第11卷第2期 重庆建筑工程学院学报 Vol.11 No.2
1989年 6 月 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF ARCHITECTURE AND ENGINEERING June 1989

圆环壳初参数积分方程的应用
——S型波纹管问题*

陈山林 黄 骏

摘 要 本文用初参数积分方程方法求解了S型波纹管问题，给出了两个算例，并与一般解的结果进行了比较，证明本文解法简便适用，具有良好的精度。

关键词 初参数，积分方程，波纹管

前 言

近年来，钱伟长、郑思梁（1979,1980）[1,2]和陈山林（1986）[3]得到了圆环壳轴对称问题的一般解。这个解答是解析形式的准确解，已被用来处理过若干实际问题，包括波纹管问题[4,5]。黄黔（1982）[6]成功地用初参数方法求解了C型波纹管问题。文〔7〕对于圆环壳的一般轴对称问题，给出了初参数积分方程表述，研究了对于各种情形该方程的应用。本文是文〔7〕结果对于S型波纹管问题的一个具体应用，并给出了方程的数值解法。

1 基本方程

对于考虑的S型波纹管（C型是其特殊情况），有关坐标、尺寸、荷载、内力和位移如图1所示。波纹管子午线断面弧由若干圆弧段周期连结而成，在连结点中面线是光滑相连的。假设变形具对称性，我们仅考虑图1中弧ABC（区域Ⅰ）和CDE（区域Ⅱ）部分。

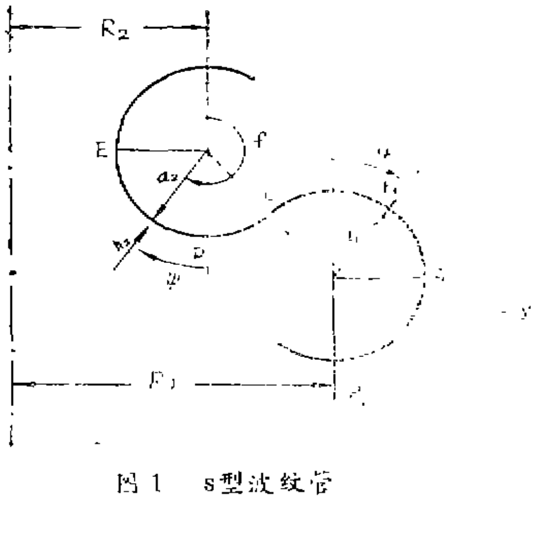

图1 S型波纹管

ABC和CDE段都是回转半径分别为R_1和R_2，曲率半径分别为a_1和a_2的圆环壳。略去脚标1和2，由〔7〕，圆环壳在任意轴对称载荷作用下初值问题的一般提法是：

本文1988年4月13日收到。
*四川省科委应用基础专项经费资助课题。

$$[(1+\alpha\sin\varphi)\dot{V}]^{\cdot}+\left(2\mu i\sin\varphi-\frac{\alpha^2\cos^2\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}\right)V$$

$$=2\mu\cos\varphi P^*+i[(1+\alpha\sin\varphi)^2(p_r^*\sin\varphi+p_\varphi^*\cos\varphi)]^{\cdot}+i\nu\alpha(1+\alpha\sin\varphi)p_\varphi^*$$

$$V|_{\varphi=\varphi_0}=V_0,\quad \dot{V}|_{\varphi=\varphi_0}=\dot{V}_0 \tag{1}$$

