

DOI: 10.11835/j.issn.2096-6717.2021.176



开放科学(资源服务)标识码 OSID:



土工构筑物的逆几何可靠性分析算法

吴兴征, 刘赫

(河北大学建筑工程学院, 河北保定 071002)

摘要:针对特定场地下土工构筑物的正常使用极限状态,考虑钻孔灌注桩、抗浮锚杆或 CFG 桩单桩荷载-位移测试曲线之间的离散性,将测试曲线拟合得到的回归参数集视作随机变量,基于几何可靠性算法框架,运用高斯 Copula 函数联合分布模型实施由标准正态空间到原始物理空间中随机变量的表征转换,构建基于概率密度等值线的逆几何可靠性算法。该算法假定描述随机变量服从正态分布的某一参数(均值或变异系数)未知,给定目标可靠指标,可推求随机变量的概率密度等值线。通过极限状态方程限定概率密度等值线的几何轮廓,可求解特定目标可靠指标下随机变量的未知均值或变异系数,并求出相应的安全系数。当随机变量服从其他非正态边缘分布时,等值线的几何轮廓仍由一系列离散点近似表征,逆可靠性分析同样适用。建议的算法主要用于解决随机变量部分统计参数缺失或不完备的难题,给定目标可靠指标时可根据构筑物重要性等级进行安全系数校准。

关键词:逆几何可靠性;概率密度等值线;安全系数;高斯 Copula 函数

中图分类号:TU473.1 **文献标志码:**A **文章编号:**2096-6717(2023)05-0106-10

Inverse geometric reliability analysis algorithm for geotechnical structures

WU Xingzheng, LIU He

(College of Civil Engineering and Architecture, Hebei University, Baoding 071002, Hebei, P. R. China)

Abstract: For serviceability limit state of geotechnical structures at a specific site, the scatter among the load-displacement curves of bored piles, floating anchors or CFG piles is considered, and the set of regression parameters obtained by fitting these test curves is treated as a random variable. On the basis of theoretical framework of the geometric reliability method, a Gaussian Copula function is used to facilitate the transformation of random variables from the standard normal space to the original physical space, and then an inverse reliability algorithm based on probability density contours (PDCs) is constructed. In this algorithm, if one parameter of a normal probability density distribution is unknown, such as the mean or coefficient of variance, the PDC of the random variables can be derived when a target reliability index is specified. If the PDC

收稿日期:2021-06-15

基金项目:河北省自然科学基金(E2019201296);河北省高等学校科学技术研究重点项目(ZD2018216);一省一校专项资助(801260201262)。

作者简介:吴兴征(1971-),男,博士,副教授,主要从事岩土、防洪与海岸工程的不确定性模型研究,E-mail:xingzhengwu@163.com。

Received: 2021-06-15

Foundation items: Hebei Natural Science Foundation (No. E2019201296); Key Project of Science and Technology Research in Colleges and Universities of Hebei Province (No. ZD2018216); Advanced Talents Incubation Program of the Hebei University (No. 801260201262).

Author brief: WU Xingzheng (1971-), PhD, associate professor, main research interests: uncertainty models in geotechnical, flood defence and coastal engineering, E-mail: xingzhengwu@163.com.

is bounded by the limit state equation, the unknown mean value or coefficient of variance for the random variable under a given target reliability index is solved, and the corresponding safety factor is derived. While a non-normal marginal distribution is followed by random variables, the geometric configuration of the PDC can be still approximated by a set of discrete points, and the inverse reliability analysis is also applicable. The proposed algorithm is mainly used to solve problems with statistical parameters of random variables missing or incomplete. When the target reliability index is specified, the safety factor can be calibrated according to the importance hierarchy of the structure.

Keywords: inverse geometric reliability; probability density contour; safety factor; Gaussian Copula function

可靠性分析可细分为正分析与反分析两类。前者通过建立构筑物的极限状态方程求解可靠指标或失效概率,据此核算构筑物是否满足规范设定的量值。在给定目标可靠指标的情况下,后者根据构筑物的极限状态方程进行逆分析,反求待定参数或随机变量。反分析在部分输入变量待定的情况下尤为适用,亦称作逆可靠性分析,旨在解决随机变量部分统计参数缺失或不完备的难题。此外,在给定目标可靠指标下,根据构筑物重要性等级可以校准安全系数。一次逆可靠性法^[1-2](inverse FORM)是目前解决逆可靠性问题的常用方法,在一次二阶矩法^[3]的基础上发展而来。Der Kiureghian等^[1]给出了逆可靠性算法的迭代公式, Li等^[2]将该算法推广至多个设计参数的情况。

学者们对逆可靠性算法在工程中的应用进行了探讨。姬建等^[4-5]基于一次逆可靠性法对多种土工构筑物(土质边坡、条形浅基础、浅埋圆形隧道)进行概率优化计算。蒋水华等^[6]基于一次逆可靠性算法,对土坡坡角进行了分析。Winterstein等^[7]基于一次逆可靠性法原理,建立了环境等值线法,着重分析了概率密度等值线(Probability Density Contour, PDC)并用于描述极端结构响应,奠定了一次逆可靠性分析的特殊地位。目前,环境等值线法多应用于海洋工程的逆可靠性分析中。Zhao等^[8]将该算法用于推求与目标重现期相应的海洋浮式结构物的设计荷载。而环境等值线法在岩土工程中的应用尚未见报道。为了更直观地定义与求解可靠指标,吴兴征等^[9-10]在随机变量原始物理空间下构建了几何可靠性算法,将发散概率密度等值面与单倍标准差概率密度等值面之间的相对关系定义为可靠指标,称为几何可靠指标。此指标在原理上与常规的可靠指标定义无异,区别在于求解的算法,主要表现在:1)几何可靠性算法构建于具有明确物理意义的空间内,无需对随机变量进行标准化处理;2)因采用一系列离散点近似表述概率密度等值线(PDC),几何可靠性算法对任意非正态联合分布均适用;3)几何可靠性算法将常规可靠性寻优求解

