重庆建筑工程学院学报
第12卷 第2期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.12 No.2
1990年 6月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING June 1990

无穷维线性规划的对偶问题

邹箭波
（基础科学系）

摘　要　本文对定义在局部凸线性拓扑空间上的线性规划问题，引入了双函数的概念，从而研究了原问题和对偶问题解的存在性，得出原问题与对偶问题的相互关系。

关键词　线性规划，双函数，局部凸线性拓扑空间

0　引　言

在文[1]中，给出了线性规划原问题

$$(\mathrm{LP})\quad \alpha=\inf\{cx: Ax\geqslant a\}$$

并得出了其对偶问题为

$$(\mathrm{DLP})\quad \beta=\sup\{y^*a: y^*A=c,\ y^*\geqslant 0\}$$

讨论了在什么条件下（LP）和（DLP）解存在，并得出在该条件下有$\alpha=\beta$。

本文将考虑线性规划

$$\alpha=\inf\{cx: Bx=b\} \tag{1}$$

$$\alpha=\inf\{cx: Ax\geqslant a,\ Bx=b\} \tag{2}$$

$$\alpha=\inf\{cx: Ax\geqslant a,\ x\in P\} \tag{3}$$

讨论它们对偶问题的形式以及解的存在性。其中C是从一局部凸线性拓扑空间X到R的线性连续泛函，A、B是从X到R_m的线性连续函数，a、$b\in R_m$，P为X中的正锥。

在文[1]和[2]中对$X=R_n$讨论了线性规划(1)、(2)和(3)，在这里，引入双函数的概念，就X是一局部凸线性拓扑空间进行一般性讨论。

1　预备知识

定义1　设X是一线性空间，Y是具有对偶Y^*的局部凸线性拓扑空间

$$F: X\times Y\to[-\infty,\ +\infty]$$

本文1989年1月9日收到。

则称F为双函数（bifunction）。

定义 2 F的Lagrange函数

$$L: X\times Y^*\to[-\infty, +\infty]$$

$$L(x, y^*)=\inf_X\{F(x, y)+y^*y: y\in Y\}$$

$x\in X$，$y^*\in Y^*$，其中y^*y表示y^*在点y的值。

类似于文[1]定义

原问题：　　$\alpha=\inf_X F(x, 0)$

对偶问题：　　$\beta=\sup_{Y^*}\inf_{XY}(F(x, y)+y^*y)$

令　$T=\{(y, \mu): \mu\in R, y=0\in Y\}$

$V=\{(y, \mu): \mu\in R, y\in Y, \mu\geqslant F(x, y)$，对某$x\in X\}$

定义 3 若$V\neq\phi$，V在$(0, r)$的锥为$K(r)=\{k: (0, r)+\lambda k\in V$，对某$\lambda>0\}\cup\{(0, 0)\}$

或等价的

$$K(r)=\{k: k=\lambda(v-(0, r))\text{对某}\lambda\geqslant 0\text{和某}v\in V\}$$

引理 1 [1] 若α有限，V是凸集，则有$\alpha=\beta$，对偶问题可解的充分必要条件$(0,\alpha)+clK(\alpha)\supset T$。

引理 2 [1] 若$T\cap\text{int } V\neq\phi$，$\alpha$有限，$V$是凸集，则$(0, \alpha)+clK(\alpha)\supset T$。

注：$clK(\alpha)$为$K(\alpha)$的闭包。

引理 3 [1] 设C是从局部凸线性拓扑空间X到R的线性连续泛函，A是从X到R_n的线性连续函数，$a\in R_n$ 若

$$\alpha=\inf\{cx: Ax\geqslant a\}$$

有限，则原问题和对偶问题均可解，且

$\alpha=\min\{cx: Ax\geqslant a\}=\max\{y^*a: y^*A=C, y^*\geqslant 0\}=\beta$

2 主要结论

定理 1 设C是从局部凸线性拓扑空间X到R的线性连续泛函，B是从X到R_m的线性连续函数，$b\in R_m$。若

$$\alpha=\inf\{cx: Bx=b\}$$

有限，则原问题和对偶问题均可解，且

$\alpha=\min\{cx: Bx=b\}=\max\{y^*b: y^*B=c\}=\beta$。

证：因为$Bx=b\Longleftrightarrow Bx\geqslant b$，$-Bx\geqslant -b$，

$$\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}Bx\\-Bx\end{pmatrix}\geqslant\begin{pmatrix}b\\-b\end{pmatrix}，\text{记}\begin{pmatrix}B\\-B\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}Bx\\-Bx\end{pmatrix}，\begin{pmatrix}b\\-b\end{pmatrix}=\bar{a}；$$

