeah.net。

Received: 2021-01-05

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (No.51878320)

Author brief: LI Quanjun (1969-), senior engineer, main research interest: geotechnical engineering, E-mail: jsdzcz@sina.com.

LI Chuanxun (corresponding author), professor, E-mail: lichuanxun@yeah.net.

However, the analytical solution of one-dimensional consolidation under variable load, considering both continuous drainage boundary condition and initial hydraulic gradient has rarely been reported. Based on the actual situation that the external load increases with time, taking variable load into account, a consolidation model considering both continuous drainage boundary and initial hydraulic gradient is established. The approximate analytical solution of the one-dimensional consolidation model is obtained by using Fourier transform and Laplace transform, from which, the moving law of dynamic boundary, dissipation law of excess pore water pressure as well as the growth characteristics of average consolidation degree are analyzed. The results show that, with the same loading rate, the influence of permeability of drainage surface under initial hydraulic gradient on consolidation behavior is just the same with that according to Darcy's law. The better the permeability is, the faster the dissipation rate of pore water pressure comes, and conversely, the worse the permeability is, the slower the dissipation rate of excess pore water pressure becomes. The effect of initial hydraulic gradient on consolidation behavior under continuous drainage boundary presents consistent with that under fully permeable boundary, of which the fact is, a larger value of i_0 may lead to, larger residual excess pore pressure when consolidation is completed, and smaller average degree of consolidation defined by pore pressure. On the other side, the smaller value of i_0 is, the shorter time it takes for the moving boundary reaching to the bottom of soil layer, the smaller the residual excess pore pressure becomes, and the larger the average degree of consolidation defined by pore pressure is. When under the same initial hydraulic gradient case and boundary drainage conditions, the peak value of excess pore water pressure decreases with the growth of loading time, and correspondingly takes longer time for the excess pore water pressure reaching to the peak value. However, the loading time has no influence on the residual value of excess pore water pressure and the final average cohesion defined by pore pressure.

Keywords: variable loads; continuous drainage boundaries; initial hydraulic gradients; moving boundaries; analytical solutions

自太沙基创立一维固结理论以来,固结理论得到了快速发展^[1-2]。在多数研究中,一般将地基排水边界处理为完全透水边界。但实际,当边界材料透水性不良时,土层的边界条件并不是完全透水的。同时, Terzaghi 一维固结理论中确实存在着初始条件与边界条件不连续的事实,为此,梅国雄等^[3]提出了边界排水情况随时间变化的连续排水边界条件,进而修正了太沙基一维固结理论。连续排水边界条件解决了 Terzaghi 一维固结理论中初始条件与边界条件间不连续的现象,其满足固结模型的初始条件和边界条件,且通过对界面材料透水性的控制,相关模型能适用于不同排水条件的软土地基,对连续排水边界下土体固结理论的研究具有一定的工程实际意义^[3]。

目前,已经开展对连续排水边界下土体一维固结理论的相关研究^[3-12],但绝大多数研究基于连续排水边界的固结理论,均假定土中渗流遵从达西定律。而实际上软黏土中水的渗流规律可能存在偏离达西定律的现象^[13-20]。例如,在水力坡降较低的情况下,土中水的实测流速很小。Miller 等^[21]认为

此时可以完全忽略低水力坡降下软黏土中水的流速,即认为当且仅当水力坡降 i 大于起始水力坡降 i_0 时,土中水才会渗流。基于以上认识,众多学者对考虑起始水力坡降的固结理论展开了研究^[21-28]。但以上考虑起始水力坡降的固结理论均认为土层边界为完全透水或完全不透水边界,同时考虑连续排水边界和起始水力坡降影响的固结理论还很少见到。

考虑实际工程中施工荷载均随时间逐渐增加的事实,对变荷载下同时考虑连续排水边界和起始水力坡降的软土地基一维固结理论展开研究,建立其固结模型并获得近似解答,基于该解答着重分析边界系数 b 和起始水力坡降 i_0 对固结性状的影响及不同工况下固结性状的异同。

1 固结模型的建立

如图 1 所示,无限均布的变荷载 $P(t)$ 施加于厚度为 H 的均质地基上,土层性质为饱和黏性土,其中:渗透系数为 k_v ; 压缩模量为 E_s 。除边界条件、外荷载及土中渗流规律外,作与 Terzaghi 一维固结理

论相同的基本假定。

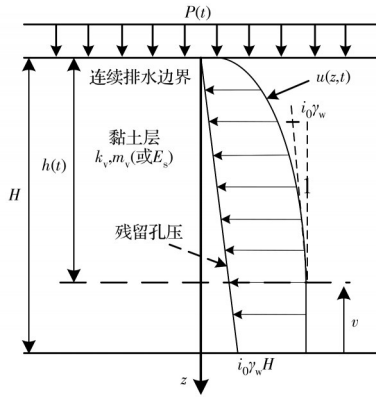


图1 软土地基一维固结模型
Fig. 1 One-dimensional consolidation model of soft ground

梅国雄等^[3]在研究瞬时加载的连续排水边界 ($u(0, t) = qe^{-bt}$) 的基础上, 根据孔压叠加原理进一步得到了随时间变化的外荷载下的边界条件, 文献[22]中对变荷载下的连续排水边界已有一定研究, 其连续排水边界处的边界条件为

$$u(0, t) = e^{-bt} \left[\int_0^t e^{b\tau} P'(\tau) d\tau + P(0) \right] \quad (1)$$

式中: b 为界面系数, 与界面材料性质有关, 可通过实测孔压反演得到; u 为超静孔隙水压力; t 为时间; e 为常数; τ 为积分变量; $P'(\tau)$ 为变荷载的一阶导数; $P(0)$ 为变荷载的初始值。超静孔压的初始值为 $u(z, 0) = P(0)$ 。

由于起始水力坡降的存在, 渗流过程中存在着移动边界问题, 在渗流移动边界处及以下的超静孔压没有变化, 故移动边界处的超静孔压应满足^[15]

$$u[h(t), t] = P(t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u[h(t), t]}{\partial z} = i_0 \gamma_w \quad (3)$$

式中: z 为深度; $h(t)$ 为 t 时刻移动边界距离透水面的距离; $P(t)$ 为变荷载; i_0 为起始水力坡降; γ_w 为水的重度。土中水的渗流遵循起始水力坡降的渗流模型, 其表达为^[14]

$$v = \begin{cases} -k_v(i - i_0), & i > i_0 \\ 0, & i \leq i_0 \end{cases} \quad (4)$$

式中: v 为黏土层中水的流速; k_v 为黏土层的渗透系数; i 为水力坡降。以式(4)所表达的渗流模型为基础, 根据土中单元体流入与流出的流量差等于单元

体的体积改变量, 得到变荷载下考虑起始水力坡降的一维固结控制方程

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} + \frac{dP(t)}{dt}, 0 \leq z \leq h(t) \quad (5)$$