的过程替换为PDC的几何演化,使求解过程更简明。

笔者将几何可靠性算法与极限状态分析相结合来构建逆可靠性求解模型,并应用于土工构筑物的承载性能评估。以两变量随机问题为研究对象,给定目标几何可靠指标,假定某一随机变量的均值(或变异系数)为未知,推求出两个随机变量的联合PDC,通过迭代求解出该待定均值(或变异系数)。这种给定几何可靠指标而推求未知量的算法称作逆几何可靠性算法,力求解决实际工程中检测数据缺失或无法全面给定所有参数的概率密度分布问题。分别以京畿地区3个建筑场地(顺义、后沙峪、燕郊上上城)为例,整理相应土工构筑物(灌注桩、抗浮锚杆、CFG桩单桩)的现场荷载-位移测试数据(共697组),采用两参数回归形式(幂函数)对每一条荷载-位移曲线测试结果进行拟合。首先,假定幂函数回归参数间的相关性,采用高斯Copula函数联合分布模型构建并推求给定目标可靠指标的PDC;然后,结合极限状态方程推求未知随机变量的均值(或变异系数);最后,求解相应可靠指标下构筑物的安全系数。由此可确保在满足目标可靠指标的前提下,依据构筑物重要等级校正安全系数。

1 逆几何可靠性算法

土工构筑物安全性评价中,逆几何可靠性算法基于目标可靠指标求解描述随机分布函数的待定参数,如正态分布的均值或变异系数,或者其他分布参数。其包括3个构成部分:极限状态方程与极限状态线、联合概率密度函数与PDC、未知参数的推求工况及其求解过程。

1.1 构筑物的极限状态方程及极限状态线

正常使用状态下构筑物的极限状态方程 g 可定义^[11]为

$$g = Q_{ua} - Q_{LD} \quad (1)$$

式中: Q_{ua} 为构筑物的容许承载力; Q_{LD} 为施加荷载。当 g 为负值时,构筑物处于失效状态。若采用幂函数进行回归实测得到的荷载-位移($Q-s$)曲线, Q_{ua} 表

示为

$$Q_{ua} = p_1 s_a^{p_2} \quad (2)$$

式中: p_1 、 p_2 为 Q - s 曲线由幂函数拟合的回归参数。其中, p_1 为加载系数, 为正值, 其大小取决于加载水平; p_2 为幂指数, 为非负值。理论上讲, p_2 的值应该小于 1, 对应于 Q 与 s 关系呈凸曲线 (p_2 等于 1 时, Q 与 s 呈线性关系)。 s_a 为容许位移值, 正常使用极限状态下该值可预先给定。同一场地通常得到多条 Q - s 测试曲线, 由于土体侧摩阻力及桩端阻力的空间变异性^[12-13], 这些曲线的回归参数间表现出离散性, 故将回归参数集视作随机变量。

基于传统安全系数 F_s 的定义, 平均承载能力与平均设计加荷之间的关系可写为

$$F_s = \frac{Q_{ua}}{Q_{LD}} \quad (3)$$

一旦定义了随机变量, 基于式(1)的极限状态方程, 根据变动参数法可求出极限状态线, 具体算法参见文献[10]。

1.2 联合概率密度函数与 PDC

1.2.1 标准正态空间下的联合 PDC

当可靠指标 β 已知时, 以二元随机变量为例, 给出推求随机变量联合 PDC 的方法。在常规一次可靠性算法中, 可靠指标 β 表示标准正态空间 (u_1 - u_2) 中某一圆形的特定半径。标准正态分布是以 0 为均值、以 1 为标准差的正态分布, u_1 、 u_2 分别为标准正态空间中的随机变量。若给定目标可靠指标 β_i , 则可在标准正态空间中确定半径为 β_i 的 PDC (即概率密度等值圆形), 如图 1 所示。显然, β_i 值越高, 其对应的 PDC 轮廓也越大。

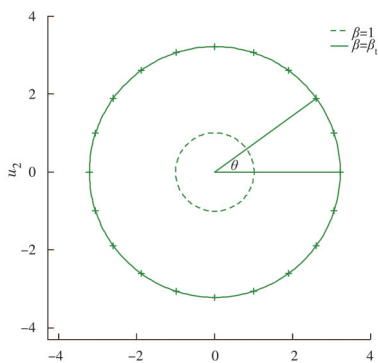


图1 标准正态坐标系下给定可靠指标的 PDC 定义

Fig. 1 Definition of the PDC for a given reliability index in a standard normal coordinate system

由此, 二元独立随机变量 $U = (u_1, u_2)$ 可随角度 θ 变换, 并表示为

$$u_1^2 + u_2^2 = \beta_i^2 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \beta_i \cos \theta \\ u_2 = \beta_i \sin \theta \end{cases} \quad (4)$$

式中: θ 为角度, 介于 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间。

依据《中国建筑结构可靠度设计统一标准》(GB 50068—2018)^[14]中给定的某一目标可靠指标, 如 $\beta_i = 3.2$, 在二元标准正态空间中, 通过设定不同的角度 θ , 即可确定与该可靠指标相对应的 PDC 上的 n 个点 (图 1 中以加号“+”示意出 20 个离散点)。

1.2.2 原始物理空间下的联合 PDC

若已知随机变量的边缘分布和相关系数, 通过不同的联合分布模型, 构建原始物理空间中随机变量的 PDC, 更易被工程技术人员理解。该空间中的所有随机变量均具有明确的物理意义, 可由前述标准正态空间中的 PDC 通过联合分布模型变换得到。以采用高斯 Copula 函数^[15]联合分布模型构建 PDC 为例进行说明, 尽管建议的算法并不局限于此函数。Copula 函数又称为联结函数, 它将边缘分布函数和依存关系分开考虑, 且不要求变量服从同种边缘分布, 具有较强的灵活性。

