重庆建筑工程学院学报
第13卷第2期 JOURNAL OF CHONGOING INSTITUTE OF Vol.13 No.2
1991 年6月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING June 1991

综 述

边界元方法中的奇异性*

祝 家 麟

(基础科学系)

摘 要 本文试图从数值计算和从数学分析的角度全面地评述现阶段边界元方法研究中对奇异性的处理。列出了计算奇异积分和超奇异积分的方法；讨论了由于边界的非光滑性引起的解的奇异性；介绍了描述它们的数学工具，如在部分边界上定义的索伯列夫空间，拟微分算子等。为将奇异性反映在边界元近似中，建议采用奇异边界单元。

关键词 边界元法，奇异性，奇异积分，非光滑边界，奇异边界单元

引 言

边界积分方程一直是对偏微分方程的边值问题进行数学分析的经典工具。近年来，在工程与科学计算中所称的边界元方法实质上就是求由边值问题归化得到的边界积分方程的数值解的各种近似方法[4][5]。边界元方法与其它数值方法相比，有许多优点。可将空间降低一维计算，特别适合于无限域上的问题，又能保持较好的收敛性。它对各种几何形状的区域都能适应，便于编制通用性的计算程序，使得它在工程技术界得到了广泛的应用[15]。然而，边界元法也面临很多困难。首先，边界元方法必须事先明确偏微分方程的基本解，这使得它往往局限于用于求解常系数或某些特殊变系数线性偏微分方程。对于一般的偏微分方程，如果能够采用一些特殊的技术把它们的边值问题（或初边值问题）转化为积分方程，这些积分方程往往不是经典的Fredholm积分方程，而是奇异积分方程，甚至是不可积的奇异性，以至于只能在广义函数（或分布）的意义上去理解这些积分。这一方面在技术上带来了数值积分的困难，另一方面也使得对它的数学分析复杂化。虽然近二十多年来发展起来的拟微分算子理论为边界元方法中遇到的各种积分方程提供了一个统一的数学框架，但可惜拟微分算子还并不为工程界，甚至是应用数学界所熟悉[45]。边界元法应用中遇到的另一类重要问题是当边界条件不光滑，或者虽然边界条件足够光滑但边界本身不光滑时，譬如边界具有角点或棱边时，边值问题的解的非光滑性。偏微分方程理论研究早已注意到了这种奇异性。但在工程计算中，现有的许多边界元程序，甚至是已经广泛应用的边界元软件包往往忽略了这种奇

本文于1990年5月18日收到。

* 本文是著者在中国数学会计算数学学会第三届理事会第一次全体会议上所作学术报告的内容(1990.5.北京)

异性或者从技术上简化了这一问题。人们通常用由边界元组成的多边形或多面体去近似原来问题定义的边界，但容易忽视在角点处或棱边处边界元解应当具有的奇异性，而这些奇异性在实际应用中往往包含了重要的信息，如断裂力学的应力强度因子等。处理这种奇异性，有技术上的麻烦，也有分析上的困难。我们面临两个任务，一方面在数值计算上要克服奇异性，另一方面在数学分析上要正确地描述奇异性，这两个目标还不能说已经达到。事实上，对于一个给定的边值问题，可选择不同的边界积分方程。对同一边界积分方程也存在着多种数值计算方法。而评价这些不同的选择的数学分析还远未完善。如果对于一个已经广泛使用的边界元程序，人们还不能确切地估计误差，进而断定它的可靠性，这样的方法，从数学的观点来说只能算是处于实验阶段。不幸的是，在三维情况下，采用配置法求解边界积分方程的这种占主流地位的边界元方法的误差估计和收敛性仍然未得到证明。对有棱角边界的边界元法的技术和数学分析也还处于很不成熟的阶段。

本文试图对现阶段边界元方法研究中，对奇异性的处理给出一个综合性的评述，包括奇异积分的数值计算和非光滑边界所引起的奇异性两部分内容，供对边界元方法有所了解的读者参考。至于边界元方法及其应用的文献，每年总有数百篇之多，它们较集中地收集在一年一度的边界元方法国际会议论文集中，如〔16〕，以及两套系列丛书〔13〕〔14〕中。国内也有工程中的边界元方法学术会议论文集〔8〕〔9〕和专著〔1〕〔2〕〔3〕等。