式中: c_v 为固结系数, $c_v = k_v E_s / \gamma_w$ 。

2 单面排水下模型的解析求解

前面已建立了变荷载下考虑起始水力坡降的单面排水固结控制方程及其初始条件与边界条件。为得到解析解答做如下变量代换, 令

$$u(z, t) = w(z, t) + i_0 \gamma_w z +$$

$$e^{-bt} \left[\int_0^t e^{b\tau} P'(\tau) d\tau + P(0) \right] \quad (6)$$

式中: $w(z, t)$ 为关于深度 z 与时间 t 的待定函数。

控制方程(5)变为

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(t) \quad (7)$$

式中: $f(t)$ 为定解方程中关于外部荷载的待定函数, 其表达式为

$$f(t) = be^{-bt} \left[\int_0^t e^{b\tau} P'(\tau) d\tau + P(0) \right] \quad (8)$$

其定解条件变为

$$w(z, 0) = P(0) - i_0 \gamma_w z \quad (9)$$

$$w(0, t) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial w[h(t), t]}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

将定解函数 $w(z, t)$ 和 $f(t)$ 进行傅里叶展开

$$w(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin\left(\frac{Mz}{h(t)}\right), z > 0 \quad (12)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{Mz}{h(t)}\right), z > 0 \quad (13)$$

式中: $M = \frac{(2n-1)}{2} \pi, n = 1, 2, 3, \dots$

将式(12)和式(13)代入式(7)得

$$w_n'(t) + c_v \frac{M^2}{h(t)^2} w_n(t) = f_n(t) \quad (14)$$

求解式(14)得到其通解

$$w_n(t) = e^{-c_v \frac{M^2}{h(t)^2} t} \left[\int_0^t f_n(\tau) e^{\left(c_v \frac{M^2}{h(\tau)^2} - b\right) \tau} d\tau + C_n \right] \quad (15)$$

代入式(12)得

$$w(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-c_v \frac{M^2}{h(t)^2} t} \sin\left(\frac{M}{h(t)} z\right) \times \int_0^t \frac{2b}{M} \left[\int_0^{\delta} e^{b\tau} P'(\tau) d\tau + P(0) \right] e^{\left(\frac{c_v M^2}{h(t)^2} - b\right)t} dt + C_n e^{-c_v \frac{M^2}{h(t)^2} t} \sin\left(\frac{Mz}{h(t)}\right) \right\} \quad (16)$$

将 $w(z,t)$ 代入定解条件 $w(z,0)=P(0)-i_0\gamma_w z$ 中,根据正弦函数的正交关系

$$\int_0^{h(t)} \sin^2\left(\frac{M}{h(t)} z\right) dz = \frac{h(t)}{2}$$

$$C_n = \frac{h(t)}{M} P(0) - 2i_0\gamma_w \frac{h(t)}{M^2} \sin M \quad (17)$$

故渗流前锋未到达土层底面的超静孔隙水压力的表达式为

$$u(z,t) = \begin{cases} i_0\gamma_w z + \chi(b,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\left(\frac{Mz}{h(t)}\right)}{M} \times \left\{ \alpha(b,t) + \left[\frac{h(t)}{M} P(0) - \frac{i_0\gamma_w h(t)}{M} \sin M \right] e^{-c_v \frac{M^2}{h(t)^2} t} \right\}, & z \leq h(t) \\ P(t), & z > h(t) \end{cases} \quad (18)$$

式中:

$$\alpha(b,t) = e^{-c_v \frac{M^2}{h(t)^2} t} \int_0^t b \left[\int_0^{\delta} e^{b\tau} P'(\tau) d\tau + P(0) \right] e^{\left(\frac{c_v M^2}{h(t)^2} - b\right)\delta} d\delta; \\ \chi(b,t) = e^{-bt} \left[\int_0^t e^{b\tau} P'(\tau) d\tau + P(0) \right]$$

根据式(2),移动边界的位置随时间的变化规律为

$$P(t) = i_0\gamma_w z + \chi(b,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Mz}{h(t)}\right) \times \left\{ \alpha(b,t) + \left[\frac{h(t)}{M} P(0) - \frac{i_0\gamma_w h(t)}{M} \sin M \right] e^{-c_v \frac{M^2}{h(t)^2} t} \right\} \quad (19)$$

渗流前锋到达土层底部时孔压表达式为

$$u(z,t) = i_0\gamma_w z + \chi(b,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) \times \left\{ \beta(b,t) + \left[\frac{H}{M} P(0) - \frac{i_0\gamma_w H}{M} \sin M \right] e^{-c_v \frac{M^2}{H^2} t} \right\} \quad (20)$$

式中:

$$\beta(b,t) = e^{-c_v \frac{M^2}{H^2} t} \int_0^t b \left[\int_0^{\delta} e^{b\tau} P'(\tau) d\tau + P(0) \right] e^{\left(\frac{c_v M^2}{H^2} - b\right)\delta} d\delta。$$

2.1 单级加载下加荷阶段的解析解

单级加载为变荷载达到稳定值 q_c 前荷载大小与时间成正比例函数关系,荷载达到最大值后保持恒定不变。单级加载随时间变化的函数关系为

$$P(t) = \begin{cases} \frac{q_c}{t_c} t, & 0 \leq t < t_c \\ q_c, & t \leq t \end{cases} \quad (21)$$

式中: t_c 为外荷载达到最大值的时间。

当 $0 < t < t_c$ 时,外荷载处于加荷载阶段,将式(21)代入式(14)得单级加载下超静孔压内关于时间 t 的定解函数 $w_n(t)$ 所满足的微分方程关系式

$$w_n'(t) + c_v \frac{M^2}{h(t)^2} w_n(t) = \frac{2q_c}{Mt_c} (1 - e^{-bt}) \quad (22)$$

在处理移动边界问题时,需要将 t 时刻下移动边界距离排水面的位置假定为常数 h ,对式(22)进行 Laplace 变换,令 $Y(s) = L[w_n(t)]$,得到时间函数 $T_n(t)$ 的像函数为

$$Y(s) = \frac{\frac{2q_c}{Mt_c} - \frac{2i_0\gamma_w h}{M^2} (s+b)s \sin M}{\left(c_v \frac{M^2}{h^2} + s\right)(s+b)s} \quad (23)$$

再利用 Laplace 逆变换对式(23)进行求解,得

$$w_n(z,t) = \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Mz}{h(t)}\right) e^{-c_v \frac{M^2}{h(t)^2} t} \left[\alpha(b,t) - \frac{i_0\gamma_w h(t)}{M} \sin M \right] \quad (24)$$