将标准正态空间中不相关的随机变量转换为 W 空间中相关的随机变量^[16], 表示为

$$\begin{cases} w_1 = \Phi(u_1) \\ w_2 = \Phi(\rho u_1 + \sqrt{1-\rho^2} u_2) \end{cases} \quad (5)$$

式中: Φ 为标准正态分布的累计分布函数; ρ 为标准正态空间中随机变量 u_1 与 u_2 之间的相关系数。基于高斯 Copula 函数变换, 可建立式(5)中 w_i 与 u_i 的函数关系, 其中 $i=1$ 或 2 , 与此有关的表达式参见附录。

进而将 W 空间中相关的随机变量映射到含有 x_1 和 x_2 的原始物理空间 X 中, 表示为

$$\begin{cases} x_1 = F_1^{-1}(w_1) \\ x_2 = F_2^{-1}(w_2) \end{cases} \quad (6)$$

式中: F_i^{-1} 为随机变量累计分布的逆函数。

可见, 基于高斯 Copula 函数的变换模型可以将标准正态空间中相互独立的随机变量 $U = (u_1, u_2)$ 转换为原始物理空间中具有相依关系的随机变量 $X = (x_1, x_2)$, 此过程要求给定每个随机变量的边缘分布及随机变量间的相关系数。由此, 可靠指标给定时可得到原始物理空间中随机变量的 PDC 构型, 如图 2 所示。亦即将标准正态空间中 PDC 上的 n 个点通过高斯 Copula 函数联合分布模型转化为原始物理空间中的 n 个点并连线, 当 n 趋于无限大时, 该轮廓线无限接近于 $\beta = \beta_i$ 时实际的 PDC 形状 (图 2 以乘号“×”示意出 20 个离散点)。这种离散化近似体现了回归参数可服从任意概率密度分布形式 (如

参数化或非参数化联合分布)的灵活性。随着 β_1 值的增大,其对应的PDC轮廓逐渐扩张。

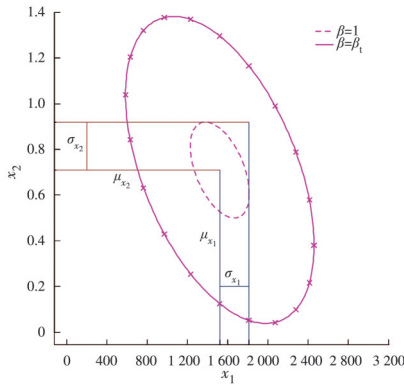


图 2 高斯 Copula 函数变换后原始物理空间随机变量的 PDC
Fig. 2 PDC of random variable in the original physical coordinate system via a Gaussian Copula function transformation

1.3 逆可靠性分析步骤与求解工况

给定不同的目标可靠指标,得到扩张程度不同的PDC。由于可靠指标在几何上度量了回归参数的联合PDC与极限状态线之间的偏差,PDC的扩张最终被极限状态线限定。此外,PDC的形状还取决于随机变量的边缘分布类型及其分布参数,以及随机变量间的相关特性。在逆可靠性分析中,可靠指标 β_1 已知,且随机变量的分布类型给定,若描述随机分布的部分参数未知,则可联合PDC形状与大小推求得出,由该等值线与极限状态线的相切位置可得到未知分布参数,此外,可求出构筑物满足特定性能的安全系数。

逆几何可靠性算法的具体求解流程如图 3 所示,其由 3 个模块组成:1)PDC 的推求;2)极限状态线的构建;3)通过几何演化求解描述随机变量的未知参数及构筑物的安全系数。

此处 PDC 与极限状态线相切位置是通过判断一个点(位于极限状态线上)是否在任意多边形(PDC)内部来进行的。若在 R 语言中,可通过调用

ptinpoly 包中的 pip2d 函数来实现^[17]。

在逆可靠性分析中,假定幂函数回归的 2 个随机变量 p_1 与 p_2 之间的相关系数 ρ 已知,且给定目标可靠指标 β_1 ,可能存在 4 种求解工况。

工况 1:假定某一随机变量(p_1 或 p_2)的概率密度服从正态分布,且给定该分布的变异系数 δ (标准差 σ 与均值 μ 之比),待求此分布的均值。设定随机变量的取值范围为 $(0, p_{1 \max})$ 和 $(0, p_{2 \max})$,绘制出给定目标可靠指标的 PDC,沿着已知均值线(由大值到小值)进行 PDC 移动,PDC 的形状与大小将随着均值的改变而变化,直至找出其与极限状态线的切点,从而得到待求均值。

工况 2:仍假定某一随机变量(p_1 或 p_2)的概率密度服从正态分布,且给定该分布的均值,待求此分布的变异系数。变异系数的大小控制着 PDC 的扁平程度,扁平程度将随着变异系数的增大(由小值到大值)而改变,直至 PDC 与极限状态线相切,得到待求变异系数。

工况 3:给定 p_1, p_2 均服从最优分布,推求构筑物的安全系数 F_s 。将随机变量 p_1, p_2 的均值代入式 (3),得到构筑物的安全系数。可见,确定性安全系数的推求并不能考虑到变量的分布类型。这种情况下,仍可绘制出给定目标可靠指标下的 PDC,便于直观地判定其与极限状态线间的相对距离。

工况 4:假定某一随机变量(p_1 或 p_2)的概率密度服从非正态分布,且给定该分布的某一模型参数,待求此分布的另一模型参数。给定目标可靠指标,相应 PDC 的位置与形状随着未知模型参数的改变而变化,直至 PDC 与极限状态线相切,得到待求模型参数。这与工况 1 的求解类似,即这里的逆几何可靠性算法可适用于多种边缘分布类型。

