

DOI: 10.11835/j.issn.2096-6717.2022.024



开放科学(资源服务)标识码 OSID:



薄壁杆件屈曲模态分析的力特征约束有限条法

金声¹, 李政¹, 赵国¹, 黄浩¹, 向阳², 李占杰³

(1. 重庆大学土木工程学院; 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045; 2. 重庆大学建筑规划设计研究总院有限公司重庆 400045; 3. 纽约州立大学理工学院工程系, Utica 13502, USA)

摘要: 整体、畸变、局部等基本变形模式的划分是条理化开展薄壁杆件工程计算的必要手段。薄壁杆件的基本变形模式传统上基于简化应力-应变关系, 采用变形、应变等几何特征进行定义, 不利于因应复杂化应力-应变关系。提出一套完全基于力特征和正交完备性原则的基本模式定义。与广义梁理论和约束有限条法相比, 提出的整体、畸变、局部3种基本变形模式关于刚度严格正交, 且完整覆盖薄壁杆件全变形域。基于该定义实现了针对薄壁杆件有限条模型的屈曲模态分解和识别。算例表明, 提出的基本模式定义和屈曲模态分析方法具有开、闭口和折、曲线形截面的一致适应能力, 剪应变和横向伸缩的影响在基本屈曲模式中得到合理表达, 曲线形截面薄壁构件具有与多边形截面薄壁构件一致的整体、畸变和局部屈曲机理。

关键词: 薄壁构件; 屈曲; 有限条法; 约束有限条法; 屈曲模态; 广义梁理论

中图分类号: TU311.2; TU391 文献标志码: A 文章编号: 2096-6717(2024)02-0100-08

A force-based constrained finite strip method for buckling modal analysis of thin-walled members

JIN Sheng¹, LI Zheng¹, ZHAO Guo¹, HUANG Hao¹, XIANG Yang², LI Zhanjie³

(1. School of Civil Engineering; Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China; 2. General Research Institute of Architecture & Planning Design Co., Ltd., Chongqing University, Chongqing 40045, P.R. China; 3. Department of Engineering, SUNY Polytechnic Institute, Utica 13502, USA)

Abstract: The separation and categorization of the basic “global (G), distortional (D), and local (L)” mode classes are necessary for systematical analysis and design of thin-walled members. This paper proposes a new set of basic mode definitions totally based on the orthogonal completeness principle and the force characteristics, which distinguish from the conventional deformation/strain shape-based definitions and are more compatible with complex stress-strain relationships. In contrast to the current general beam theory (GBT) and constrained finite strip method (cFSM), the proposed G, D, and L classes span the entire deformation space of the thin-walled member, and are strictly orthogonal to each other with respect to the stiffness of the member. Buckling mode decomposition and identification according to the proposed definitions are realized based on finite strip models of thin-wall members. Numerical validations confirm the applicability of the proposed method to open/

收稿日期: 2021-08-01

基金项目: 国家重点研发计划(2019YFD1101003); 中央高校基本科研业务费项目(2019CDXYTM0032)

作者简介: 金声(1975-), 男, 博士, 副教授, 主要从事薄壁结构计算理论研究, E-mail: civiljs@cqu.edu.cn.

Received: 2021-08-01

Foundation items: National Key Research and Development Program (No. 2019YFD1101003); Fundamental Research Funds for the Central Universities (No. 2019CDXYTM0032)

Author brief: JIN Sheng(1975-), PhD, associate professor, main research interest: thin-walled structures, E-mail: civiljs@cqu.edu.cn.

closed polygonal/curved cross-sections, and effects from shear and transverse extension deformations can be reasonably accommodated in the GDL classes. Further, the G, D, and L buckling mechanisms of curved cross-sections are consistent with those of the polygonal ones.

Keywords: thin-walled members; buckling; finite strip method; constraint finite strip method; buckling modes; generalized beam theory

正如“拉、弯、扭”等基本模式的划分,建立实体截面杆件的材料力学计算脉络划分薄壁杆件的“整体(G)、畸变(D)、局部(L)”等基本模式是条理化开展其工程分析的必要措施。例如,为确定薄壁杆件的稳定性能,注意到不同模式失稳的屈曲机理差异显著,而缺陷、屈曲后、材料弹塑性等因素对不同失稳模式的影响方式和作用效果也各不相同,因此对G、D、L等基本屈曲模式的界定尤为必要;在北美^[1]、澳大利亚^[2]和中国^[3]得到广泛研究和应用的直接强度法(DSM)^[4]就是直接基于这3种屈曲临界力确定稳定承载力的。薄壁构件的临界力等计算需综合考虑梁理论和板理论,因此难以建立具有普遍适应性的解析方法。采用壳单元的有限元法虽可得到满意的屈曲结论,但需在其耦合多种基本变形的大量屈曲解中寻找所需要的屈曲模式类别,较为繁琐且易发生误判。通过限定变形沿杆长的函数,有限条法(FSM)^[5]极大简化了一般壳有限元的模型和结论;特别地,所得到的有限条特征曲线(signature curve)以两个极小值点给出了DSM等稳定承载力计算所需的局部和畸变屈曲结论。利用了不同类别屈曲临界波长具有差异性这一屈曲特点,但未揭露它们屈曲机理的差异性,且并不总是有效^[6]。