式中:

$$\alpha(b,t) = \frac{q_c}{t_c} \left[\frac{e^{\frac{c_v M^2}{h(t)^2} t} - 1}{c_v \frac{M^2}{h(t)^2}} - \frac{e^{\left(\frac{c_v M^2}{h(t)^2} - b\right)t} - 1}{c_v \frac{M^2}{h(t)^2} - b} \right]$$

将式(24)代入式(6)和式(12),得到处于加荷

阶段的超静孔压表达式

$$u(z,t) = \begin{cases} i_0\gamma_w z + \chi(b,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Mz}{h(t)}\right) \times e^{-c_v \frac{M^2}{h(t)^2} t} \left[\alpha(b,t) - \frac{i_0\gamma_w h(t)}{M} \sin M \right], & z \leq h(t) \\ \frac{q_c}{t_c} t, & z > h(t) \end{cases} \quad (25)$$

式中:

$$\chi(b,t) = \frac{q_c}{t_c} \frac{1 - e^{-bt}}{b}$$

若该时段内移动边界未到达土层底面,则移动边界位置变化规律应满足式(2)和式(25),其表达式为

$$\frac{q_c}{t_c} t = i_0\gamma_w z + \chi(b,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} e^{-c_v \frac{M^2}{h(t)^2} t} \left[\alpha(b,t) \sin M - i_0\gamma_w \frac{h(t)}{M} \right] \quad (26)$$

将式(26)中各参数无量纲化后,得到移动边界X随时间因子 T_v 变化的关系式

$$\frac{T_v}{T_{vc}} = RX + \frac{(1 - e^{-BT_v})}{BT_{vc}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} e^{-\frac{M^2}{X^2} T_v} \times \left\{ \left[\frac{e^{\frac{M^2}{X^2} T_v} - 1}{T_{vc} \frac{M^2}{X^2}} - \frac{e^{\left(\frac{M^2}{X^2} - B\right) T_v} - 1}{T_{vc} \left(\frac{M^2}{X^2} - B\right)} \right] \sin M - \frac{RX}{M} \right\} \quad (27)$$

式中: $T_v = \frac{c_v t}{H^2}$, $T_{vc} = \frac{c_v t_c}{H^2}$, $B = \frac{bH^2}{c_v}$,

$$R = \frac{i_0\gamma_w H}{q_c}, X = \frac{h(t)}{H}。$$

若该时段内渗流前锋能到达土层底面,设移动边界到达土层底部的时间为 t_H ,则当 $t_H < t < t_c$ 时,移

$$u(z,t) = \begin{cases} i_0\gamma_w z + \chi'(b,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Mz}{h(t)}\right) \times e^{-c_v \frac{M^2}{h(t)^2} t} \left[\alpha'(b,t) - \frac{i_0\gamma_w h(t)}{M} \sin M \right], & z \leq h(t) \\ q_c, & z > h(t) \end{cases} \quad (31)$$

式中:

$$\alpha'(b,t) = \frac{q_c}{t_c} \left[\frac{e^{\frac{M^2}{c_v h(t)^2} t} - 1}{\frac{M^2}{c_v h(t)^2}} - \frac{e^{\left(\frac{M^2}{c_v h(t)^2} - b\right) t} - 1}{\frac{M^2}{c_v h(t)^2} - b} \right]$$

$$\chi'(b,t) = \frac{q_c}{t_c} \frac{e^{b(t_c-t)} - e^{-bt}}{b}$$

当固结时间 $t \rightarrow \infty$ 时,此时渗流移动边界仍然未

动边界处于土层底部且不再变化,即 $h(t)=H$,此时超静孔压表达式为

$$u(z,t) = i_0\gamma_w z + \chi(b,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) \times \left[\beta(b,t) - \frac{i_0\gamma_w H}{M} \sin M \right] e^{-c_v \frac{M^2}{H^2} t} \quad (28)$$

式中:

$$\beta(b,t) = \frac{q_c}{t_c} \left[\frac{e^{\frac{M^2}{c_v H^2} t} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2}} - \frac{e^{\left(\frac{M^2}{c_v H^2} - b\right) t} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2} - b} \right]$$

2.2 单级加载下恒载阶段的解析解

当 $t_c < t$ 时,外荷载已处于恒定不变的值 q_c ,该时段内的关于 t 的定解微分方程为

$$w_n'(t) + c_v \frac{M^2}{h(t)^2} w_n(t) = \frac{2q_c}{Mt_c} (1 - e^{-bt_c}) \quad (29)$$

同样,对式(29)进行Laplace变换,得到该解的像函数为

$$Y(s) = \frac{\frac{2q_c}{Mt_c} \left[\frac{1 - e^{st_c}}{s} - \frac{1 - e^{(b+s)t_c}}{s+b} \right] - \frac{2i_0\gamma_w h}{M} \sin M}{c_v \frac{M^2}{h^2} + s} \quad (30)$$

通过对式(30)进行Laplace逆变换,得到恒载阶段的 $w(z,t)$,进而得到超静孔压的表达式

到达土层底部,残留孔压沿土层深度分布为

$$u(z,\infty) = \begin{cases} i_0\gamma_w z, & z \leq h(t) \\ q_c, & z > h(t) \end{cases} \quad (32)$$

若渗流移动边界已经到达土层底部,则残留孔压沿土层深度分布为

$$u(z,\infty) = i_0\gamma_w z, \quad 0 < z \leq H \quad (33)$$

移动边界X随时间 T_v 的变化规律为

$$1 = RX + \frac{(e^{BT_{vc}} - BT_{vc} - e^{-BT_{vc}})}{BT_{vc}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} e^{-\frac{M^2}{X^2} T_{vc}} \times \left[\frac{e^{\frac{M^2}{X^2} T_{vc}} - 1}{T_{vc} \frac{M^2}{X^2}} - \frac{e^{\left(\frac{M^2}{X^2} - B\right) T_{vc}} - 1}{T_{vc} \left(\frac{M^2}{X^2} - B\right)} \right] \sin M - \frac{RX}{M} \quad (34)$$

式中: $T_{vc} = \frac{c_v t_c}{H^2}$ 。

若移动边界到达土层底部,此时超静孔压表达式为

$$u(z, t) = i_0 \gamma_w z + \chi'(b, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) \times e^{-\frac{c_v M^2}{H^2} t} \left[\beta'(b, t) - i_0 \gamma_w \frac{H}{M} \sin M \right] \quad (35)$$

式中:

$$\beta'(b, t) = \frac{q_c}{t_c} \left[\frac{e^{\frac{c_v M^2}{H^2} t} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2}} - \frac{e^{\left(\frac{c_v M^2}{H^2} - b\right) t} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2} - b} \right]$$