4 种求解工况下随机变量的已知量与未知量如表 1 所示。其他求解工况还可以有相关系数 ρ 未知时的推求等。

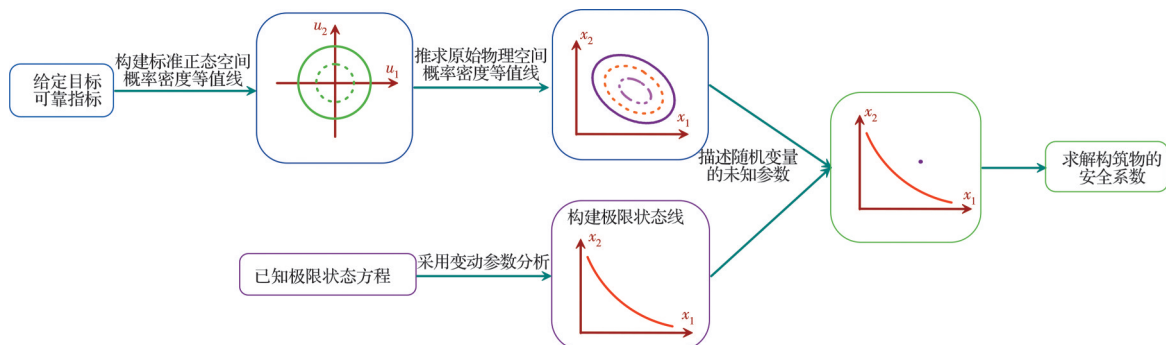


图 3 逆几何可靠性算法的计算流程

Fig. 3 Flowchart of the inverse geometric reliability algorithm

表 1 4种求解工况下二元随机变量的已知量与未知量

Table 1 Known and unknown parameters for bivariate in the four solving cases

工况	已知量	未知量	备注
1	β_1, ρ 、正态分布、 $\mu_{p_2}, \delta_{p_1}, \delta_{p_2}$	μ_{p_1}	μ_{p_1} 为 p_1 的均值
2	β_1, ρ 、正态分布、 $\mu_{p_1}, \mu_{p_2}, \delta_{p_2}$	δ_{p_1}	μ_{p_2} 为 p_2 的均值
3	β_1, ρ 、最优分布及其分布参数、 μ_{p_1}, μ_{p_2}	F_s	δ_{p_1} 为 p_1 的变异系数
4	β_1, ρ 、非正态分布、该分布其一模型参数	其二模型参数	δ_{p_2} 为 p_2 的变异系数

2 算例分析

结合北京市建设工程质量第一检测所地基室完成的京畿地区 3 个场地(钻孔灌注桩、锚杆、CFG 桩单桩)的荷载-位移测试成果^[10,18]进行分析。除非特别说明,计算中目标可靠指标 β_1 设定为 3.2。

2.1 最优边缘分布与相关系数

各场地地下多条荷载-位移曲线各不相同,则幂函数回归参数 p_1 (或 p_2) 组成一个数据集(随机变量),服从的候选两参数边缘分布概型有正态(Normal)、对数正态(Log-normal)、伽玛(Gamma)、耿贝尔(Gumbel)和威布尔(Weibull)。

各场地地下随机变量的最优边缘分布可通过 Akaike 信息准则(Akaike Information Criterion, AIC)^[19]判定,是在极大似然估计原理的基础上提出的一种模型选择准则,表达式为

$$AIC = -2\ln(\tilde{L}) + 2p \quad (7)$$

式中: $\ln(\tilde{L})$ 为极大似然函数; p 为模型参数个数(此处为 2)。当 AIC 最小时,对应于最优统计模型。

各场地地下随机变量服从的最优边缘分布类型如表 2 所示^[10],具体分布参数值在表中括号内给出。随机变量 p_1 与 p_2 之间的相关系数 ρ 可采用场地水平下的经验数据,文献[20]给出了多个场地下方的幂函数回归参数间的 ρ ,其均值为 -0.77。

表 2 各场地幂函数回归参数的最优分布类型

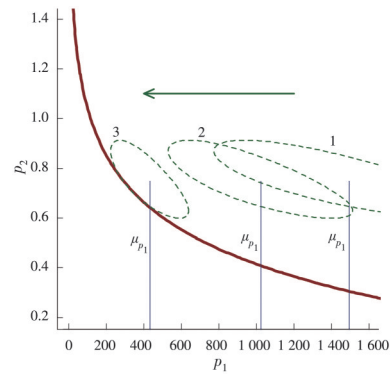
Table 2 Best-fit distribution type for the power-law regression parameters at each site

场地类型	测试数量	p_1 最优分布	p_2 最优分布
灌注桩	23	正态 (893.29; 98.25)	对数正态 (-0.30; 0.07)
锚杆	620	正态 (36.01; 1.79)	对数正态 (-0.38; 0.05)
CFG 桩	54	对数正态 (5.61; 0.16)	耿贝尔 (0.70; 0.05)

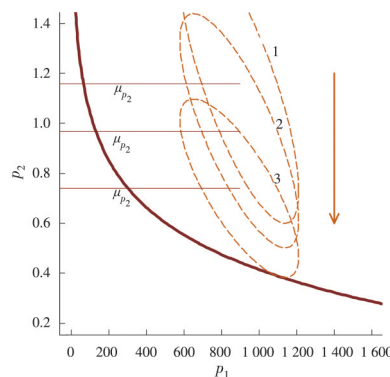
2.2 灌注桩的 PDC

钻孔灌注桩竖向抗压承载力检测项目位于北京市顺义区南法信镇,共完成了 23 个荷载-位移测试。

假定 p_1 服从正态分布且变异系数为 0.15,但均值未知,而 p_2 服从表 2 中的最优分布。通过逆几何可靠性算法可求出 p_1 均值为 431.03,灌注桩的安全系数为 1.47,求解过程中 3 个 PDC 的几何演化如图 4(a)所示。计算开始时, p_1 均值可设置为较大值,此时特定可靠指标($\beta = 3.2$)下的 PDC 与极限状态线仍有相当的距离,随着均值的减小,PDC 将逐渐接近极限状态线,直至相切。