1　奇异积分

由二维或三维边值问题归化得出的边界积分方程，一般都可表示成下面的形式[5]

$$C(x)u(x)+\int_{\Gamma}\partial_{n(y)}E(x,\ y)[u(y)]dS_y=\int_{\Gamma}E(x,\ y)[\partial_n u(y)]dS_y,\quad x\in\Gamma \tag{1}$$

其中C是与边界Γ的几何光滑性相关的系数。例如，对二维光滑边界$C=\frac{1}{2}$。$E(x,\ y)$是偏微分算子的基本解。$\partial_n E(x,\ y)$表示与基本解的外法向导数相关的基本表达式。〔·〕表示边界值穿越Γ的跃度，即$y\in\Gamma$时，有

$$[u(y)]=u(y)\Big|_{\Gamma_{内}}-u(y)\Big|_{\Gamma_{外}},\quad[\partial_n u(y)]=\partial_n u(y)\Big|_{\Gamma_{内}}-\partial_n u(y)\Big|_{\Gamma_{外}} \tag{2}$$

位置向量x表示位于Γ上的场点。y是Γ上的积分点。

无论何种边界元方法，都要提出一个数值求解边界积分方程（1）的方法，都要建立边界元（或边界上定义的有限元空间），把边界函数（或分布）近似为只依赖于有限个参变量的表达式，从而把边界积分方程离散化为一系列在每个边界单元Γ_i（$\Gamma\approx\Gamma_h=\bigcup_i\overline{\Gamma}_i$）上积分的表达式，以得出线性方程组的系数矩阵。这些积分式的被积函数总是某一积分核函数$K(x,\ y(\xi))$（$E(x,\ y)$或$\partial_n E(x,\ y)$等）乘以插值函数（或称为形函数）$M(\xi)$再乘以雅可比行列式的绝对值$|J(\xi)|$的形式。

$$\int_{\Gamma_i}K(x,\ y)f(y)dS_y=\int_a^b K(x,\ y(\xi))M(\xi)|J(\xi)|d\xi$$

ξ是选定的局部坐标变量，对三维问题$\xi=(\xi_1,\ \xi_2)$是一个二维向量。边界元方法的实践表明，积分的准确性不仅影响到近似解的精确度，也将决定整个计算过程要花费的CPU

时间（积分计算一般要占整个计算过程的一半以上的计算量）。

我们特别关注积分点与场点位于同一单元或分别在邻近单元的情况，因为积分核$E(x,y)$及$\partial_n E(x,\ y)$都是奇异的。

设$r=|x-y|$，当x和y接近时，有

$$E(x,\ y)=O(\frac{1}{r}),\quad \partial_n E(x,\ y)=O(\frac{1}{r^2}),\ \text{三维问题,}$$

$$E(x,\ y)=O(\ln r),\quad \partial_n E(x,\ y)=O(\frac{1}{r}),\ \text{二维问题。}$$

仅含基本解$E(x,\ y)$的奇异积分，虽然都是可积的，但在数值计算时仍需采取一些措施。常用的方法有以下几类，并且往往可以结合起来使用。

2.1 采用加权高斯积分公式

一维：
$$I=\int_0^1 f(\xi)\log\xi\, d\xi\approx\sum_{k=1}^{n} w_k f(\xi^k)$$

二维：
$$I=\int_{\triangle} f(x,\ y(\xi))\frac{1}{|\xi|}d\xi\approx\sum_{k=1}^{n} w_k f(x,\ y(\xi^{(k)}))\qquad (3)$$

（△是平面基准三角形或正方形，$\xi^{(k)}=(\xi_1^{(k)},\ \xi_2^{(k)})$）

w_k是权，$\xi^{(k)}$表示高斯积分点，已有可供查询的表格，一维积分可参考〔15〕、〔31〕、〔50〕，二维积分可参考〔10〕、〔20〕、〔39〕、〔41〕。仍然有人在寻找更为理想的权函数和加权高斯型积分公式。