式中

$$\alpha=a/R,\quad \mu=\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{a^2}{Rh},\ \nu\text{—泊松比}$$

$$P^*=P_0^*+\int_{\varphi_0}^{\varphi}(p_r^*\cos\varphi-p_\varphi^*\sin\varphi)(1+\alpha\sin\varphi)d\varphi$$

$$P_0^*=(N_{\varphi_0}^*\sin\varphi_0+Q_{\varphi_0}^*\mathrm{con}\varphi_0)(1+\alpha\sin\varphi_0)/\alpha \tag{1'}$$

$$V_0=\chi_0-iH_{\varphi_0}^*$$

$$\dot{V}_0=\left(M_{\varphi_0}^*-\frac{\nu\alpha\cos\varphi_0}{1+\alpha\sin\varphi_0}\chi_0\right)+i\left[-\frac{y_0^*}{1+\alpha\sin\varphi_0}-\frac{\nu\alpha\cos\varphi_0H_{\varphi_0}^*}{1+\alpha\sin\varphi_0}\right.$$

$$\left.-\frac{\nu\alpha\sin\varphi_0P_0^*}{1+\alpha\sin\varphi_0}+(1+\alpha\sin\varphi_0)\left(p_{r_0}^*\sin\varphi_0+p_{\varphi_0}^*\cos\varphi_0\right)\right]$$

V为待定复函数，φ_0为初始角，带下标"o"量均取该量$\varphi=\varphi_0$的值。"o"表示对φ求导。上式中带"*"量均已无量纲化，定义如下：

$$N_\varphi^*=\frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh^2}aN_\varphi,\quad Q_\varphi^*=\frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh^2}aQ_\varphi$$

$$M_\varphi^*=\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3}aM_\varphi,\quad y^*=\frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{h}ay$$

$$p_r^*=\frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh^2}Rap_r,\quad p_\varphi^*=\frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh^2}Rap_\varphi \tag{2}$$

$$H_\varphi^*=\frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh^2}H_\varphi$$

式中：E—杨氏模量，

h—壳厚

N_φ,Q_φ—分别为经向内力和经向切力，

p_φ,p_r—表面荷载切向和法向分量，

y—位移水平分量，

M_φ—经向弯矩

以及

$$H_\varphi=R(1+\alpha\sin\varphi)(N_\varphi\sin\varphi-Q_\varphi\cos\varphi) \tag{3}$$

χ—经线切线转角。

如果V已求得，内力和位移分量可按下述各式计算[7]

$$N_\varphi^*=-\frac{\alpha\cos\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}I_mV+\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}P^*$$

$$N_\theta^* = -I_m\dot{V} + (1+\alpha\sin\varphi)(p_r^*\sin\varphi + p_\varphi^*\cos\varphi)$$

$$Q_\varphi^* = \frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}I_mV + \frac{\alpha\cos\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}P^*$$

$$M_\varphi^* = Re\dot{V} + \frac{\nu\alpha\cos\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}ReV$$

$$M_\theta^* = \nu Re\dot{V} + \frac{\alpha\cos\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}ReV \tag{4}$$

$$\chi = ReV$$

$$y^* = -(1+\alpha\sin\varphi)I_m\dot{V} + \nu\alpha\cos\varphi I_mV - \nu\alpha\sin P^*$$
$$+(1+\alpha\sin)^2(p_r^*\sin\varphi + p_\varphi^*\cos\varphi)$$

$$Z^* = Z_0^* + \int_{\varphi_0}^{\varphi}\left[-\cos\varphi ReV + \frac{\alpha}{2\mu}\sin\varphi\,(N_\varphi^* - \nu N_\theta^*)\right]d\varphi$$

式中

$$N_\theta^* = \frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh^2}aN_\theta\,,\qquad M_\theta^* = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3}aM_\theta$$

$$Z^* = z/a \tag{5}$$

N_θ—环向内力，M_θ—环向弯矩，Z—竖直位移。(2)～(5)式中位移和荷载的正方向见图1，各内力正方向见文献[8]。

对于区域Ⅰ，可直接使用(1)～(5)的基本方程和关系式。对区域Ⅱ，我们使用坐标Ψ（见图1），$\Psi=\varphi-\pi$。直接令$\varphi=\Psi$，并作替换$p_r^*\to -p_r^*$，$p_\varphi^*\to -p_\varphi^*$，$\mu\to-\mu$，$\alpha\to-\alpha$，即可以用(1)～(5)各式计算区域Ⅱ解。