3 模型的固结度解答

3.1 单级加载下加荷阶段的固结度

若在该阶段渗流前锋始终不能到达土层底部,按孔压定义的平均固结度计算式

$$U_{pt} = \frac{P(t)h(t) - \int_0^{h(t)} u dz}{q_c H} \quad (36)$$

将式(25)代入式(36),得到该模型下加荷阶段的平均固结度为

$$U_{pt} = \frac{T_v}{T_{vc}} X - \frac{RX^2}{2} - \frac{\chi(b, t)}{q_c} X - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2X}{M^2} e^{-\frac{M^2}{X^2} T_{vc}} \left[\frac{\alpha(b, t)}{q_c} - \frac{RX}{M} \sin M \right] \quad (37)$$

根据有效应力原理

$$\sigma'(z, t) = P(t) - u(z, t) \quad (38)$$

结合应力-应变关系,得到沉降量

$$S_t = \frac{q_c H}{E_s} \left\{ \frac{T_v}{T_{vc}} X - \frac{RX^2}{2} - \frac{\chi(b, t)}{q_c} X - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2X}{M^2} e^{-\frac{M^2}{X^2} T_{vc}} \left[\frac{\alpha(b, t)}{q_c} - \frac{RX}{M} \sin M \right] \right\} \quad (39)$$

同样地,根据有效应力原理,将式(32)代入式(38),同时结合应力-应变关系,可以得到地基最终沉降量的计算公式

$$S_t = \begin{cases} \frac{q_c H}{E_s} \left(1 - \frac{R}{2}\right), & R \leq 1 \\ \frac{q_c H}{2RE_s}, & R > 1 \end{cases} \quad (40)$$

进而得到按变形定义的平均固结度

$$U_{st} = 2R \left[\frac{T_v}{T_{vc}} X - \frac{RX^2}{2} - \frac{\chi(b, t)}{q_c} X \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4RX}{M^2} e^{-\frac{M^2}{X^2} T_{vc}} \left[\frac{\alpha(b, t)}{q_c} - \frac{RX}{M} \sin M \right] \quad (41)$$

若在该阶段渗流前锋已经到达土层底部,即 $h(t) = H(X=1)$,按孔压定义的平均固结度表达式为

$$U_{pt} = \frac{T_v}{T_{vc}} - \frac{R}{2} - \frac{\chi(b, t)}{q_c} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T_{vc}} \left[\frac{\alpha(b, t)}{q_c} - \frac{R}{M} \sin M \right] \quad (42)$$

式中:

$$\alpha(b, t) = \frac{q_c}{t_c} \left[\frac{e^{\frac{c_v M^2}{H^2} t} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2}} - \frac{e^{\left(\frac{c_v M^2}{H^2} - b\right) t} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2} - b} \right]$$

若移动边界最终能到达土层底部,其按变形定义的平均固结度为

$$U_{st} = \frac{\frac{T_v}{T_{vc}} X - \frac{RX^2}{2} - \frac{\chi(b, t)}{q_c} X}{1 - \frac{R}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2X}{\left(1 - \frac{R}{2}\right) M^2} e^{-M^2 T_{vc}} \left[\frac{\alpha(b, t)}{q_c} - \frac{R}{M} \sin M \right] \quad (43)$$

3.2 单级加载下恒载阶段的固结度

若在该时段内移动边界始终未到达土层底部,则按孔压定义的平均固结度为

$$U_{pt} = X - \frac{RX^2}{2} - \frac{\chi'(b, t)}{q_c} X - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2X}{M^2} e^{-\frac{M^2}{X^2} T_{vc}} \left[\frac{\alpha'(b, t)}{q_c} - \frac{RX}{M} \sin M \right] \quad (44)$$

该时段内沉降量随时间变化的表达式为

$$S_t = \frac{q_c H}{E_s} \left\{ X - \frac{RX^2}{2} - \frac{\chi'(b,t)}{q_c} X - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2X}{M^2} e^{-\frac{M^2}{X^2} T} \left[\frac{\alpha'(b,t)}{q_c} - \frac{RX}{M} \sin M \right] \right\} \quad (45)$$

根据式(39)及式(42),可以得到按变形定义的平均固结度

$$U_{st} = 2R \left[X - \frac{RX^2}{2} - \frac{\chi'(b,t)}{q_c} X \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4RX}{M^2} e^{-\frac{M^2}{X^2} T} \left[\frac{\alpha'(b,t)}{q_c} - \frac{RX}{M} \sin M \right] \quad (46)$$

若渗流移动边界到达土层底部,则按孔压定义的平均固结度表达式为

$$U_{pt} = 1 - \frac{R}{2} - \frac{\chi'(b,t)}{q_c} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T} \left[\frac{\alpha'(b,t)}{q_c} - \frac{R}{M} \sin M \right] \quad (47)$$

式中:

$$\alpha'(b,t) = \frac{q_c}{t_c} \left[\frac{e^{\frac{M^2}{c_v H^2} t_c} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2}} - \frac{e^{\left(\frac{M^2}{c_v H^2} - b\right) t_c} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2} - b} \right]$$

若渗流移动边界最终能到达土层底部,按变形定义的平均固结度表达式为

$$U_{st} = \frac{X - \frac{RX^2}{2} - \frac{\chi'(b,t)}{q_c} X}{1 - \frac{R}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2X}{\left(1 - \frac{R}{2}\right) M^2} e^{-M^2 T} \left[\frac{\alpha'(b,t)}{q_c} - \frac{R}{M} \sin M \right] \quad (48)$$

4 解析解的退化

4.1 退化为达西定律连续排水边界下的固结解

水力坡降 i_0 的存在导致土中渗流不满足达西定

$$u(z,t) = \begin{cases} i_0 \gamma_w z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Mz}{h(t)}\right) e^{-c_v \frac{M^2}{h(t)^2} t} \times \left[\alpha(b,t) - \frac{i_0 \gamma_w h(t)}{M} \sin M \right], & z \leq h(t) \\ \frac{q_c}{t_c} t, & z > h(t) \end{cases} \quad (53)$$

式中:

律,故令 $i_0(R)=0$,则模型可以退化为仅考虑连续排水边界的渗流模型。

1)当 $0 \leq t < t_c$ 时,超静孔压的表达式退化为

$$u(z,t) = \chi(b,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) e^{-c_v \frac{M^2}{H^2} t} \alpha(b,t) \quad (49)$$