广义梁理论(GBT)^[7-9]受到经典梁理论中弯曲与扭转模式特点(尤其是横截面正应变场间正交特点)的启发,通过推广,在板件数量多于3的薄壁杆件中导出横截面正应变场正交于弯、扭的畸变变形模式。鉴于基本模式定义对于建立实用杆件理论的基础性作用,GBT被视为薄壁杆件的基本“理论”而不仅仅是一种“方法”^[10]。例如,Ádány等^[11]将GBT模式定义引入FSM,提出约束有限条法(cFSM)实现对屈曲模式的客观选择和识别。GBT的G、D基本模式定义直接继承和发展自Euler-Bernoulli梁理论和Vlasov的开口薄壁梁扭转理论,经典梁理论与用于处理截面变形的板理论间的协调性值得探讨:例如,经典梁理论中,不同模式(如弯曲和扭转)变形关于杆件刚度正交,但GBT基本模式只关于部分刚度正交,会使分析中产生额外的耦合项。又如,剪应变和横向伸缩对各类屈曲存在一定影响,但在GBT的G、D、L模式中假定为零,带来闭口截面杆件扭转变形分类的困难^[12],并在考虑

较完整本构的有限元或有限条模型中造成显著的约束效应和偏高的临界力结论^[13];特别地,传统上应用于多边形截面的GBT模式定义不可应用于曲线形薄壁截面^[14]。针对上述问题,Jin等^[15]提出了一套不同于GBT的模式定义,并基于FSM实现了一种新的约束有限条法fFSM。fFSM将传统模式定义中易致“过约束”的部分变形特征规定替换为力特征规定。例如对于L模式,继承了传统上中线向平移为零这一变形特征规定,但对于G和D,则从力的角度做出规定:G、D模式是仅作用于中线方向的力荷载所致变形,这使得L与GD模式间关于考虑任意线性本构的杆件刚度严格正交。虽然Jin等^[15]在G、D模式中引入了剪应变的影响,但横向伸缩的影响未得到协同考虑,单列为E模式;此外,为满足模式分解的完备性,还补充了翘曲模式X。但E和X模式并未展现独立的工程应用意义,反而造成其方法的冗长和低效。一直以来,曲线形截面和多边形截面的模式定义在GBT中无法得到统一^[14, 16-17],Jin等^[15]借助曲线形截面的切线方向解决这个问题,但这也凸显了两类截面模式定义在自由度处理上的对立性。

利用新的力特征定义,在G、D模式中不仅引入剪应变影响,同时引入协同横向伸缩,仅需G、D、L即可完整覆盖薄壁构件全变形域,从而大幅简化实现的方法,并拓展其适用范围。对于采用多边形拟合的曲线形截面薄壁构件,该方法也无须借助额外切线方向的定义,实现了曲线形截面和多边形截面各屈曲模式内在机理的理论一致性。

1 模式定义

由 m 个平板件构成的开口多边形薄壁截面如图1所示,采用 n 个单元离散,节点数量为 $n+1$,其中交点数量为 $m-1$ 。在GBT和cFSM中,该截面的G和D模式总自由度数量同主节点(即交点和开口端节点)数量,计 $m+1$ 。文献[15]的fFSM采用不同的G和D定义:G和D是横截面中线向力作用下的变形,并保持零横向伸缩。对于图示截面,作用于各节点的中线向力具有 $m+n$ 个取值自由度(每个交点考虑两个中线向平移自由度,其他节点考虑一个),扣除 n 个单元的横向伸缩变形自由度,因此,

GD 模式共 m 个自由度,比 GBT/cFSM 的 GD 模式自由度数量少 1,原因是并未包含 GBT 轴向伸缩模式,文献[15]发现,这对 GD 模式屈曲分析结果的影响可忽略。