(a) p_1 均值未知



(b) p_2 均值未知

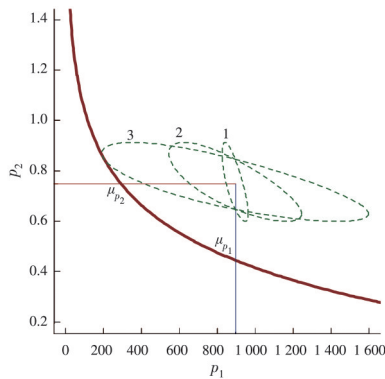
图 4 均值未知情况下灌注桩回归参数的 PDC

Fig. 4 PDC of regression parameters in the case of cast-in-place pile when the mean value is unknown

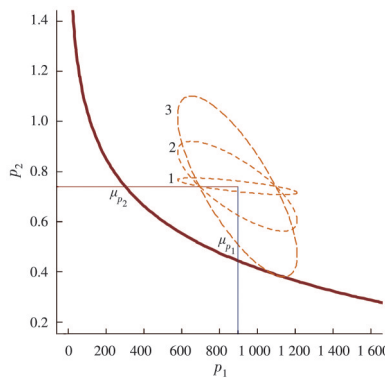
假如 p_2 服从正态分布,其变异系数设定为 0.15 但均值未知,而 p_1 服从表 2 中的最优分布。随着 p_2 均值的变化(由大值到小值),PDC 将演化至与极限状态线相切,此时的均值即为待求量。求出 p_2 均值为 0.74,灌注桩安全系数为 3.02,PDC 如图 4(b)

所示。

若灌注桩的 p_1 与 p_2 均服从正态边缘分布,且其均值已知,当 p_1 变异系数未知而 p_2 变异系数为 0.15 时,由图 5(a)可知,PDC 随着 p_1 变异系数的增大而发生几何构型演化,当 PDC 与极限状态线相交时,得到变异系数为 0.78。当 p_2 变异系数未知而 p_1 变异系数为 0.15 时,由图 5(b)可知,PDC 随着 p_2 变异系数的增大而发生形状改变,进而求出 p_2 变异系数为 0.49。



(a) p_1 变异系数未知



(b) p_2 变异系数未知

图 5 变异系数未知情况下灌注桩回归参数的 PDC

Fig. 5 PDC of regression parameters in the case of cast-in-place piles when the coefficient of variation is unknown

若 p_1 和 p_2 均为已知随机变量且服从表 2 中给出的最优分布形式,给定可靠指标 β_t 下的 PDC 如图 6 所示。此时若将 p_1 和 p_2 的均值代入式(3),可求出灌注桩安全系数为 3.13。

2.3 锚杆的 PDC

抗浮锚杆抗拔承载力检测项目位于北京市顺义区后沙峪村,共完成了 620 个荷载-位移测试。若 p_2 服从表 2 中给出的最优分布,假定 p_1 服从正态分布,其变异系数为 0.15 但均值未知,通过逆几何可靠性算法可求出 p_1 均值为 48.32,抗浮锚杆安全系数为 1.72。均值未知的求解过程中部分 PDC 如图

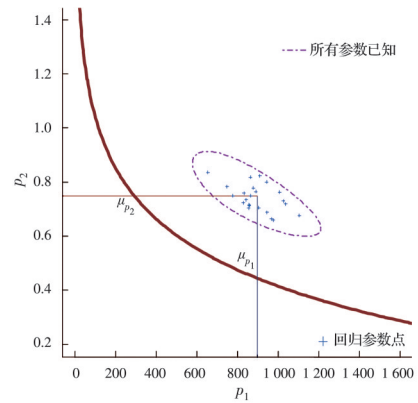
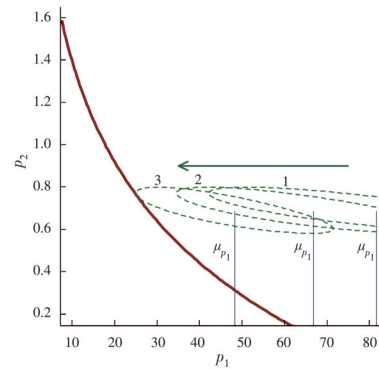


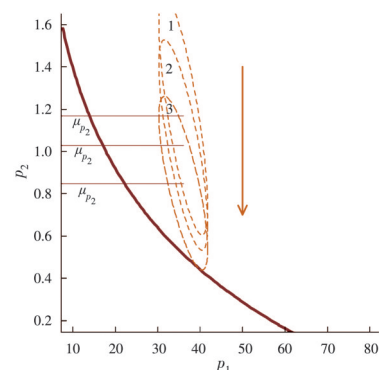
图 6 最优分布情况下灌注桩回归参数的 PDC

Fig. 6 PDC of regression parameters in the case of cast-in-place pile when the best-fit distribution is followed

7(a)所示。若 p_1 服从表 2 中给出的最优分布,假定 p_2 为正态分布,其变异系数为 0.15 但均值未知,可求出 p_2 均值为 0.85,抗浮锚杆安全系数为 1.63。求解过程中的部分 PDC 如图 7(b)所示。



(a) p_1 均值未知



(b) p_2 均值未知

图 7 均值未知情况下锚杆回归参数的 PDC

Fig. 7 PDC of regression parameters in the case of anchoring piles when the mean value is unknown

假定 p_1 和 p_2 均为已知随机变量且服从表 2 中给出的最优分布时,给定可靠指标 β_t 下的 PDC,如图 8 所示,求得相应的抗浮锚杆安全系数为 1.28。