式中:

$$\alpha(b,t) = \frac{q_c}{t_c} \left[\frac{e^{\frac{M^2}{c_v H^2} t} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2}} - \frac{e^{\left(\frac{M^2}{c_v H^2} - b\right) t} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2} - b} \right]$$

$$\chi(b,t) = \frac{q_c}{t_c} \frac{1 - e^{-bt}}{b}$$

沉降量为

$$S_t = \frac{t}{t_c} \frac{q_c H}{E_s} - \frac{\chi(b,t) H}{E_s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2H}{E_s M^2} e^{-c_v \frac{M^2}{H^2} t} \alpha(b,t) \quad (50)$$

2)当 $t_c \leq t$ 时,该时段下外荷载达到峰值且不再变化($P(t)=q_c$),此时孔压表达式退化为

$$u(z,t) = \chi'(b,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) e^{-c_v \frac{M^2}{H^2} t} \alpha'(b,t) \quad (51)$$

式中:

$$\alpha'(b,t) = \frac{q_c}{t_c} \left[\frac{e^{\frac{M^2}{c_v H^2} t_c} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2}} - \frac{e^{\left(\frac{M^2}{c_v H^2} - b\right) t_c} - 1}{\frac{M^2}{c_v H^2} - b} \right]$$

$$\chi'(b,t) = \frac{q_c}{t_c} \frac{e^{b(t_c-t)} - e^{-bt}}{b}$$

沉降量的表达式退化为

$$S_t = \frac{q_c H}{E_s} - \frac{\chi'(b,t) H}{E_s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2H}{E_s M^2} e^{-c_v \frac{M^2}{H^2} t} \alpha'(b,t) \quad (52)$$

4.2 退化为完全透水边界下的固结解

b 越大,边界透水性越好,因此,若 b 趋近于 ∞ ,则连续排水边界可以退化为完全透水边界。

1)当 $0 \leq t < t_c$ 时,超静孔压的表达式退化为

$$\alpha(b, t) = \frac{q_c}{t_c} \frac{e^{\left(\frac{c_v M^2}{h(t)^2}\right)t} - 1}{c_v \frac{M^2}{h(t)^2}}$$

移动边界 X 关于时间因子 T_v 的变化规律退化为

$$\frac{T_v}{T_{vc}} = RX + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin M}{M} e^{-\frac{M^2}{X^2} T_v} \left[\frac{e^{\frac{M^2}{X^2} T_v} - 1}{T_{vc} \frac{M^2}{X^2}} - \frac{RX}{M} \sin M \right] \quad (54)$$

沉降量的表达式退化为

$$S_t = \frac{q_c H}{E_s} \left\{ \frac{T_v}{T_{vc}} X - \frac{RX^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2X}{M^2} e^{-\frac{M^2}{X^2} T_v} \left[\frac{\alpha(b, t)}{q_c} - \frac{RX}{M} \sin M \right] \right\} \quad (55)$$

2) 当 $t_c \leq t$ 时,超静孔压表达式退化为

$$u(z, t) = \begin{cases} i_0 \gamma_w z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \left(\frac{Mz}{h(t)} \right)}{M} e^{-\frac{M^2}{h(t)^2} t} \times \\ \left[\alpha'(b, t) - \frac{i_0 \gamma_w h(t)}{M} \sin M \right], & z \leq h(t) \\ q_c, & z > h(t) \end{cases} \quad (56)$$

式中:

$$\alpha'(b, t) = \frac{q_c}{t_c} \frac{e^{\left(\frac{c_v M^2}{h(t)^2}\right)t_c} - 1}{c_v \frac{M^2}{h(t)^2}}$$

则移动边界 X 随时间因子 T_v 的变化规律为 $1 = RX +$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin M}{M} e^{-\frac{M^2}{X^2} T_v} \left[\frac{e^{\frac{M^2}{X^2} T_{vc}} - 1}{T_{vc} \frac{M^2}{X^2}} - \frac{RX}{M} \sin M \right] \quad (57)$$

沉降量的表达式为

$$S_t = \frac{q_c H}{E_s} \left\{ X - \frac{RX^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2X}{M^2} e^{-\frac{M^2}{X^2} T_v} \left[\frac{\alpha'(b, t)}{q_c} - \frac{RX}{M} \sin M \right] \right\} \quad (58)$$

以上解答退化为文献[27]中变荷载下考虑起始水力坡降的一维固结解析解。

这些退化解均是解析解的特例,进一步验证了解析解的可靠性。

5 固结性状分析

影响固结模型性状的主要因素是变荷载的加载速度、起始水力坡降及边界透水性能3个方面,具体体现为无量纲时间因子 T_{vc} 、无量纲变量 R 及无量纲变量 B 对固结性状的影响,相关计算参数见表1。

表 1 固结性状计算参数

Table 1 Calculation parameters of consolidation characters

参数	符号	取值	单位
压缩模量	E_s	3 000	kPa
土层厚度	H	10	m
初始荷载	$P(0)$	0	kPa
持荷载	q_c	100	kPa
无量纲加载时间	T_{vc}	0.3	
水的重度	γ_w	10	kN/m ³
渗透系数	k_v	1.8×10^{-4}	m/d
固结系数	c_v	0.054	m ² /d
无量纲参数 B	bH^2 / c_v	5	
无量纲参数 R	$i_0 \gamma_w H / q_0$	0.1	

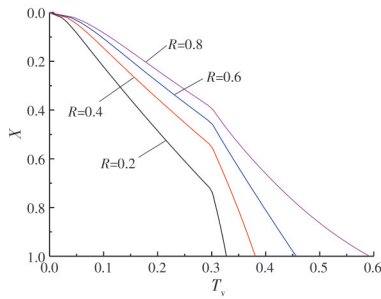
5.1 起始水力坡降对固结性状的影响

由于起始水力坡降 i_0 的存在,导致土层在固结过程中存在移动边界现象,并且土中的超静孔压在固结完成后并不能完全消散。若移动边界能到达土层底面,则整个土层均会发生渗流固结;若渗流锋面最终不能到达土层底面,则仅移动边界之上的土层才发生固结,移动边界之下的土层中超静孔压则保持与外荷载大小一致。

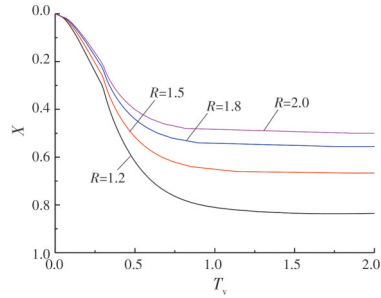
图2(a)、(b)分别给出当 $R(i_0 \gamma_w H / q_0) > 1$ 和 $R \leq 1$ 情况下的移动边界随时间的发展过程。可以发现,当 $R \leq 1$ 时,移动边界能到达土层底面;当 $R > 1$ 时,移动边界不能到达土层底面,且其最终到达的位置刚好是 $1/R$ 。且移动边界的位置在施加荷载后瞬间发生变化,由排水面向不排水面方向移动。 R 值的大小对移动边界移动速率的大小影响较大,表现为 R 值与移动边界的速率成反比。 R 值越大,移动边界下移速率越小; R 值越小,渗流移动边界下移速率越大。