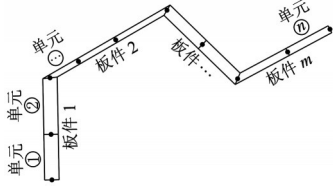


图 1 开口多边形薄壁截面的板件和单元离散

Fig. 1 Walls and elements of an open polygon thin-walled section

GBT 定义整体和畸变模式的原则之一,是各板件的面外变形由面内变形所带动,cFSM 对 GD 模式的中线向力限定继承了这一原则,但文献[15]对 GD 的零横向伸缩假定有必要予以解除。根据薄壁杆件中、长半波屈曲变形(以畸变和整体变形为主)的弹性力分布特点,本文采用一个力特征规则取代零横向伸缩规则:对于 GD 模式,规定中线向的力在每一平板件的横截面上是均匀施加的,如图 2 所示。这个力特征的规定不再强行约束横向伸缩,而就 GD 的自由度而言,每一板件具有一个中线向力的取值自由度,共计 m 个。

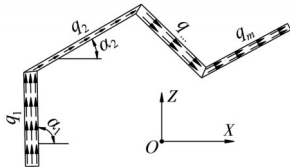


图 2 GD 模式的荷载特征

Fig. 2 Loading characteristics of the GD class

对于闭口或含闭室的薄壁截面,在 GBT 和 cFSM 中需引入额外的整体变形模式以考虑闭室的扭转剪应变。本方法因不作零剪应变假设,无须额外处理,参见文献[15]。

综上,提出模式定义原则 1:GD 模式是横截面中线向力作用下的变形,在任一板件横截面上,中线向力是均匀的。

G 和 D 模式通过拆分 GD 模式空间得到。文献[15]通过在 GD 模式的切向平移上应用“刚周边”原则得到 G,但该原则限制了横向伸缩,现放弃这一变形特征规定。先采用力特征原则定义 D 模式,再利用正交规则导出 G 模式。

GBT 的 D 模式是由正交于截面拉、弯、扭正应变场的特定正应变场导出的^[18]。溯源 GBT 关于 D 的最初理念^[7,9],在横截面上,其正应力和剪应力分

别是自平衡的。鉴于此,提出模式定义原则 2:作用在 D 模式一个横截面上的中线向力是自平衡的。

上述两个原则中,以关于力的两个假定“轴向外力为 0、横向外力均匀”分别替换传统的零剪应变和零横向伸缩假定,各板件弯曲及拉压时所协同发生的剪应变和横向伸缩在 GD 和 D 模式中得以引入,因此,不必专门定义相应模式,只需 G、D、L 这 3 种基本模式即可,即本文的模式定义原则 3:G、D 和 L 模式覆盖薄壁杆件全变形域。

G 模式可根据其与 D 的正交性得到,而 L 则根据其于 GD 的正交性得到。有必要对正交的力学意义予以明确。GBT 诸模式的正交原则并不统一,其 G、D、L 模式之间关于中面翘曲子刚度 C^M (薄壁中面翘曲相关,见文献[19])正交,但它们与剪切模式之间关于子刚度 D^M (文献[19],中面剪切相关)正交,而与横向伸缩模式之间的正交性则不可考。本文沿用 Euler-Bernoulli 和 Vlasov 经典梁理论基本变形模式(如:拉、弯、扭)间的正交原则,即模式定义原则 4:G、D、L 之间关于杆件刚度正交。

2 对薄壁杆件有限条模型的约束算法

有限条法采用纵向条单元离散薄壁杆件,如图 3 所示。为得到有限条特征曲线,每个节点(即条单元的一条侧边)考虑 3 个平移自由度和一个转动自由度,它们沿杆长的分布为单半波的三角函数。关于有限条法的详细说明可参考文献[20]。

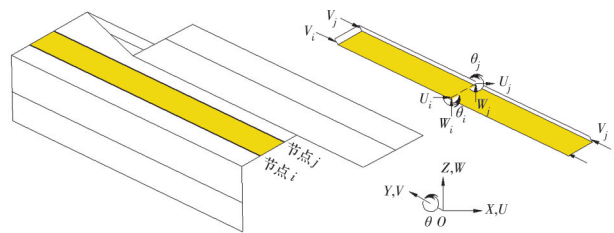


图 3 薄壁构件有限条模型的离散方法和自由度

Fig. 3 The finite strip discretization of a thin-walled member and the DOFs

在整体坐标系 X-Y-Z 中,薄壁构件有限条模型的整体刚度方程为

$$P = K_e \cdot \Delta \quad (1)$$

式中:位移列向量 Δ 元素数量为 $4k$ (k 为节点数),包括各节点的 X、Y、Z 向平移 U 、 V 、 W 及 Y 向转角 θ ;荷载列向量 P 是相应的节点力 N_x 、 N_y 、 N_z 及力矩 M ; K_e 是杆件的弹性刚度矩阵。