2 初参数积分方程及解答

初值问题(1)可以转化为等价的积分方程问题，其结果为[7]

$$V(\varphi) = V_0f_1(\varphi,\varphi_0) + U_0f_2(\varphi,\varphi_0) + P_0^*f_3(\varphi,\varphi_0)$$
$$+f_4(\varphi,\varphi) + \int_{\varphi_0}^{\varphi}K(\varphi,t)V(t)dt \tag{6}$$

式中

$$U_0 = M_{\varphi_0}^* - \nu\alpha\frac{\cos\varphi_0}{1+\alpha\sin\varphi_0}\chi_0 + i\,\frac{-y_0^* - \nu\alpha\cos\varphi_0H_{\varphi_0}^*}{1+\alpha\sin\varphi_0}$$

$$f_1(\varphi,\varphi_0) = \frac{1+\alpha\sin\varphi_0}{1+\alpha\sin\varphi},\qquad f_2(\varphi,\varphi_0) = \frac{1+\alpha\sin\varphi_0}{1+\alpha\sin\varphi}(\varphi-\varphi_0)$$

$$f_3(\varphi,\varphi_0) = -2\mu\frac{(\varphi-\varphi_0)\sin\varphi_0 + \cos\varphi - \cos\varphi_0}{1+\alpha\sin\varphi}$$

$$f_4(\varphi,\varphi_0)=i\int_{\varphi_0}^{\varphi}f_1(\varphi,t)(p_r^*\sin t+p_\varphi^*\cos t)(1+\alpha\sin t)dt+i\nu\alpha\int_{\varphi_0}^{\varphi}f_2(\varphi,t)p_\varphi^*dt$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi}f_3(\varphi,t)\ (p_r^*\cos t-p_\varphi^*\sin t)(1+\alpha\sin t)dt \qquad (7)$$

$$K(\varphi,t)=\frac{\alpha\cos t}{1+\alpha\sin\varphi}+\frac{\varphi-t}{1+\alpha\sin\varphi}\left(\frac{\alpha^2\cos^2 t}{1+\alpha\sin t}-2\mu i\sin t\right)$$

方程（6）为第二类Volterra积分方程。当$\alpha<1$时，不难判明，非齐次项f_1,f_2,f_3和核函数K均是有界函数；同时，对于实际的荷载分布，包括线布荷载情形，f_4也是有界函数。因而，按照Volterra积分方程理论，（6）的解是存在和唯一的，其通解为

$$V=V_0V_1+U_0V_2+P_0^*V_3+V_4 \qquad (8)$$

式中

$$V_i(\varphi)=f_i(\varphi,\varphi_0)+\int_{\varphi_0}^{\varphi}K(\varphi,t)V_i(t)dt \qquad (i=1,2,3,4) \qquad (9)$$

这样，我们的问题就归结为分别在区域Ⅰ和Ⅱ求解方程（9）和确定相应的初参数。在波纹管问题中，通常参数P_0^*可由竖直方向整体平衡条件预先确定。因此，初参数只余下V_0和U_0。文[7]已经证明，如果取$\varphi_0=\varphi_A=\frac{\pi}{2}$作为初始角，则包含8个待定实常数的S型波纹管问题，利用初参数积分方程方法，可以简化为2个待定实常数问题，使计算工作大为简化。解答（9）是问题的基本解，与初参数无关。本文将取C点为内、外圆弧段计算起点，即取$\varphi_0=\varphi_C$，$\Psi_0=\Psi_C$，且$\varphi_C=\Psi_C$。这样，虽然待定实常数增加为4个，但在基本解计算程序的编制方面，将带来便利。