图3为 $T_v = 0.35$ 时刻的超静孔压分布图。

由图3可知, R 值越大,该时刻下超静孔压越大,当 $R = 0$ 时,同一深度处土中超静孔压最小。这说明超静孔压消散速率随 R 值的增大而逐渐减小。



(a) $R \leq 1$



(b) $R > 1$

图 2 R 对 X-T_v 曲线的影响

Fig. 2 Influences of R on the X-T_v curves

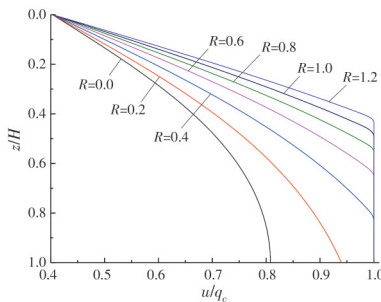


图 3 R 对 $u/q_c-z/H$ 曲线的影响 ($T_v=0.35$)

Fig. 3 Influences of R on the $u/q_c-z/H$ curves ($T_v=0.35$)

图 4 为 $z/H=0.7$ 处不同 R 值下超静孔压随时间消散过程, 可发现 $R=0$ 时超静孔压消散速度最快, 且 R 越大, 超静孔压消散速率越小。当渗流规律满足达西定律时, 超静孔压能够最终消散至 0, 反之, 超静孔压不能最终消散至 0。

图 5 为不同 R 值下土层固结度随时间变化的曲线, 同样反映了土层中超静孔压的消散规律。可发现, 当固结最终完成时, 其最终平均固结度的大小随着 R 值的增大而减小。当 R 等于 0 时, 土层的最终平均固结度能达到 100%。

图 6 为不同 R 值下沉降量 S 随时间变化曲线, 同样反映了图 5 中描述的固结性状。可发现, 当固结最终完成时, 其最终沉降量的大小随着 R 值的增大而减小。

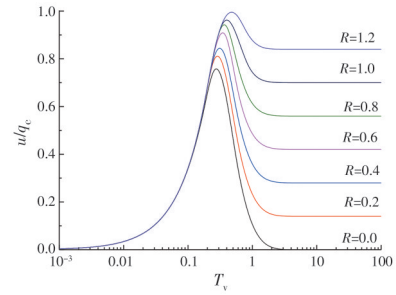


图 4 R 对 u/q_c-T_v 曲线的影响 ($z/H=0.7$)

Fig. 4 Influences of R on the u/q_c-T_v curves ($z/H=0.7$)

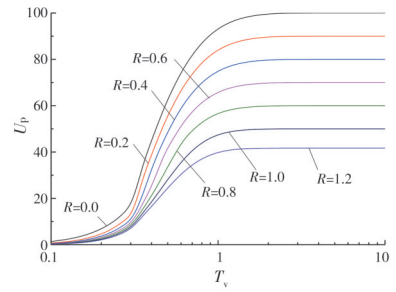


图 5 R 对 U_p-T_v 曲线的影响

Fig. 5 Influences of R on the U_p-T_v curves

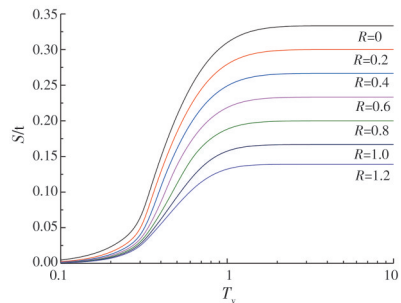


图 6 R 对 $S-T_v$ 曲线的影响

Fig. 6 Influences of R on the $S-T_v$ curves

5.2 不同边界条件对固结性状的影响

由式(1)可知, 在土层厚度不变的情况下, 通过改变无量纲变量 $B(bH^2/c_v)$, 可得到具有不同排水能力的边界条件。边界透水性能的好坏与 B 值成正比, B 值越小, 排水面的透水能力越差; B 值越大, 排水面的透水能力越好, 且当 B 值足够大时, 其边界条件则退化为完全透水边界。

由于超静孔隙水压力的消散, 渗流前锋会随着固结时间的推移而逐渐下移。如图 7 所示, B 值越小, 边界透水情况越差, 移动边界到达底部的时间越长; B 值越大, 边界透水情况越好, 移动边界到达土层底部的时间越少。当边界条件为完全透水边界时, 移动边界下移速度最快。

图 8 为 $T_v=0.35$ 时超静孔压随深度分布曲线图。从图中可以看出超静孔压随深度的分布规律, 即同一

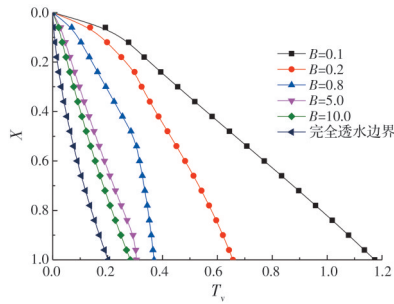


图 7 B 对渗流移动边界的影响

Fig. 7 Influences of B on the moving boundary of seepage flow

深度处超静孔压值随 B 值的增大而逐渐减小,且当 B 取无穷大时,残留的超静孔压值最小。说明在该时刻超静孔压在完全透水边界下消散速度最快。

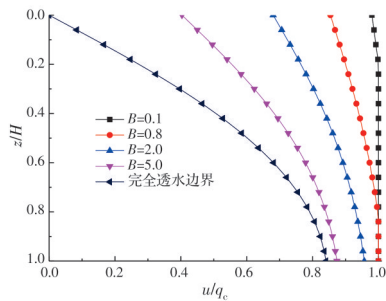


图 8 B 对 $u/q_c-z/H$ 曲线的影响 ($T_v=0.35$)

Fig. 8 Influences of B on the $u/q_c-z/H$ curves ($T_v=0.35$)

图 9 为 $z/H=0.5$ 处超静孔压随时间变化的曲线,该曲线进一步描述了图 7 所展示的消散规律及边界透水情况对超静孔压消散的影响。B 值越大,边界透水性越好,相同深度处的超静孔压消散速率越大,同时也越接近于完全透水边界条件下的超静孔压随时间分布的曲线。

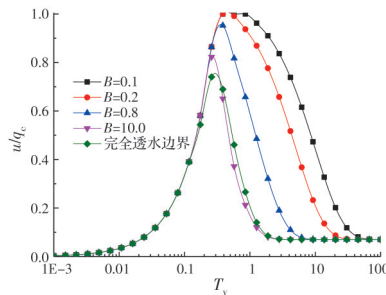


图 9 B 对 u/q_c-T_v 曲线的影响

Fig. 9 Influences of B on the u/q_c-T_v curves

图 10 为固结度随时间发展曲线图,上述固结性状在图 10 中得到进一步展示。从图 10 可以发现,B 值越大,相同时间下地基固结度越高,且完全透水边界下土层的平均固结度最大。