2.1 GD模式

有限条模型的荷载是定义在节点上的。将GD模式荷载定义(图2)中的均布力等效为节点力,以隶属于板件的节点*j*为例,作用在板件*i*横截面上集度为 q_i 的均布中线向力等效到节点*j*的集中力为

$$\begin{cases} N_{Xj(i)} = \cos \alpha_i \cdot A_{j(i)} \cdot q_i / 2 \\ N_{Yj(i)} = 0 \\ N_{Zj(i)} = \sin \alpha_i \cdot A_{j(i)} \cdot q_i / 2 \\ M_{j(i)} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: $A_{j(i)}$ 为板件*i*中所有毗邻节点*j*的单元总截面积;方位角 α_i 是在Y正平面上从X向到板件*i*截面中线方向的逆时针转角。

将方程(2)应用于所有节点并综合,得到GD模式变形的荷载列向量 P^{GD}

$$P^{GD} = J^{GD} \cdot q_w \quad (3)$$

式中: q_w 为各板件中线向力集度 $q_1, q_2 \dots q_m$ 所构成的列向量,这表明GD模式荷载的取值具有*m*个自由度。 $4k$ 行*m*列变换矩阵 J^{GD} 中各元素根据方程(2)描述的关系确定。

因此GD模式变形可写作

$$\Delta^{GD} = C^{GD} \cdot q_w \quad (4)$$

式中: $4k$ 行*m*列约束矩阵 C^{GD} 为

$$C^{GD} = K_e^{-1} \cdot J^{GD} \quad (5)$$

2.2 L模式

根据原则4,L模式与GD模式间关于刚度正交,因此

$$\{P^{GD}\}^T \cdot \Delta^L = 0 \quad (6)$$

将式(3)代入式(6),并注意到 q_w 取值的任意性,得

$$[J^{GD}]^T \cdot \Delta^L = 0 \quad (7)$$

所有满足方程(7)的 Δ^L 构成矩阵 $[J^{GD}]^T$ 的零空间。 J^{GD} 的秩为*m*, Δ^L 取值空间的维度是 $4k-m$,此即L模式的自由度。 Δ^L 的显式表达式可写作

$$\Delta^L = C^L \cdot \varphi^L \quad (8)$$

式中: φ^L 是一个任意的 $4k-m$ 元列向量, $4k \times (4k-m)$ 矩阵 C^L 诸列是矩阵 $[J^{GD}]^T$ 零空间的一组基,可利用对 $[J^{GD}]^T$ 的奇异值分解^[15]得到,记作

$$C^L = \text{null}([J^{GD}]^T) \quad (9)$$

2.3 D模式

D模式是在GD模式基础上进一步定义得到,要求所施加的中线向力是自平衡的,即

$$[\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad r]^T \cdot A \cdot q_w^D = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

式中: α 是各板件中线方位角 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ 所组成的列

向量, r 是从原点到各板件的距离 $r_1, r_2 \dots r_m$ (以其中线方向绕原点逆时针转动为正)所组成的列向量,对角矩阵 A 以各板件的横截面积 $A_1, A_2 \dots A_m$ 为对角线元素。

据此写出 q_w^D 所应满足的条件

$$q_w^D = J_w^D \cdot \varphi^D \quad (11)$$

式中

$$J_w^D = \text{null}([\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad r]^T \cdot A) \quad (12)$$

当构件中的板件不小于3个,或者说,有限条模型包含至少3个中线不交于同一点且不平行于同一直线的单元时,D的该平衡条件有效数量是3,即要求两个横向合力和一个纵向合力矩为0。因此 J_w^D 是 $m \times (m-3)$ 矩阵,而 φ^D 是一个任意的 $(m-3)$ 元列向量,即D模式的自由度为 $m-3$ 。