3 解的数值计算方法

（7）中核函数为退化核，可以写做

$$K(\varphi,t)=A_1(\varphi)G_1(t)+A_2(\varphi)G_2(t) \qquad (10)$$

式中

$$A_1(\varphi)=\frac{1}{1+\alpha\sin\varphi},\qquad A_2(\varphi)=\frac{\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}$$

$$G_1(t)=\alpha\cos t-\frac{\alpha^2 t\cos^2 t}{1+\alpha\sin t}+2\mu i t\sin t \qquad (11)$$

$$G_2(t)=\frac{\alpha^2\cos^2 t}{1+\alpha\sin t}-2\mu i\sin t$$

将（10）代入（9），则得

$$V_i(\varphi)=f_i(\varphi,\varphi_0)+\sum_{k=1}^{2}A_k(\varphi)\int_{\varphi_0}^{\varphi}G_k(t)V_i(t)dt \qquad (12)$$

在我们研究的区段内（区域Ⅰ或区域Ⅱ），划分n_e个单元，每个单元取n_p个节点。在每个单元内对V_i进行多项式插值

$$V_i(t)=\sum_{k=1}^{n_p}N_k(t)V_{ik}$$

式中，$N_k(t)$是插值函数，V_{ik}是第k个节点的V_i值。将（13）代入（12），对于第m个单元有：

$$V_i(\varphi)=f_i(\varphi,\varphi_0)+\sum_{k=1}^{n_p}\left[\sum_{j=1}^{2}A_j(\varphi)\int_{\varphi_{m-1}^1}^{\varphi}N_k(t)G_j(t)dt\right]V_{ik}$$
$$+\sum_{k=1}^{2}A_k(\varphi)\int_{\varphi_0}^{\varphi_{m-1}^1}G_k(t)V_i(t)dt \tag{14}$$

式中，φ_{m-1}^1是第m个单元的第一个节点。记

$$J_{m-1}^k=\int_{\varphi_0}^{\varphi_{m-1}^1}G_k(t)V_i(t)\,dt \tag{15}$$

则（14）可记为

$$V_i(\varphi)=f_i(\varphi,\varphi_0)+\sum_{k=1}^{2}A_k(\varphi)J_{m-1}^k+\sum_{k=1}^{n_\varphi}\left(\sum_{j=1}^{2}A_j(\varphi)\int_{\varphi_{m-1}^1}^{\varphi}N_k(t)G_j(t)dt\right)V_{ik} \tag{16}$$

在（16）中，依次取φ为m单元的各节点，则得线代数方程组

$$[C]\{V_i\}=\{\overline{f}\} \tag{17}$$

式中

$$C_{kl}=\delta_{kl}-\sum_{j=1}^{2}A_j(\varphi_{m-1}^k)\int_{\varphi_{m-1}^1}^{\varphi_{m-1}^k}N_lG_jdt \tag{18}$$

$$\overline{f}_k=f_i(\varphi_{m-1}^k,\ \varphi_0)+\sum_{j=1}^{2}A_j(\varphi_{m-1}^k)J_{m-1}^j$$

对于J_m^k有递推公式

$$J_m^k=J_{m-1}^k+\int_{\varphi_{m-1}^1}^{\varphi_m^1}G_k(t)V_i(t)dt \tag{19}$$

即

$$J_m^k=J_{m-1}^k+\sum_{l=1}^{n_p}\left(\int_{\varphi_{m-1}^1}^{\varphi_m^1}N_l(t)G_k(t)dt\right)V_{il} \tag{20}$$

这样，用（17）及（20）就可以从第一个单元开始，逐个单元地求得V_i，其中积分计算用五节点高斯求积公式。

余下的问题是初参数的确定。设所考虑的波纹管内、外圆弧段有相同的E,ν,a,h值。如前述，取C点为各段计算起点。则在C点，连续条件为

$$V_{\mathrm{I}}=\overline{V}_{\mathrm{II}},\quad \dot{V}_{\mathrm{I}}=-\overline{\dot{V}}_{\mathrm{II}} \tag{21}$$

将（8）代入上式，可得

$$V_{\mathrm{I}c}=\overline{V}_{\mathrm{II}c},\quad U_{\mathrm{I}c}=-\overline{U}_{\mathrm{II}c} \tag{22}$$