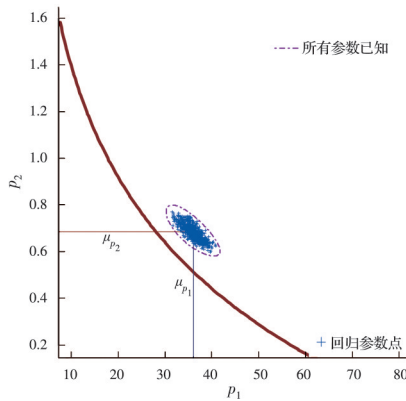
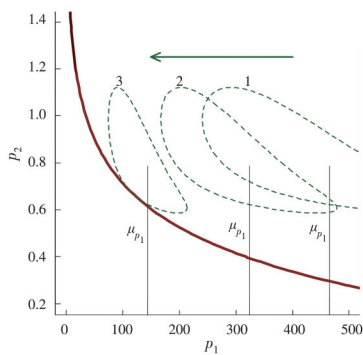


图 8 最优分布情况下锚杆回归参数的 PDC

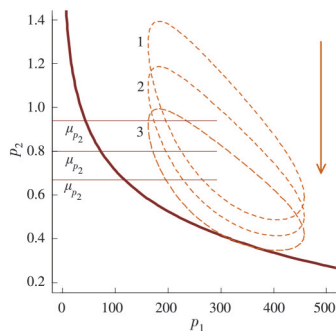
Fig. 8 PDC of regression parameters in the case of anchoring piles when the best-fit distribution is followed

2.4 CFG 桩单桩的 PDC

CFG 桩单桩竖向抗压承载力检测项目位于河北燕郊上上城,共进行了 54 个荷载-位移测试。假定 p_2 服从最优分布, p_1 为正态分布但其均值未知时,由逆几何可靠性算法求出 p_1 均值为 144.35,CFG 桩单桩安全系数为 1.61。未知均值求解过程中的部分演化 PDC 如图 9(a)所示。由图 9 可见,随着未知均值的变化,PDC 的位置与形状发生相应改变,直至与极限状态线接触。



(a) p_1 均值未知



(b) p_2 均值未知

图 9 均值未知情况下 CFG 桩单桩回归参数的 PDC
Fig. 9 PDC of regression parameters in the case of CFG single-piles when the mean value is unknown

若 p_1 服从最优分布,假定 p_2 服从正态分布但均值未知时,求出 p_2 均值为 0.67,CFG 桩单桩安全系数为 2.44。未知均值求解过程中的部分演化 PDC 如图 9(b)所示。

假定 p_1 和 p_2 均为已知随机变量且服从表 2 中给出的最优分布形式时,给定可靠指标 β_t 下的 PDC,如图 10 所示。同样可求出 CFG 桩单桩的安全系数为 3.98。

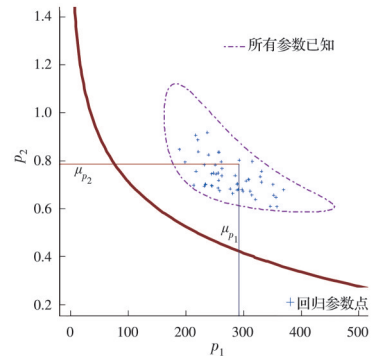


图 10 最优分布情况下 CFG 桩单桩回归参数的 PDC

Fig. 10 PDC of regression parameters in the case of CFG single-piles when the best-fit distribution is followed

若 CFG 桩单桩的 p_2 服从最优边缘分布,即两参数 Gumbel 分布形式,包括位置参数与形状参数,当 p_2 的位置参数未知而形状参数为 0.05 时,由图 11(a)可知,PDC 随着 p_2 位置参数的减小而发生几何构型演化,PDC 与极限状态线相交时得到位置参数为 0.52。当 p_2 的形状参数未知而位置参数为 0.70 时,由图 11(b)可知,PDC 随着 p_2 形状参数的增大而发生形状改变,进而求出 p_2 的形状参数为 0.42。

2.5 算法验证

以双变量正态联合分布为例,选取文献[10]中由几何可靠性正分析算法求出的可靠指标与相关系数进行验证。采用逆几何可靠性算法求解随机变量 p_1 的均值,求得 3 个场地下 p_1 均值分别为 863.23、36.17、274.11,与文献[10]给出的随机变量 p_1 的实际均值(分别为 893.29、36.01、275.94)较为接近。可见,逆几何可靠性算法在土工构筑物安全性评价中具有一定精度。

该算法基于 R 语言平台进行编程实施,可在数秒内完成计算。代码编写主要包括:1)由已知量确定联合分布 PDC 构型上的离散点,通过未知量的增减实现 PDC 构型的平移;2)采用等值线 Contour 函数构建极限状态线^[10];3)采用 pip2d 函数进行 PDC 与极限状态线相切位置的判定。

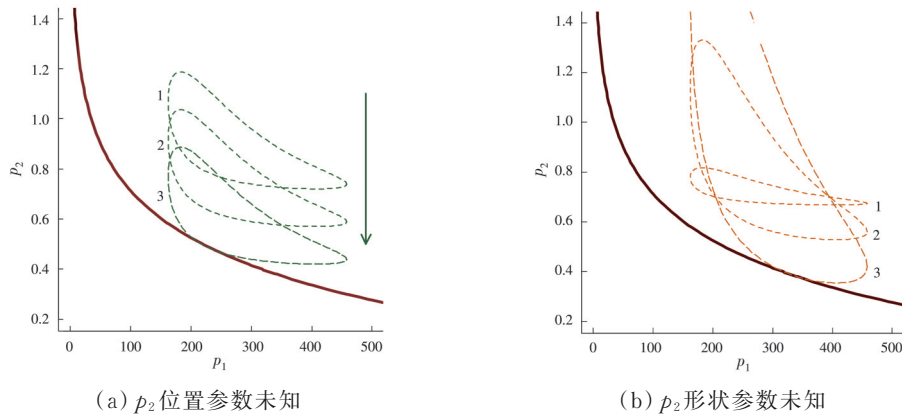


图11 概率分布模型参数未知时CFG桩单桩回归参数的PDC

Fig. 11 PDC of regression parameters in the case of CFG single-piles when the model parameter of a probability distribution is unknown