综上,可写出D模式变形的荷载

$$P^D = J^{GD} \cdot J_w^D \cdot \varphi^D \quad (13)$$

并得到 Δ^D 的显式表达式

$$\Delta^D = C^D \cdot \varphi^D \quad (14)$$

式中D模式的约束矩阵为

$$C^D = K_e^{-1} \cdot J^{GD} \cdot J_w^D \quad (15)$$

2.4 G模式

因为G模式属于GD模式,荷载可写作

$$P^G = J^{GD} \cdot q_w^G \quad (16)$$

根据其于D模式的正交性可知

$$[C^D]^T \cdot J^{GD} \cdot q_w^G = 0 \quad (17)$$

据此解得

$$q_w^G = J_w^G \cdot \varphi^G \quad (18)$$

式中: φ^G 为一个任意的3元列向量; J_w^G 为 $m \times 3$ 矩阵。

$$J_w^G = \text{null}([C^D]^T \cdot J^{GD}) \quad (19)$$

至此,得到 Δ^G 的显式表达式

$$\Delta^G = C^G \cdot \varphi^G \quad (20)$$

式中G模式的约束矩阵为

$$C^G = K_e^{-1} \cdot J^{GD} \cdot J_w^G \quad (21)$$

2.5 屈曲模态分解和识别

2.5.1 屈曲模态分解

有限条法所构造的线性屈曲问题特征值方程是

$$K_e \cdot d = \lambda \cdot K_g \cdot d \quad (22)$$

式中 K_e 和 K_g 分别是杆件的弹性和几何刚度矩阵。求解该方程得到的特征向量 d 即屈曲模态变形, λ 是相应的荷载或应力的临界值系数。

本文实现屈曲模态分解的方法与cFSM一致:通过约束通用屈曲方程(22)得到指定类别屈曲的特征值方程

$$K_e^* \cdot \varphi^* = \lambda^* \cdot K_g^* \cdot \varphi^* \quad (23)$$

式中上标“*”指所需的屈曲类别,可以是“L”“D”“G”,或它们的任意组合,其中的模态弹性刚度矩阵为

$$K_e^* = [C^*]^T \cdot K_e \cdot C^* \quad (24)$$

模态几何刚度矩阵为

$$K_g^* = [C^*]^T \cdot K_g \cdot C^* \quad (25)$$

2.5.2 屈曲模态识别

因G、D、L覆盖薄壁杆全变形域,所以它们的约束矩阵 C^* 各列向量构成薄壁杆件变形空间的一组基,可用于分解该杆件的一个任意的变形,例如任意一个屈曲变形,从而定量该变形或该屈曲的每一基本模式参与度。设有一个屈曲模态变形 Δ^Ω ,对其开展分解

$$\Delta^\Omega = [C^L \quad C^G \quad C^D] \cdot \begin{Bmatrix} \varphi^L \\ \varphi^G \\ \varphi^D \end{Bmatrix} \quad (26)$$

解得 φ^* ,进而得到原屈曲变形 Δ^Ω 中的“L”“D”“G”类子变形

$$\Delta^* = C^* \cdot \varphi^* \quad (27)$$

及它们的应变能

$$E^* = \frac{1}{2} \{ \Delta^* \}^T \cdot K_e \cdot \Delta^* \quad (28)$$

由于L、D、G间关于刚度的严格正交性,可知

$$E^\Omega = E^L + E^G + E^D \quad (29)$$

因此,各模式基于应变能占比的模式参与系数为

$$c_{\text{Energy}}^* = E^*/E^\Omega \quad (30)$$

2.6 方法的实现

采用MATLAB编制程序,实现了上述计算过程。条单元的弹性刚度矩阵和几何刚度矩阵可调用开源软件CUFSM^[21]内的klocal和kglocal函数文件进行构造。在计算流程方面,根据有限条模型的单元和节点构成,综合出杆件的整体弹性刚度矩阵

及GD模式荷载变换矩阵 J^{GD} 后,即可分别按式(9)、式(15)和式(21)确定各变形模式的约束矩阵,进而按式(23)和式(26)开展屈曲模态分解和识别。

3 算例1:卷边槽钢轴压杆

本例分析卷边槽钢轴压杆的屈曲模态。杆件腹板高200 mm,翼缘宽90 mm,卷边长20 mm,板厚2 mm;材料弹性模量210 GPa,泊松比0.3。在腹板、翼缘和卷边上分别设置7、3、1个等分节点,建立该杆件的有限条模型。采用CUFSM算得有限条特征曲线和cFSM模态分解结论,可导出为文本文件,或在程序内设置断点于运行过程中截获。上述结果与本文方法得到的屈曲模态分解结果对比见图4。有限条特征曲线系该有限条模型线性屈曲的最低临界应力曲线,本文和cFSM对其模态识别的结论对比见图5。CUFSM基于应变能范数(strain energy norm)^[22, 23]计算模态参与系数时,基向量 R_i 按 $\sqrt{R_i^T \cdot K_e \cdot R_i} = 1$ 进行标准化。为与本文直接基于应变能的模式参与系数作对比,图5中各cFSM模态参与系数 c^* 根据式(31)计算。

$$c^* = \frac{(c_0^*)^2}{(c_0^G)^2 + (c_0^D)^2 + (c_0^L)^2 + (c_0^{ST})^2} \quad (31)$$

式中: c_0^* 为CUFSM基于应变能范数算得的模式参与系数。

上述对比结论如下:

1)短波长区域的有限条特征曲线,特别是其中第一波谷点,反映薄壁构件局部屈曲的主要性质。本文获得与cFSM一致的L临界应力曲线(图4),该曲线在半波长 $l_0 < 300$ mm的区段与有限条特征曲线吻合良好。