2.2 解析积分或半解析积分

对形状是直线段，平面三角形，平面四边形等几何形状简单的单元，可直接对积分式作解析积分或半解析积分。例如在平面单元上的积分总可以归结为在平面三角形上的积分。通常采用极坐标变换$d\xi_1 d\xi_2=\rho d\rho d\theta$。由于$\rho$的出现，可以抵消$\frac{1}{\rho}$的奇异性，从而使对变量$\rho$可以解析积分。对变量$\theta$可用解析积分或数值积分。在平面单元上$\frac{1}{|x-y|}$的积分可参考〔21〕。被限函数为$\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^3}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$的积分显式可参考〔7〕。二维情况下，在直线段单元上的积分比较容易，在园弧或二次单元上的解析积分式可参考〔30〕。

2.3 坐标变换或变量替换方法

变换可以是非线性的，目的是使变换的雅可比行列式至少能抵消一部分或全部奇异性。例如〔40〕，施行k阶变换

$$\xi=-\frac{1}{2^{k-1}}(1-\eta)^k+1\qquad (4)$$

则有

$$J_k(\eta)=\frac{k}{2^{k-1}}(1-\eta)^{k-1}\qquad (5)$$

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi=\int_{-1}^{1} f(\xi(\eta))J_k(\eta)d\eta\qquad (6)$$

当$k\geqslant 2$时，可使$f(\xi)$在$\xi=1$处的奇异性被抵消。又如文献〔33〕、〔34〕采用非线性坐标变换酐三角形变换为退化的四边形，三角形的奇异顶点被变换为四边形的第四边以至于在这条边

上雅可比行列式为零。

2.4　把积分区间再细分的方法

把单元再细分或把积分区间再细分，例如 $I=\int_0^1 log\xi d\xi$，可在〔0，1〕中插入 n 个分点。在〔6〕中，分点设为

$\xi_i=\alpha^i$（α 是予先指定的正数，$\frac{1}{2}<\alpha<1$），$i=1,\cdots,n$，$\xi_{n+1}=0$，$\xi_0=1$. 则每个子区间的长度递减非常迅速，具体为

$$h_i=\alpha^{i-1}(1-\alpha),\ i=1,\ \cdots,\ n,\ h_n=\alpha^n$$

这样在每个子区间上既使用一般的高斯积分再累加起来，也能得到满意的数值结果。

以上办法可以结合起来施行。例如，对三维问题中的边界元，可先再细分单元（集中在奇异点处），再采用极坐标变换继而对向径变量或角度变量施行变量替换，以减弱奇异性。

当积分核含有 $\partial_n E(x,\ y)$，甚至 $\partial^2_{n(x)n(y)}E(x,\ y)$ 时，按正常积分的概念，这些积分是没有意义的。它们只有在哥西主值意义下存在，或定义为有限部分型积分，即这样的发散积分只能理解为广义函数。我们只能以奇异广义函数正则化的方式来定义这些积分值。在实用的边界元技术中，遇到这些积分时通常采用以下办法计算。

2.5　间接计算的方法

由于这种奇异积分都位于系数矩阵的对角线上，利用物理、力学中均匀场或刚性位移等特殊场合，得知这个对角线元素可由同一行中所有非对角线元素（是非奇异积分）累加后反号得出。以二维位势问题为例，设 Γ 被离散为一系列边界单元 Γ_i，当场点 x_i 位于 Γ_i 时，有

$$C(x_i)+\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{r(x_i,\ y)}\right\}dS_y=C(x_i)+\sum_i\int_{\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{r(x_i,\ y)}\right\}dS_y$$
$$=\begin{cases}1，外边值问题,\\ 0，内边值问题.\end{cases}\tag{7}$$

这里 C 是场点 x_i 处边界 Γ 的切线所张的内角与 2π 之比。这样

$$C+\int_{\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{r}\right\}dS=\begin{cases}1-\sum\limits_{j\neq i}\int_{\Gamma_j}\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{r}\right\}dS，外边值问题,\\ -\sum\limits_{j\neq i}\int_{\Gamma_j}\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{r}\right\}dS，内边值问题.\end{cases}\tag{8}$$

这种方法的好处是既可避免直接计算哥西主值积分，又不必直接计算由场点所在的边界几何特征所决定的系数 C.