令 $H: X\to R_{2m}$，$Hx=\begin{pmatrix}B\\-B\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}Bx\\-Bx\end{pmatrix}$；

显然H是线性的，并且H是连续的。事实上：设x_δ为X中任意收敛于x'的网，即$x_\delta\to x'$，由于B是X上的线性连续泛函，于是$Bx_\delta\to Bx'$，$-Bx_\delta\to -Bx'$，从而

$$Hx_\delta=\begin{pmatrix}B\\-B\end{pmatrix}x_\delta=\begin{pmatrix}Bx_\delta\\-Bx_\delta\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}Bx'\\-Bx'\end{pmatrix}=Hx'$$

故H连续。

$$\alpha=\inf\{cx;\ Bx=b\}=\inf\{cx;\ \begin{pmatrix}B\\-B\end{pmatrix}x\geqslant\begin{pmatrix}b\\-b\end{pmatrix}\}$$
$$=\inf\{cx;\ Hx\geqslant d\}$$

于是，由引理 3 知，原问题和对偶问题可解，而且

$$\alpha=\min\{cx;\ Hx\geqslant d\}=\max\{T^*d;\ T^*H=C,\ T^*\geqslant 0\}=\beta$$

其中 $T^*\in R^*_{2m}=R_{2m}$，令 $T^*=(y_1^*,\ y_2^*)$，y_1^*，$y_2^*\in R_m^*=R_m$，y_1^*，$y_2^*\geqslant 0$。从而$T^*H=(y_1^*,\ y_2^*)\begin{pmatrix}B\\-B\end{pmatrix}$，且有

$$(y_1^*,\ y_2^*)\begin{pmatrix}B\\-B\end{pmatrix}=(y_1^*-y_2^*)B$$

事实上，$\forall x\in X$有

$$(y_1^*,\ y_2^*)\begin{pmatrix}B\\-B\end{pmatrix}x=(y_1^*,\ y_2^*)\begin{pmatrix}Bx\\-Bx\end{pmatrix}=y_1^*Bx-y_2^*Bx=(y_1^*-y_2^*)Bx$$

所以 $(y_1^*,\ y_2^*)\begin{pmatrix}B\\-B\end{pmatrix}=(y_1^*-y_2^*)B$.

又 $T^*d=(y_1^*,\ y_2^*)\begin{pmatrix}b\\-b\end{pmatrix}=(y_1^*-y_2^*)b$,

令 $y^*=y_1^*-y_2^*$则$y^*\in R_m$，于是

$$\alpha=\min\{cx;\ Bx=b\}=\max\{y^*b;\ y^*B=c\}=\beta.\quad\square$$

下面考虑混合问题（2）。

定理 2　设X是局部凸线性拓扑空间。C是从X到R的线性连续泛函，A和B分别是从X到R_n和R_m上的线性连续函数。$a\in R_n$，$b\in R_m$。若

$$\alpha=\inf\{cx;\ Ax\geqslant a,\ Bx=b\}$$

有限，则原问题和对偶问题均可解，而且

$$\alpha=\min\{cx;\ Ax\geqslant a,\ Bx=b\}=\max\{y_1^*a+y^*b;\ (y_1^*,\ y^*)\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=C,\ y_1^*\geqslant 0\}=\beta$$

其中$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$：$X\to R_{n+m}$.

证：因为$Ax\geqslant a$，$Bx=b\Longleftrightarrow Ax\geqslant a$，$Bx\geqslant b$，$-Bx\geqslant -b$，$\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}Ax\\Bx\\-Bx\end{pmatrix}\geqslant\begin{pmatrix}a\\b\\-b\end{pmatrix}$.

记 $\begin{pmatrix}A\\B\\-B\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}Ax\\Bx\\-Bx\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a\\b\\-b\end{pmatrix}=d$；

令 $\qquad H$：$X\to R_{n+2m}$，$Hx=\begin{pmatrix}A\\B\\-B\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}Ax\\Bx\\-Bx\end{pmatrix}$.