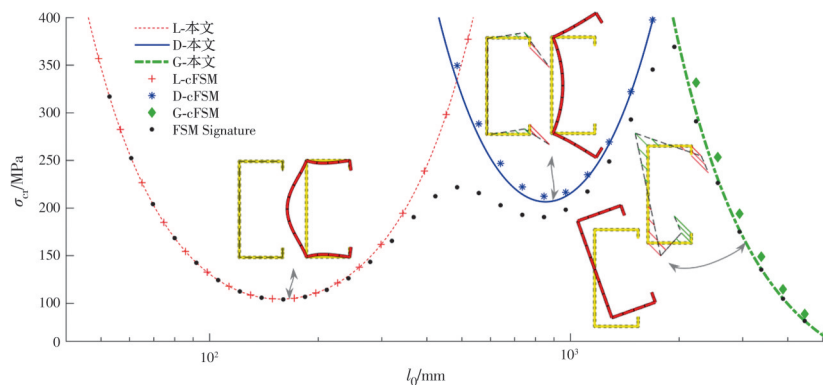


图4 卷边槽钢轴压杆的屈曲模态分解

Fig. 4 Buckling mode decomposition of an axially compressed lipped channel

2)有限条特征曲线在大波长区段($l_0 > 2000$ mm)为整体屈曲。弯、扭等整体变形存在横向伸缩效

应,但cFSM的整体模式定义规定横向正应变为0,该规定造成的约束导致图4中其整体屈曲临界应力

较 FSM 的结论显著偏高,达到 10% 左右^[24],参见表 1 中对半波长 4 000 mm 处各计算结论的对比。这同时也表现在图 5 的屈曲模态识别结论中:在 $l_0 > 2\ 000$ mm 区段,其 ST 模式(剪切和横向伸缩模式)占有一定比例。本文方法利用力特征定义取代了零横向伸缩限定,所得到的整体屈曲结论与 cFSM 联合考虑剪切、横向伸缩及整体变形的屈曲结论(见表 1 中 cFSM 方法的“G+ST”屈曲结论)一致,且与 FSM 的结论吻合良好,图 5 中识别结论也

佐证了这一点。

3)有限条特征曲线的第二波谷区段主要反映构件畸变屈曲性质。畸变屈曲中,板件在各自中面内存在一定拉压,伴生横向伸缩;同时,由于屈曲半波不长,剪应变亦有一定影响。因此,图 5 的 cFSM 识别结论中,ST 模式占比在该区段有所提升。这些变形在本文的 D 模式定义中得到考虑,因此在该区段获得更接近有限条特征曲线的 D 临界应力曲线和更高的 D 模式占比。

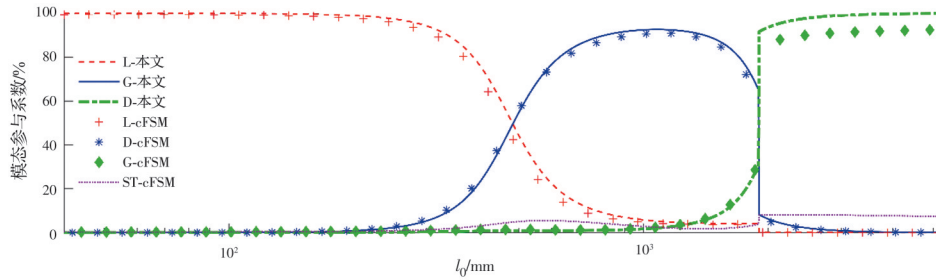


图 5 卷边槽钢轴压杆的屈曲模态识别

Fig. 5 Buckling mode identification of the axially compressed lipped channel

表 1 各方法临界应力和模态占比计算结果对比
($l_0=4\ 000$ mm)

Table 1 The buckling stresses and modal participations resulted from different methods at $l_0=4\ 000$ mm

方法	屈曲类型	临界应力/MPa	模态占比 $c_{Energy}/\%$
FSM	一般屈曲	99.12	
cFSM	G	108.43	92.08
	G+ST	99.39	99.76
本文	G	99.35	99.77

4 算例 2:曲线形截面

对文献[16]的轴压钢椭圆管行屈曲模态分析。该椭圆管壁厚 6 mm,截面长半径 150 mm,短半径 100 mm;钢材弹性模量 210 GPa,泊松比 0.3。采用 22 个条单元构建该椭圆管的有限条模型,CUFSM 所得到的有限条特征曲线见图 6。根据文献[16]的分析,该椭圆管局部屈曲的轴压力临界值为 17 790 kN,这与有限条特征曲线第一个波谷点($l_0 = 60$ mm)处的临界力结论吻合。