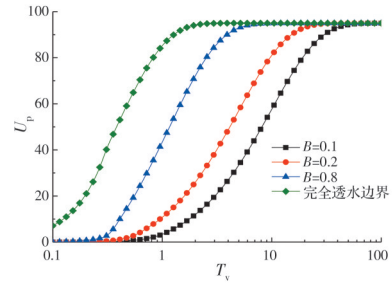


图 10 B 对固结度 U_p 的影响

Fig. 10 Influences of B on the consolidation degree U_p

图 11 为沉降量随时间发展曲线图,从图 11 可以发现,B 值越大,固结完成之前同时刻下沉降量越大,且边界透水情况对最终沉降量无影响。

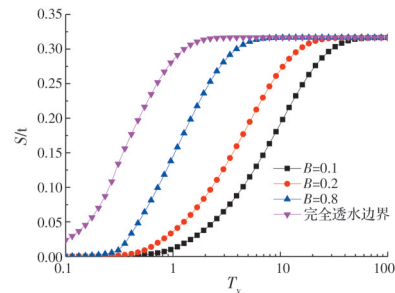


图 11 B 对沉降量 S 的影响

Fig. 11 Influences of B on the steelement amount S

5.3 施加荷载速率大小 (T_{vc}) 对固结性状的影响

针对外荷载加载速率对固结性状的影响,选取不同 T_{vc} 值对超静孔压及按空压定义的平均固结度进行固结性状分析。

如图 12 所示,土层中同一位置处的超静孔压与荷载施加完成的时间因子 T_{vc} ($T_{vc}=0.1、0.2、0.5、0.8、1.2、1.5$) 息息相关, T_{vc} 越小,移动边界到达土层底部的时间越短,超静孔压达到最大时的值越大,且超静孔压达到最大值的时间越短。

图 13 所示为按孔压定义的平均固结度随时间变化的曲线,可以发现,相同时间下加载时间 T_{vc} 越小,土层固结度越大。随着加载速率的减小,土层

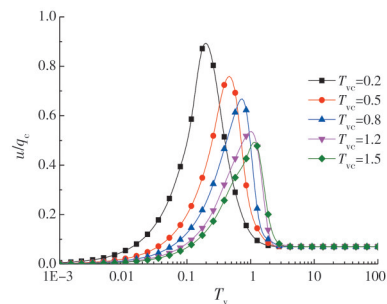


图 12 T_{vc} 对 u/q_c-T_v 曲线的影响

Fig. 12 Influences of T_{vc} on the u/q_c-T_v curves

固结速率逐渐缓慢,到固结后期,这种现象逐渐消失。由图可知, T_{vc} 的变化不影响平均固结度的最终大小,且该固结性状可以由图11中超静孔压随时间变化曲线得到进一步证明。

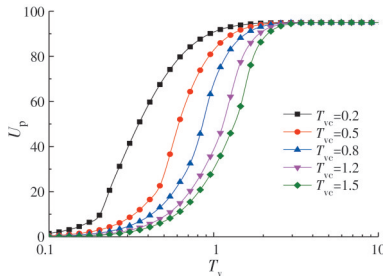


图13 T_{vc} 对 U_p-T_v 曲线的影响

Fig. 13 Influences of T_{vc} on the U_p-T_v curves

图14表示沉降量随时间变化的曲线,加载时间 T_{vc} 越小,加载速率越大,固结完成前同时刻下地基沉降量越大。其加载速率大小对最终沉降量没有影响。

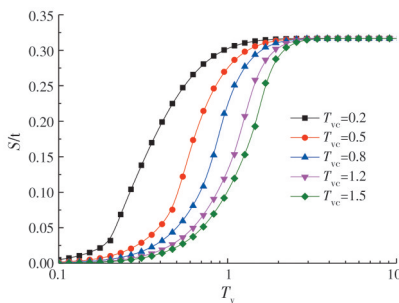


图14 T_{vc} 对 $S-T_v$ 曲线的影响

Fig. 14 Influences of T_{vc} on the $S-T_v$ curves

6 结论

考虑实际中的变荷载、土中存在的起始水力坡降及不同透水性能的排水边界条件,以传统Terzaghi一维固结理论为基础,重新建立并推导单级荷载下考虑起始水力坡降和连续排水边界的一维固结控制方程及其解析解,结论如下:

1)给出了基于变荷载下连续排水边界和起始水力坡降的软土一维固结的解析解答,并给出了特殊的单级加载下该模型的固结解析解。目前考虑起始水力坡降在完全透水边界下的固结解和达西定律下考虑连续排水边界的固结解均是本文解析解的特例。

2)本文解为变荷载下同时考虑连续排水边界和起始水力坡降的固结问题提供了固结计算的理

论支撑。

3)与在完全透水边界下相比,连续排水边界下起始水力坡降和加载速率对软黏土固结性状的影响并未发生明显改变。在考虑连续排水边界的情况下,与完全透水边界下相比,加载速率的大小对软土固结性状的影响并未发生明显改变。连续排水边界对起始水力坡降所引起的移动边界下移速度影响较大,其透水性越好,移动边界下移速度越快。

参考文献

- [1] 高程, 顾佳杰, 孙秀丽, 等. 板土交界处裂隙发育与化学注浆时间对一维电渗固结的影响[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2020, 42(4): 67-75.
GAO C, GU J J, SUN X L, et al. Influence of electrode crack development and chemical grouting time on one dimensional electroosmosis consolidation [J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2020, 42(4): 67-75. (in Chinese)
- [2] 周松望, 张艳, 王栋. 正常固结黏土中扭矩对负压沉箱承载力的影响分析[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2020, 42(1): 18-23.
ZHOU S W, ZHANG Y, WANG D. Influence of torsion on bearing capacity of suction caisson in normally consolidated clay [J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2020, 42(1): 18-23. (in Chinese)
- [3] 梅国雄, 夏君, 梅岭. 基于不对称连续排水边界的太沙基一维固结方程及其解答[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(1): 28-31.
MEI G X, XIA J, MEI L. Terzaghi's one-dimensional consolidation equation and its solution based on asymmetric continuous drainage boundary [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(1): 28-31. (in Chinese)
- [4] 张国英, 李勇义, 李康. 连续排水边界下一维均质地基的固结性状分析[J]. 现代矿业, 2018, 34(4): 205-207, 209.
ZHANG G Y, LI Y Y, LI K. Analysis of consolidation behavior of one-dimensional homogeneous foundation under continuous drainage boundary [J]. Modern Mining, 2018, 34(4): 205-207, 209. (in Chinese)
- [5] 蔡烽, 何利军, 周小鹏, 等. 连续排水边界下成层地基一维固结问题的有限元分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2013, 44(1): 315-323.
CAI F, HE L J, ZHOU X P, et al. Finite element analysis of one-dimensional consolidation problem with continuous drainage boundaries in layered ground [J].