由于变形的对称性，有

$$\chi_A = H^*_{\varphi A} = 0 \text{ 和} \chi_E = H^*_{\varphi E} = 0 \tag{23}$$

即

$$V_A = \chi_A - iH^*_{\varphi A} = 0$$
$$V_E = \chi_E - iH^*_{\varphi E} = 0 \tag{24}$$

将（8）代入上式，即得

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{I}c} \cdot V_{1\mathrm{I}} + U_{\mathrm{I}c} V_{2\mathrm{I}} + P^*_{c\mathrm{I}} V_{3\mathrm{I}} + V_{4\mathrm{I}} = 0 \\ V_{\mathrm{II}c} \cdot V_{1\mathrm{II}} + U_{\mathrm{II}c} V_{2\mathrm{II}} + P^*_{c\mathrm{II}} V_{3\mathrm{II}} + V_{4\mathrm{II}} = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

式中，$V_{i\mathrm{I}}$，$V_{i\mathrm{II}}$分别取A点$\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$和$E$点$\left(\Psi = \frac{\pi}{2}\right)$值。这样，由（22）和（25）可确定初参数。

在用（4）计算内力和位移值时，需要计算$\dot{V}$值。如果（9）的基本解V_i已求得，则$\dot{V}$可按下述公式计算[7]

$$\dot{V} = V_0 U_1 + U_0 U_2 + P^*_0 U_3 + U_4 \tag{26}$$

式中

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} K_1 V_1 dt \\ U_2 &= f_1 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} K_1 V_2 dt \\ U_3 &= f_5 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} K_1 V_3 dt \\ U_4 &= f_6 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} K_1 V_4 dt \end{aligned} \tag{27}$$

而

$$\begin{aligned} K_1(\varphi, t) &= \frac{1}{1 + \alpha\sin\varphi}\left(\frac{\alpha^2\cos^2 t}{1 + \alpha\sin t} - 2\mu i \sin t\right) \\ f_5(\varphi, \varphi_0) &= 2\mu \frac{\sin\varphi - \sin\varphi_0}{1 + \alpha\sin\varphi} - \frac{\alpha v i \sin\varphi_0}{1 + \alpha\sin\varphi} \\ f_6(\varphi, \varphi_0) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} f_5(\varphi, t)\left(p^*_r\cos t - p^*_\varphi\sin t\right)(1 + \alpha\sin t)dt \\ &\quad + i(1 + \alpha\sin\varphi)\left(p^*_r\sin\varphi + p^*_\varphi\cos\varphi\right) + iv\alpha\int_{\varphi_0}^{\varphi} f_1(\varphi, t)p^*_\varphi dt \end{aligned} \tag{28}$$

f_1已在（7）式中给出。

4 算 例

利用上述结果，我们计算了C型和S型波纹管的两个算例，并与文〔5〕一般解的结果进行了比较。

例1． 半圆弧波纹管（$\varphi_c = \Psi_c = 0$）在轴向力p_e和内压q作用下的变形和内力。

取$E = 21000\text{kg/mm}^2$，$\nu = 0.3$，$P_e = 1000\text{kg}$，$R_1 = R_2 = 200\text{mm}$，$a_1 = a_2 = 20\text{mm}$，$\mu = 4$，可算得$\alpha = 0.1$；对内压，取$q = 7.9577 \times 10^{-3}\text{kg/mm}^2$（其轴向等效力$\pi R^2 q = 1000\text{kg}$）。在表1和表2分别给出了轴力和内压作用下的计算结果，表3给出了ACE半波轴向伸长