采用 cFSM 的 L 模式定义,即约束各交点的所有平移自由度,得到的 L 模式临界力曲线见图 6。从图 6 中可发现,该结论与前述结论存在显著差异。对比横截面的横向变形可推断其原因:曲线形截面采用多边形拟合后,各节点因相邻单元中线不平行,在 cFSM 中按交点处理,因而 L 模式的横向变形仅余 22 个节点转动自由度。对节点横向平移的过度约束导致不良 L 屈曲结论。

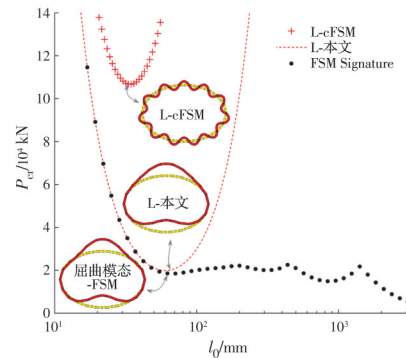


图 6 轴压椭圆管的局部屈曲模态分析

Fig. 6 On the local buckling of the elliptical cylindrical tube under compression

在本文的方法中,该有限条模型的平板件数量为 22, GD 模式在每一板件上仅赋一个横向力取值自由度。在与之正交的情况下, L 模式仍具有 44 个描述该截面横向变形的自由度,包括足够的节点横向平移自由度。所得到的 L 屈曲临界力和屈曲变形(图 6)与有限条特征曲线在第一个波谷处吻合良好。

闭口截面的扭转变形中,闭室中面剪应变显著,如 Bredt 剪应变等。零中面剪应变的假定使得 cFSM 的 G 模式定义不适用于闭口截面,因此, CUFSM 不能给出本例的屈曲模态分析结论。本文的 G 和 D 模式定义中不作零剪应变的假定,代之以零轴向力的假定。文献[15]的分析表明,该假定在 G 和 D 模式中合理引入了相应的剪应变效应。在中

等和较长波长处,本文的D和G结论分别与FSM的结论吻合良好,见图7,图中所绘制的D和G屈曲的横截面变形与文献[16]导出的结论基本一致。此外,在图8中,对有限条特征曲线解进行了模态识别,识别结论印证了模态分解结论与特征曲线的良好吻合性。

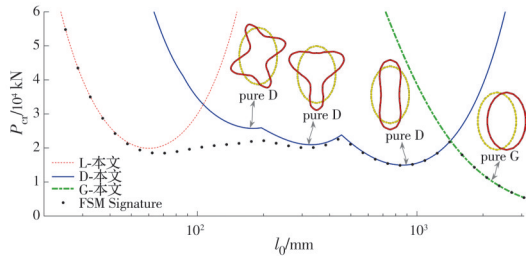


图7 轴压椭圆管的屈曲模态分解

Fig. 7 Buckling mode decomposition of an elliptical cylindrical tube under compression

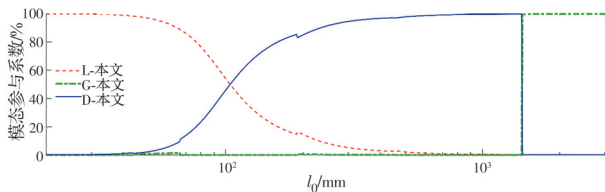


图8 轴压椭圆管的屈曲模态识别

Fig. 8 Buckling mode identification of the elliptical cylindrical tube under compression

5 结论

薄壁杆件的模式定义不仅仅用于屈曲模态分析,更是建立这类杆件工程实用计算理论的基础。作为理论基础,模式定义应具备对不同简化层次模型的一般适应性、对不同截面的一致概括性、对经典理论的传承性和足够的简洁性。GBT发展至今,尤其在其考虑横向伸缩、剪应变等因素后,在上述方面表现出一定的不足。笔者认为:1)从力特征的角度定义基本模式比传统上从变形或应变特征角度的定义方式具有更强的复杂本构适应能力;2)模式正交性的力学意义应予以明确,原则应贯穿始终;正交性不仅是定义所需实现的目标之一,也可作为手段之一。

为探讨上述观点的合理性,将其落实为薄壁构件的4条模式定义原则,针对薄壁杆件有限条模型的线性屈曲,开展屈曲模态分析,并与已有方法进行对比。结果表明,所定义的局部、畸变和整体模式良好表征了薄壁构件不同波长屈曲的主要变形特征和屈曲特点;横向伸缩和剪应变在各模式屈曲中的效应得到了合理处置。文中的分析还表明:曲线形截面薄壁构件的整体、畸变和局部屈曲机理与