- Journal of Central South University (Science and Technology), 2013, 44(1): 315-323. (in Chinese)
- [6] 冯健雪, 陈征, 李勇义, 等. 连续排水边界条件下考虑自重的地基一维固结分析[J]. 工程力学, 2019, 36(5): 184-191.
FENG J X, CHEN Z, LI Y Y, et al. Study on one-dimensional consolidation considering self-weight under continuous drainage boundary conditions [J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(5): 184-191. (in Chinese)
- [7] 宗梦繁, 吴文兵, 梅国雄, 等. 连续排水边界条件下土体一维非线性固结解析解[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(12): 2829-2838.
ZONG M F, WU W B, MEI G X, et al. An analytical solution for one-dimensional nonlinear consolidation of soils with continuous drainage boundary [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, 37(12): 2829-2838. (in Chinese)
- [8] 宗梦繁, 吴文兵, 梅国雄, 等. 连续排水边界条件下土体一维流变固结解析解[J]. 工程力学, 2019, 36(9): 79-88.
ZONG M F, WU W B, MEI G X, et al. Analytical solution for one-dimensional rheological consolidation of soil based on continuous drainage boundary [J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(9): 79-88. (in Chinese)
- [9] 田乙, 吴文兵, 蒋国盛, 等. 连续排水边界下分数阶黏弹性饱和土体一维固结分析[J]. 岩土力学, 2019, 40(8): 3054-3061, 3070.
TIAN Y, WU W B, JIANG G S, et al. One-dimensional consolidation of viscoelastic saturated soils with fractional order derivative based on continuous drainage boundary [J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(8): 3054-3061, 3070. (in Chinese)
- [10] 李称, 吴文兵, 梅国雄, 等. 不同排水条件下城市固废一维降解固结解析解[J]. 岩土力学, 2019, 40(8): 3071-3080, 3089.
LI C, WU W B, MEI G X, et al. Analytical solution for 1D degradation-consolidation of municipal solid waste under different drainage conditions [J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(8): 3071-3080, 3089. (in Chinese)
- [11] 王珏, 童立红, 金立, 等. 任意荷载下连续排水边界分数阶黏弹性地基一维固结模型[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2020, 42(1): 56-63.
WANG J, TONG L H, JIN L, et al. One-dimension consolidation mode of fractional order viscoelastic subgrade with continuous drainage boundary under time-dependent loading [J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2020, 42(1): 56-63. (in Chinese)
- [12] 冯健雪. 连续排水边界条件下成层地基一维固结理论研究[D]. 广西大学, 2019.
FENG J X. One-dimensional consolidation theory of layered foundations under continuous drainage boundary conditions [D]. Guangxi University, 2019. (in Chinese).
- [13] DUBIN B, MOULIN G. Influence of a critical gradient on the consolidation of clays [M]//Consolidation of Soils: Testing and Evaluation. 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959: ASTM International: 354-354-24.
- [14] Miller R J, Low P F. Threshold gradient for water flow in clay systems [J]. Soil Science Society of America Proceedings, 1963, 27(6): 605-609.
- [15] HANSBO S. Aspects of vertical drain design: Darcian or non-Darcian flow [J]. Géotechnique, 1997, 47(5): 983-992.
- [16] HANSBO S. Deviation from Darcy's law observed in one-dimensional consolidation [J]. Géotechnique, 2003, 53(6): 601-605.
- [17] 齐添, 谢康和, 胡安峰, 等. 萧山黏土非达西渗流性状的试验研究[J]. 浙江大学学报(工学版), 2007, 41(6): 1023-1028.
QI T, XIE K H, HU A F, et al. Laboratorial study on non-Darcy seepage in Xiaoshan clay [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2007, 41(6): 1023-1028. (in Chinese)
- [18] INDRARATNA B, ZHONG R, FOX P J, et al. Large-strain vacuum-assisted consolidation with non-darcian radial flow incorporating varying permeability and compressibility [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2017, 143(1): 04016088.
- [19] ZHAO X D, GONG W H. Model for large strain consolidation with non-Darcian flow described by a flow exponent and threshold gradient [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2019, 43(14): 2251-2269.
- [20] WANG H X, XU W, ZHANG Y Y, et al. Simplified solution to one-dimensional consolidation with threshold gradient [J]. Computers and Geotechnics, 2021, 131: 103943.
- [21] MILLER R J, LOW P F. Threshold gradient for water flow in clay systems [J]. Soil Science Society of America Journal, 1963, 27(6): 605-609.
- [22] PASCAL F, PASCAL H, MURRAY D W. Consolidation with threshold gradients [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1981, 5(3): 247-261.

- [23] 刘慈群. 有起始比降固结问题的近似解[J]. 岩土工程学报, 1982, 4(3): 107-109.
LIU C Q. Approximate solutions for one-dimensional consolidation with a threshold gradient [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1982, 4(3): 107-109. (in Chinese)
- [24] XIE K H, WANG K, WANG Y L, et al. Analytical solution for one-dimensional consolidation of clayey soils with a threshold gradient [J]. Computers and Geotechnics, 2010, 37(4): 487-493.
- [25] 李传勋, 王坤. 考虑起始水力坡降的软土一维非线性固结分析[J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2014, 35(6): 732-737.
LI C X, WANG K. Analysis of one-dimensional nonlinear consolidation for soft soils with threshold gradient [J]. Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition), 2014, 35(6): 732-737. (in Chinese)
- [26] 李传勋, 谢康和. 考虑非达西渗流和变荷载影响的软土大变形固结分析[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(6): 1002-1009.
LI C X, XIE K H. Large-strain consolidation of soft clay with non-Darcian flow by considering time-dependent load [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(6): 1002-1009. (in Chinese)
- [27] 王坤. 考虑起始比降的软土地基一维固结理论研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2011.
WANG K. Studies on one dimensional consolidation for soft soils with threshold gradient [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2011. (in Chinese)
- [28] 黄杰卿, 谢新宇, 王文军, 等. 考虑起始比降的饱和土体一维复杂非线性固结研究[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(2): 355-363.
HUANG J Q, XIE X Y, WANG W J, et al. Study on one-dimensional nonlinear consolidation behavior for saturated soils with threshold gradient [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(2): 355-363. (in Chinese)

(编辑 胡玲)