显然H是线性连续函数，于是，由引理3知，原问题和对偶问题均可解，且

$$\alpha=\min\{cx;\ Hx\geqslant d\}=\max\{T^*d;\ T^*H=C,\ T^*\geqslant 0\}=\beta$$

其中$T^*\in R^*_{n+2m}=R_{n+2m}$，令$T^*=(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*)$，$y_1^*\in R_n^*=R_n$，$y_2^*$，$y_3^*\in R_m^*=R_m$，

y_1^*，y_2^*，$y_3^*\geqslant 0$，从而

$$T^*H=(y_1^*,\quad y_2^*,\quad y_3^*)\begin{pmatrix}A\\B\\-B\end{pmatrix}$$

并且有$(y_1^*,\quad y_2^*,\quad y_3^*)\begin{pmatrix}A\\B\\-B\end{pmatrix}=(y_1^*,\ (y_2^*-y_3^*))\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

其中$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$: $X\to R_{n+m}$，

又$T^*d=(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*)\begin{pmatrix}a\\b\\-b\end{pmatrix}=y_1^*a+(y_2^*-y_3^*)b$

令 $y^*=y_2^*-y_3^*$，则$y^*\in R_m$，于是

$$\alpha=\min\{cx;\ Ax\geqslant a,\ Bx=b\}=\max\{y_1^*a+y^*b;\ (y_1^*,y^*)\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=c,\ y_1^*\geqslant 0\}. \qquad \square$$

最后，讨论问题（3）。

因为，在有限维Euclid空间[1]和[2]讨论了

$$\alpha=\inf\{cx;\ Ax\geqslant a,\ x\geqslant 0\}$$

其中C: $R_n\to R$，A: $R_n\to R_m$

得出了原问题和对偶问题解的存在性以及它们的相互关系。

类似地，我们在局部凸线性拓扑空间中引进正锥，进行相应的讨论。

定理3 设C是从局部凸线性拓扑空间X到R的线性连续泛函，A是从X到R_n的线性连续函数，P为X中的正锥，且存在$\widehat{x}\in P$，使得$A\widehat{x}-a\in \mathrm{int}Q$，$Q$为$R_n^*=R_n$中的正锥，若

$$\alpha=\inf\{cx;\ Ax\geqslant a,\ x\in P\}$$

有限，则对偶问题可解，$\alpha=\beta$，且

$$\alpha=\inf\{cx;\ Ax\geqslant a,\ x\in P\}=\max\{y^*a;\ y^*A\leqslant c,\ y^*\geqslant 0\}=\beta.$$

证：设函数$F(x,\ y)$为

$$F(x,\ y)=\begin{cases}cx, & a-Ax\leqslant y\quad x\in P;\\ +\infty, & \text{否则。}\end{cases}$$

则$\alpha=\inf_X F(x,\ 0)$，对偶问题$\beta=\sup_{Y^*}\inf_{X\times Y}[F(x,y)+y^*y]=\sup_{Y^*}\inf_X L(x,\ y^*)$，其中$L(x,\ y^*)=\inf_Y(F(x,\ y)+y^*y)$为Lagrange函数，又

$$F(x,\ y)+y^*y=\begin{cases}cx+y^*y, & a-Ax\leqslant y\quad x\in P;\\ +\infty, & \text{否则。}\end{cases}$$

因$Q=\{y:\ y\geqslant 0,\ y\in R_n\}$，设$Q^*$为$Q$的对偶锥，$Q^*=\{y^*:\ y^*y\geqslant 0,\ \forall y\in Q,\ y^*\in R_n^*=R_n\}$.

若$y^*\geqslant 0$，即$y^*\in Q^*$，当$a-Ax\leqslant y$，$x\in P$时，$y-(a-Ax)\in Q$，从而有

$$y^*(y-(a-Ax))\geqslant 0\Rightarrow y^*y\geqslant y^*(a-Ax),\ \forall y\geqslant a-Ax.$$

若$y^*\ngeq 0$，$x\in P$时，则必存在y^*的某分量小于 0，例如$y_i^*<0$，对暂时固定的x，定义y如下：

$$y_j=\begin{cases}(a-Ax)_j, & j\neq i,\\ \lambda_i>(a-Ax)_i, & j=i,\ \lambda_i>0.\end{cases}$$

于是有$y\geqslant a-Ax$，且

$$y^*y=\sum_{j\neq i}y_j^*(a-Ax)_j+y_i^*\lambda_i\to-\infty\quad(\lambda_i\to+\infty)$$