表1　轴力作用　Pe = 100kg，$\alpha = 0.1$，$\mu = 4$

		N_φ (kg/mm)		N_θ (kg/mm)		M_φ (kg)		M_θ (kg)	
		数值解	一般解[5]	数值解	一般解	数值解	一般解	数值解	一般解
$\varphi°$	90	0.7234	0.7234	-14.8652	-14.7491	-0.3096	-0.3047	-0.0928	-0.0914
	60	0.9978	0.9963	-15.2213	-15.1660	1.2434	1.2372	0.3681	0.3661
	30	1.5878	1.5857	-8.7756	-8.8449	3.5545	3.5479	0.9554	0.9537
	0	1.6585	1.6539	-0.4130	-0.3245	-0.0538	-0.0370	-0.2730	-0.2679
$\varphi°$	0	1.6585	1.6539	-0.4130	-0.3245	0.0538	0.0370	0.2730	0.2679
	30	1.7829	1.7840	8.7624	8.6656	3.8747	3.8863	1.2813	1.2850
	60	1.1888	1.1906	15.8236	15.8358	1.1935	1.1993	0.3578	0.3593
	90	0.8842	0.8842	14.5651	14.5888	-0.6381	-0.6651	-0.1914	-0.1995

表2　内压作用　q = 7.9577 × 10⁻³kg/mm²，$\alpha = 0.1$，$\mu = 4$

		N_φ (kg/mm)		N_θ (kg/mm)		M_φ (kg)		M_θ (kg)	
		数值解	一般解	数值解	一般解	数值解	一般解	数值解	一般解
$\varphi°$	90	0.8750	0.8754	-14.7786	-14.6887	-0.1837	-0.1720	-0.0551	-0.0516
	60	1.1470	1.1454	-14.6443	-14.6066	1.3633	1.3568	0.4012	0.3991
	30	1.6935	1.6915	-7.1892	-7.2712	3.4928	3.4845	0.9298	0.9276
	0	1.6616	1.6610	1.5546	1.6423	-0.3549	-0.3387	-0.3622	-0.3574
$\varphi°$	0	1.6616	1.6610	1.5546	1.6423	0.3549	0.3387	0.3622	0.3574
	30	1.6764	1.6774	10.4081	10.3248	3.9190	3.9297	1.2848	1.2882
	60	1.0244	1.0256	16.2101	16.2386	1.0407	1.0477	0.3081	0.3100
	90	0.7166	0.7162	14.2957	14.3453	-0.7878	-0.8040	-0.2363	-0.2412

表3　ACE 半波伸长量 δ (mm)

轴力 Pe		内压 q	
数值解	一般解	数值解	一般解
1.0338	1.0398	1.0332	1.0329

的计算结果。计算时，数值解变量φ或Ψ的步长取0.25°．表中结果表明，所得结果为一般解（准确解）[5]比较具有相当好的精度。

例2． S型波纹管在轴力作用下的变形和内力。

取$E = 2.1 \times 10^4\text{kg/mm}^2$，$\nu = 0.266$，$h_1 = h_2 = 2\text{ mm}$，$a_1 = a_2 = 25\text{mm}$，$\varphi_c = \Psi_c = -30°$，$P_e = 1000\text{kg}$；平均回转半径$(R_1 + R_2)/2 = 217.5\text{mm}$．可以算得$\alpha_1 = 0.1087$，$\alpha_2 = 0.1220$，$\mu_1 = 2.269$，$\mu_2 = 2.545$．

在图2和图3中分别绘出了内、外表面经向应力和环向应力的计算结果，分别以无量纲应力σ_φ^*、σ_θ^*给出。其中$\sigma_\varphi^* = 2a_1 h_1 \sigma_\varphi / (RQ_{01} + RQ_{02})$，$\sigma_\theta^* = 2a_1 h_1 \sigma_\theta / (RQ_{01} + RQ_{02})$，式

中$Q_{01}=Q_{\varphi}|_{\varphi=0}$和$Q_{02}=Q_{\psi}|_{\psi=0}$，与文[5]的一般解结果比较，表明本文初参数方法数值解具有良好的精度。