多边形截面是一致的。

参考文献

- [1] North american specification for the design of cold-formed steel structural members (2016 edition): AISI S100-16 [S]. Washington (DC): American Iron and Steel Institute, 2016.
- [2] Cold-formed Steel Structures: AS/NZS 4600:2005 [S]. Standards Australia / Standards New Zealand, 2005.
- [3] 冷弯型钢结构技术规范(征求意见稿): GB 50018—XXXX [R]. 武汉:中南建筑设计院股份有限公司, 2017. Technical Code of Cold-Formed Steel Structures (Exposure Draft): GB 50018—XXXX [R]. Wuhan: Central-South Architectural Design Institute co., ltd, 2017. (in Chinese)
- [4] SCHAFFER B W. Review: The Direct Strength Method of cold-formed steel member design [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2008, 64(7/8): 766-778.
- [5] CHEUNG Y K. The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends [J]. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1968, 40(1): 1-7.
- [6] ÁDÁNY S, SCHAFFER B W. A full modal decomposition of thin-walled, single-branched open cross-section members via the constrained finite strip method [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2008, 64(1): 12-29.
- [7] DAVIES J M, LEACH P. First-order generalised beam theory [J]. Journal of Constructional Steel Research, 1994, 31(2/3): 187-220.
- [8] DAVIES J M, LEACH P, HEINZ D. Second-order generalised beam theory [J]. Journal of Constructional Steel Research, 1994, 31(2/3): 221-241.
- [9] SCHARDT R. Generalised beam theory [M]. Berlin: Springer Verlag, 1989.
- [10] DAVIES J M. Recent research advances in cold-formed steel structures [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2000, 55: 267-288.
- [11] ÁDÁNY S, SCHAFFER B W. Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Derivation [J]. Thin-Walled Structures, 2006, 44(5): 563-584.
- [12] KHEZRI M, RASMUSSEN K J R. An energy-based approach to buckling modal decomposition of thin-walled members with arbitrary cross-sections, Part 2: Modified global torsion modes, examples [J]. Thin-Walled Structures, 2019, 138: 518-531.
- [13] CASAFONT M, MARIMON F, PASTOR M, et al. Linear buckling analysis of thin-walled members

- combining the Generalised Beam Theory and the Finite Element Method [J]. *Computers & Structures*, 2011, 89 (21/22): 1982-2000.
- [14] SILVESTRE N. Generalised beam theory to analyse the buckling behaviour of circular cylindrical shells and tubes [J]. *Thin-Walled Structures*, 2007, 45(2): 185-198.
- [15] JIN S, LI Z J, TANG Q, et al. A combined force/displacement-based constrained finite strip method for modal stability analysis of thin-walled members [J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, 159: 107322.
- [16] SILVESTRE N. Buckling behaviour of elliptical cylindrical shells and tubes under compression [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45 (16): 4427-4447.
- [17] GONÇALVES R, CAMOTIM D. GBT deformation modes for curved thin-walled cross-sections based on a mid-line polygonal approximation [J]. *Thin-Walled Structures*, 2016, 103: 231-243.
- [18] SILVESTRE N, CAMOTIM D. On the mechanics of distortion in thin-walled open sections [J]. *Thin-Walled Structures*, 2010, 48(7): 469-481.
- [19] BEBIANO R, GONÇALVES R, CAMOTIM D. A cross-section analysis procedure to rationalise and automate the performance of GBT-based structural analyses [J]. *Thin-Walled Structures*, 2015, 92: 29-47.
- [20] LI Z J, BATISTA ABREU J C, LENG J Z, et al. Review: Constrained finite strip method developments and applications in cold-formed steel design [J]. *Thin-Walled Structures*, 2014, 81: 2-18.
- [21] SCHAFFER B W. CUFSM 5.04-Elastic buckling analysis of thin-walled members by the finite strip method and constrained finite strip method for general end boundary conditions [CP/OL]. 2020: Department of Civil Engineering, Johns Hopkins University. <https://www.ce.jhu.edu/cufsm>.
- [22] LI Z, HANNA M T, ÁDÁNY S, et al. Impact of basis, orthogonalization, and normalization on the constrained Finite Strip Method for stability solutions of open thin-walled members [J]. *Thin-Walled Structures*, 2011, 49(9): 1108-1122.
- [23] 张登祥, 李占杰, Schafer B W. 冷弯薄壁构件屈曲模态力学准则的有限元验证 [J]. *建筑结构*, 2012, 42(10): 65-70.
- ZHANG D X, LI Z J, SCHAFFER B. Finite element verification of the mechanic criteria of cold-formed thin-walled steel member's buckling mode definitions [J]. *Building Structure*, 2012, 42(10): 65-70. (in Chinese)
- [24] ÁDÁNY S, SCHAFFER B W. Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: application and examples [J]. *Thin-Walled Structures*, 2006, 44(5): 585-600.

(编辑 王秀玲)