若$x\notin P$，$\forall y^*\in R_n$，均有

$$F(x,\ y)+y^*y=+\infty.$$

由上面讨论可知

$$L(x,\ y^*)=\begin{cases}cx+y^*(a-Ax), & y^*\geqslant 0\ \ x\in P;\\ -\infty, & y^*\ngeq 0\ \ x\in P;\\ +\infty, & \forall y^*\in R_n\ \ x\notin P,\end{cases}$$

$$\inf_x L(x,\ y^*)=\inf_{x\in P}L(x,\ y^*)=\begin{cases}\inf_{x\in P}[(x+y^*(a-Ax)], & y^*\geqslant 0,\\ -\infty, & y^*\ngeq 0.\end{cases}$$

$$\beta=\sup_{y^*\geqslant 0}\inf_{x\in P}[cx+y^*(a-Ax)]=\sup_{y^*\geqslant 0}\inf_{x\in P}[y^*a+(c-y^*A)x]$$

若$c-y^*A<0$，则存在$x_0\in P$，使得$(c-y^*A)x_0<0$，又$\forall\lambda>0$，$\lambda x_0\in P$，所以，$(c-y^*A)(\lambda x_0)<0$，故$c-y^*A<0$时

$$\inf_{x\in P}[y^*a+(c-y^*A)x]=-\infty.$$

若$c-y^*A\geqslant 0$时，则

$$\inf_{x\in P}\{y^*a+(c-y^*A)x\}=y^*a+\inf_{x\in P}\{(c-y^*A)x\}$$

由于$x\in P$，所以，$x=0\in P$，而$c-y^*A\geqslant 0$，故有

$$\inf_{x\in P}\{(c-y^*A)x\}=(c-y^*A)\cdot 0=0$$

$$\inf_{x\in P}\{(c-y^*A)x\}=y^*a$$

于是，对偶规划

$$\beta=\sup_{y^*}\{y^*a;\ y^*A\leqslant c,\ y^*\geqslant 0\}.$$

又因为

$$V=\{(y,\ \mu):\ \mu\geqslant cx,\ y\geqslant a-Ax,\ 对某x\in P\}$$

而$A\hat{x}-a\in \operatorname{int}Q$，所以，存在原点 0 的一个邻域$U$，使得$A\hat{x}-a+U\subset Q$，即$A\hat{x}-a+y\in Q$，$\forall y\in U$；于是，$y\geqslant a-A\hat{x}$，$\forall y\in U$；取$\mu\geqslant c\hat{x}$，从而，$\mu-c\hat{x}\geqslant 0$，$\mu-c\hat{x}-1\geqslant -1$，故只要$\mu$满足$|\mu-(c\hat{x}+1)|\leqslant 1$，便有$\mu\geqslant c\hat{x}$，取

$$W=U\times\{\mu;\ |\mu-(c\hat{x}+1)|<1\}=\{(y,\ \mu);\ |\mu-(c\hat{x}+1)|<1,y\in U\}$$

有$W\subset V$，又$(0,\ c\hat{x}+1)\in W$，故$(0,\ c\hat{x}+1)\in \operatorname{int}V$，而

$$T=\{(0,\ \mu):\ 0\in R_n,\ \mu\in R\}\subset R_{n+1}$$

于是，$T\cap \mathrm{int}V\neq\phi$，显然，$V$是凸集，由引理2和引理1知，对偶问题可解，$\alpha=\beta$，且

$$\alpha=\inf\{cx;\ Ax\geqslant a,\ x\in P\}=\max\{y^*a;\ y^*A\leqslant c,\ y^*\geqslant 0\}=\beta. \qquad \square$$

推论：条件同定理3，并且设原问题

$$\alpha=\inf\{cx;\ Ax\geqslant a,\ x\in P\}$$

可解，则对偶问题可解，$\alpha=\beta$，且

$$\alpha=\min\{cx;\ Ax\geqslant a,\ x\in P\}=\max\{y^*a;\ y^*A\leqslant c,\ y^*\geqslant 0\}=\beta$$

致谢：衷心感谢李泽民老师的热情帮助和指导。

参 考 文 献

1 Ponstein, T, Approaches to the theory of optimization, Cambridge University Press, 1980

2 管梅谷，郑汉鼎.线性规划.山东科学技术出版社，1987

3 夏道行，杨亚立.线性拓扑空间引论.上海科技出版社，1986

（编辑：姚国安）

A DUAL PROBLEM OF INFINITE—DIMENSIONAL LINEAR PROGRAMMING

Zou Jianbo

(Department of Natural Science)

ABSTRACT In this paper, the concept of bifunction is introduced for the linear programming defined on the locally convex topological linear space. The existence of the solutions of the primal problem and its dual problem is discussed. And the relation between the primal problem and its dual problem is given.

KEY WORDS linear programming, bifunction, locally convex topological linear space