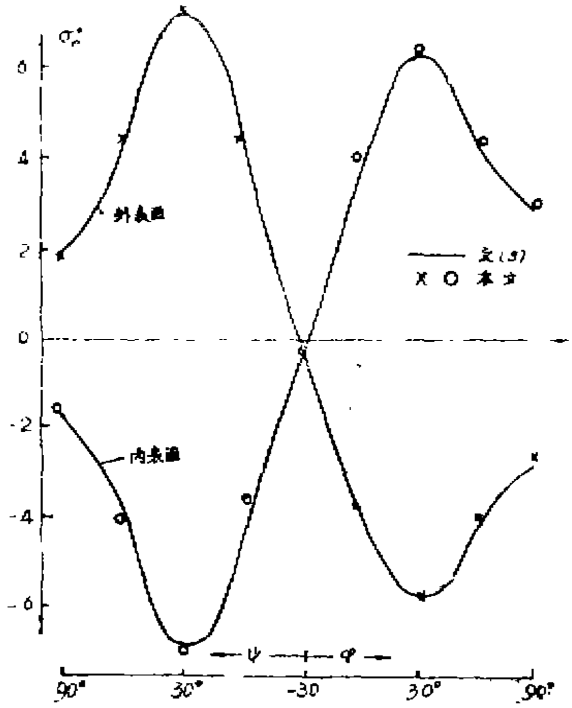

图2 经向表面应力

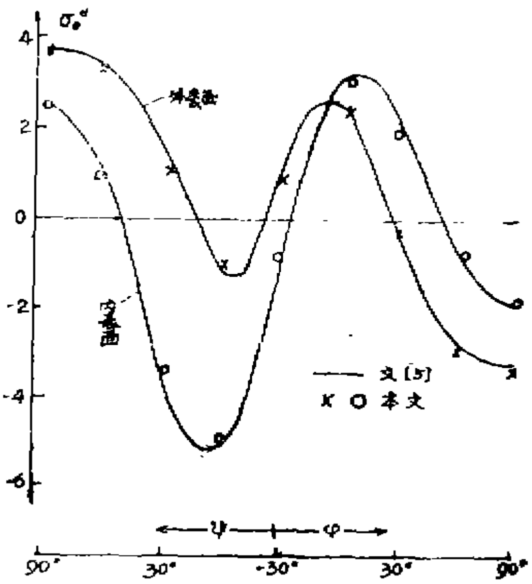

图3 环向表面应力

5 结束语

本文给出了S型波纹管问题的一种初参数积分方程数值解法。文中假定了变形的对称性，这对大多数实际的波纹管问题均是适用的，结果表明，本文解法具有良好的精确度，并且是较为简便和适用的。

参考文献

[1]钱伟长，郑思梁，轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解，清华大学学报，19，1(1979)，27—47
[2]钱伟长，郑思梁，轴对称圆环壳的一般解，应用数学和力学，1,3(1980)，287—299
[3]陈山林，圆环壳在一般荷载下的轴对称问题，应用数学和力学，7,5(1986)，425—434
[4]钱伟长，郑思梁，半圆弧波纹管的计算——环壳一般解的应用，应用数学和力学，2，2(1981)，97—111
[5]陈山林，S型波纹管的轴对称应力和位移，成都科技大学学报，3(1982)，49—58
[6]黄黔，用数值积分的初参数法解波纹管，应用数学和力学，3，1(1982)，101—112
[7]陈山林，轴对称圆环壳的初参数积分方程及其应用，力学学报（待发表）
[8]Flügge, W, Stresses in Shells, 2ed, New York (1973)

（编辑：刘家凯）

THE APPLICATION OF THE INTEGRAL EQUATION OF RING SHELLS IN INITIAL PARAMETER FORM TO THE PROBLEMS OF S-TYPE CORRUGATED TUBES

Chen Shanlin *Huang Jun*

ABSTRACT By means of the method of integral equation of ring shells in initial parameter form, the problems of S-type corrugated tubes are studied in this paper. Two calculating examples are given, and compared with the exact solutions.

KEY WORDS inltial parameter, integral equation, corrugated tubes