3 给定目标可靠指标下各场地的安全系数

根据《建筑结构可靠度设计统一标准》(GB 50068—2018)^[14],不同构筑物等级下发生延性破坏模式时对应的可靠指标 β 可分别取为2.7(次要)、3.2(一般)、3.7(重要)。分别求解出 p_1 均值未知(工况1)、 p_2 均值未知(工况2)、 p_1 和 p_2 已知且服从最优分布(工况3)时相应的安全系数,如表3所示。

可以看出,随着目标可靠指标量值的增大,计算得到的安全系数逐渐变大,尤其是 p_2 均值未知的情况下。应当指出,安全系数由式(3)计算求出,其中 Q_{ua} 的值可由 p_1 和 p_2 的均值代入式(2)得到。这里的算法使安全系数和可靠指标相互对应,可用于给定目标可靠指标时构筑物安全系数的校正^[21],为建立确定性设计和可靠性设计安全判据的定量关系提供了有效工具。

表3 不同可靠指标下对应的安全系数

Table 3 Safety factors when given different reliability indexes

场地类型	p_1 均值未知			p_2 均值未知			p_1 和 p_2 服从最优分布		
	$\beta=2.7$	$\beta=3.2$	$\beta=3.7$	$\beta=2.7$	$\beta=3.2$	$\beta=3.7$	$\beta=2.7$	$\beta=3.2$	$\beta=3.7$
灌注桩	1.40	1.47	1.57	2.25	3.02	4.36	3.10	3.13	3.16
锚杆	1.53	1.72	1.78	1.43	1.63	1.91	1.28	1.28	1.29
CFG桩	1.52	1.61	1.72	1.96	2.44	3.28	3.64	3.98	4.43

4 结论

结合京畿地区3个典型场地的荷载-位移测试结果,采用幂函数构建各场地测试曲线的回归参数集。将回归参数集视作随机变量,假定描述随机变量的某个正态分布参数(均值或变异系数)未知,推求原始物理空间下与目标可靠指标相应的联合PDC。同时,结合正常使用极限状态线得到正态分布的未知均值(或变异系数),并求出构筑物的安全系数。将安全系数与可靠指标相结合,根据给定可靠指标即可判断构筑物的安全性,且充分考虑输入变量的随机性,确保构筑物安全。提出的逆几何可靠性算法对于求解非正态边缘概率密度分布的未知参数及基于非高斯Copula函数的联合分布模型

变换等情况均适用。对特定案例分别采用几何可靠性分析的正算法与逆算法得到互为验证的结果,说明通过逆几何可靠性算法实现土工构筑物的未知量直观推求与设计核算是可行的。

基于构筑物施工验收的荷载-位移检测结果,建议的逆可靠性方法主要针对设计阶段。土工构筑物的极限状态受到地质条件、物理力学参数、破坏机理、地下水及地震等影响,材料性能劣化或构件性能损伤导致设计基准期内构筑物的抗力发生变化,构筑物在服役期的时变目标可靠指标的确定及逆分析算法有待研究。然而,该算法目前仅局限于低元随机变量的情况,多元问题的求解有待进一步深入研究。

参考文献

- [1] DER KIUREGHIAN A, ZHANG Y, LI C C. Inverse reliability problem [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1994, 120(5): 1154-1159.
- [2] LI H, FOSCHI R O. An inverse reliability method and its application [J]. *Structural Safety*, 1998, 20(3): 257-270.
- [3] HASOFER A M, LIND N C. Exact and invariant second-moment code format [J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1974, 100(1): 111-121.
- [4] JI J, ZHANG C S, GAO Y F, et al. Reliability-based design for geotechnical engineering: An inverse FORM approach for practice [J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, 111: 22-29.
- [5] 姬建, 张哲铭, 夏嘉诚, 等. 基于逆可靠度分析的隧道开挖面极限支护压力优化设计[J]. *岩土工程学报*, 2021, 43(6): 1-9.
JI J, ZHANG Z M, XIA J C, et al. Inverse reliability-based design of limit support pressure for tunnel face stability [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2021, 43(6):1-9. (in Chinese)
- [6] 蒋水华, 刘贤, 黄发明, 等. 基于一阶逆可靠度方法的空间变异土坡坡角设计[J]. *岩土工程学报*, 2021, 43(7): 1245-1252.
JIANG S H, LIU X, HUANG F M, et al. Reliability-based design of slope angles for spatially varying slopes based on inverse first-order reliability method [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2021, 43(7): 1245-1252. (in Chinese)
- [7] WINTERSTEIN S R, UDE T C, CORNELL C A, et al. Environmental parameters for extreme response: Inverse FORM with omission sensitivity[C]// *Proceedings of the International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSAR-93*, 1993.
- [8] ZHAO Y L, LIU D H, DONG S. Estimating design loads with environmental contour approach using copulas for an offshore jacket platform [J]. *Journal of Ocean University of China*, 2020, 19(5): 1029-1041.
- [9] WU X Z. Geometric reliability analysis applied to wave overtopping of sea defences [J]. *Ocean Engineering*, 2015, 109: 287-297.
- [10] 吴兴征, 王瑞凯, 辛军霞. 特定场地下土工构筑物的几何可靠性分析[J]. *岩土力学*, 2020, 41(6): 2070-2080.
WU X Z, WANG R K, XIN J X. Geometric reliability analysis of geotechnical structures at a specific site [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2020, 41(6): 2070-2080. (in Chinese)
- [11] 辛军霞, 吴兴征, 高伟, 等. 基于Copula函数的CFG桩复合地基荷载-变形曲线的概率分析[J]. *岩土力学*, 2016, 37(Sup1): 424-434.
XIN J X, WU X Z, GAO W, et al. Copula-based analysis of load-displacement curves of cement-fly ash-gravel pile [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, 37(Sup1): 424-434. (in Chinese)
- [12] 张峰, 周峰, 王旭东. 成层地基层中单桩竖向承载力鲁棒性设计[J]. *岩土力学*, 2017, 38(11): 3311-3318.
ZHANG F, ZHOU F, WANG X D. Robust geotechnical design of a single pile under vertical loads in layered soils [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2017, 38(11): 3311-3318. (in Chinese)
- [13] TANG C, PHOON K K. Statistics of model factors in reliability-based design of axially loaded driven piles in sand [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2018, 55(11): 1592-1610.
- [14] 建筑结构可靠度设计统一标准: GB 50068—2018 [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2018.
Unified standard for reliability design of building structures: GB 50068—2018 [S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2018. (in Chinese)
- [15] NELSEN R B. Archimedean copulas [M]// *An Introduction to Copulas*. New York: Springer New York, 1999: 89-124.
- [16] MONTES-ITURRIZAGA R, HEREDIA-ZAVONI E. Environmental contours using copulas [J]. *Applied Ocean Research*, 2015, 52: 125-139.
- [17] MAISOG J M, WANG Y, LUTA G, et al. Ptinpoly: Point-in-polyhedron test (2D and 3D) [Z/OL]. R package, version 2.0, 2012. <http://ptinpoly.pbworks.com>.
- [18] 吴兴征, 王瑞凯, 辛军霞, 等. 特定场地下土工构筑物荷载变形曲线的概率密度分布[J]. *工程质量*, 2017, 35(9): 41-45, 60.
WU X Z, WANG R K, XIN J X, et al. Probability density distribution of load deformation curves of geotechnical structures at a specific site [J]. *Construction Quality*, 2017, 35(9): 41-45, 60. (in Chinese)
- [19] AKAIKE H. A new look at the statistical model identification [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, 19(6): 716-723.
- [20] WU X Z, XIN J X. Probabilistic analysis of site-specific load-displacement behaviour of cement-fly ash-gravel piles [J]. *Soils and Foundations*, 2019, 59(5): 1613-1630.
- [21] 陈祖煜. 建立在相对安全率准则基础上的岩土工程可靠度分析与安全判据[J]. *岩石力学与工程学报*, 2018, 37(3): 521-544.
CHEN Z Y. Reliability analysis and safety criterion in geotechnical engineering based on the index of safety margin [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, 37(3): 521-544. (in Chinese)
- [22] ROSENBLATT M. Remarks on a multivariate transformation [J]. *The annals of mathematical statistics*, 1952, 23(3): 470-472.
- [23] WU L. Tuning the bivariate meta-Gaussian distribution conditionally in quantifying precipitation prediction uncertainty [J]. *Forecasting*, 2020, 2(1): 1-19.

附录 A: 基于高斯 Copula 函数的变换

以二元随机变量为例, Rosenblatt 变换^[1]可将原物理空间中相关的随机变量 $X=(x_1, x_2)$ 转换为标准正态空间 U 中不相关的随机变量 $U=(u_1, u_2)$, 该变换写为

$$\begin{cases} \Phi(u_1) = F_{x_1}(x_1) \\ \Phi(u_2) = F_{x_2|x_1}(x_2|x_1) \end{cases} \quad (\text{A1})$$

式中: F 为随机变量的累计分布函数。而对于原始物理空间中相关的随机变量 $X=(x_1, x_2)$, 则可由 Rosenblatt 逆变换得到, 即

$$\begin{cases} x_1 = \Phi(u_1) \\ x_2 = F_{x_2|x_1}^{-1}(\Phi(u_2)|x_1) \end{cases} \quad (\text{A2})$$

由式(A2)可知, 通过 Rosenblatt 逆变换, 将定义在 U 空间中的独立随机变量 $U=(u_1, u_2)$ 映射为 W 空间(考虑变量相关性)中的随机变量 $W=(w_1, w_2)$ 。在 W 空间中, 随机变量 w_i 可表示为

$$\begin{cases} w_1 = \Phi(u_1) \\ w_2 = C_{x_2|x_1}^{-1}(\Phi(u_2)|w_1) \end{cases} \quad (\text{A3})$$

式中: C^{-1} 为 Copula 函数的逆变换。当 w_i 定义确定后, 原始物理空间中的环境变量 x_i 通过累计边缘分布函数的逆变换求得, 即式(6)。

Copula 函数主要分为 2 类^[2]: 椭圆 Copula 和阿基米德 Copula。椭圆 Copula 是描述随机变量间相关结构的常用 Copula 函数, 其中高斯 Copula 函数应用较为广泛, 选用高斯 Copula 函数。

二元高斯 Copula 函数的定义为

$$C(w_1, w_2) = \Phi(\varphi^{-1}(w_1), \varphi^{-1}(w_2); \rho) \quad (\text{A4})$$

式中: φ^{-1} 为标准正态分布的逆函数。

对于二元随机变量情况, 条件高斯 Copula 函数的表达式定义为^[3]

$$C(w_2|w_1) = \frac{\partial C(w_1, w_2)}{\partial w_1} = \Phi\left(\frac{\varphi^{-1}(w_2) - \rho\varphi^{-1}(w_1)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (\text{A5})$$

由式(A3)与(A5)可得到

$$\Phi(u_2) = \Phi\left(\frac{\varphi^{-1}(w_2) - \rho\varphi^{-1}(w_1)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (\text{A6})$$

且

$$\varphi^{-1}(w_2) = \rho\varphi^{-1}(w_1) + \sqrt{1-\rho^2}u_2 = \rho u_1 + \sqrt{1-\rho^2}u_2 \quad (\text{A7})$$

由此可得式(5)中的 w_2 。

附录参考文献:

- [1] ROSENBLATT M. Remarks on a multivariate transformation [J]. The annals of mathematical statistics, 1952, 23(3): 470-472.
- [2] NELSEN R B. Archimedean copulas [M]//An Introduction to Copulas. New York: Springer New York, 1999: 89-124.
- [3] WU L. Tuning the bivariate meta-Gaussian distribution conditionally in quantifying precipitation prediction uncertainty [J]. Forecasting, 2020, 2(1): 1-19.