2.6　被积函数减去奇异项的方法

当被积式包括一个表达式复杂的奇异核，例如Bessel函数，Hankel函数等时，可把积分式改写成

$$\int_\Gamma K(x,\ y)dS_y=\int_\Gamma\{K(x,\ y)-K^*(x,\ y)\}dS_y+\int_\Gamma K^*(x,\ y)dS_y\tag{9}$$

这里 $K^*(x,\ y)$ 是一个奇异性与 $K(x,\ y)$ 相同，但表达式简单的函数，以至于对 $K^*(x,\ y)$ 的积分可以计算。而前一项的积分，由于 $K(x,\ y)-K^*(x,\ y)$ 已消去奇异性或减弱了奇异性可以计算出来。通常可把 $K(x,\ y)$ 按级数展开，分离出奇异项。例如，下面的有限部分

型积分

$$I(t)=\int_a^b \frac{w(s)f(s)}{|s-t|^{p+1}}dS \quad , \qquad t\in[a,\ b] \tag{10}$$

若$f(s)\in C^{r+1}[a,\ b]$ $w(s)$是非负的Holder连续的权函数，则

$$I(t)=\int_a^b \frac{w(s)}{|s-t|^{p+1}}\left\{f(s)-\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(s-t)^k\right\}dS$$

$$+\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}\int_a^b\frac{w(s)}{(s-t)^{p-k+1}}dS \tag{11}$$

前一项积分可用数值积分公式计算，后一项由于被积函数不涉及$f(s)$，可由有限部分积分的定义写出表达式加以计算。例如，在某些情况下，可用Kutt[31]给出的数值积分公式计算。

2.7 利用广义函数正则化的思想

被积式中含有奇异核的导数时，奇异性增加。利用广义函数正则化的思想（类似于分部积分），可将求导运算加在被积式中光滑的部分，以达到减弱奇异性的目的。例如，超奇异积分$\int(\partial^\beta log|s-t|)f(s)dS$可转化为计算$\int_{supp(f)} log|s-t|\partial^\beta f(s)dS$。又如，当解三维位势问题采用如下形式的积分方程时，

$$\frac{\partial u(y)}{\partial n}=-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \varphi(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)dS_x,\quad y\in\Gamma \tag{12}$$

其积分核有$\frac{1}{|x-y|^3}$的奇异性，是不可积的。当$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=g$为已知时，积分算子

$$D\varphi:=-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \varphi(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)dS_x=g \tag{13}$$

是+1阶拟微分算子，具有强椭圆性，对其进行严格的数学分析是可行的[45]。Nedelec[38]采用了有限部分表达式来替代(12)式：

$$\frac{\partial u(y)}{\partial n}=-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{\triangle_\Gamma\varphi(x)}{|x-y|}dS_x-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \overrightarrow{cur}|_\Gamma\,\varphi(x)\wedge \overrightarrow{grad}_x\left(\frac{1}{|x-y|}\right)(\vec{n}_x-\vec{n}_y)dS \tag{14}$$

其中 $curl_\Gamma\varphi(x)=\vec{n}(x)\wedge\overrightarrow{grad}_\Gamma\varphi(x)$,

$\triangle_\Gamma\varphi(x)=curl_\Gamma curl_\Gamma\varphi(x)$。

具体的数值计算可参考〔22〕。如果用Galerkin法求解积分方程（13），含不可积积分核$\frac{1}{|x-y|^3}$的双线性形式

$$a(\varphi,\ \psi)=\int_\Gamma\int_\Gamma \psi(y)\varphi(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)dS_xdS_y. \tag{15}$$

可转化为等价的仅含弱奇异积分核的双线性形式〔24〕

$$a(\varphi,\ \psi)=\int_\Gamma\int_\Gamma(\psi(y)-\psi(x))(\varphi(y)-\varphi(x))\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)dS_xdS_y. \tag{16}$$

像这种超奇异积分方程的变分公式还可见于其它应用上[27][19]。

关于各种数值积分的误差估计和讨论，可参考〔45〕。

3　非光滑边界

对边界元法作出误差分析大都沿用对有限元法作误差分析的方法。边界元解的收敛速度也依靠于两个参数，一是边界函数的插值逼近阶数，另一是解本身的光滑性，即原问题的解所属的Sobolev空间的指数。前一参数依赖于具体算法中所建立的边界元的逼近程度，后一参数是由问题本身决定的。对于光滑区域，只要边界条件足够光滑，解的光滑性也能得到保证。但是，当边界不光滑时，如边界Γ上有角点或棱边，奇异性就产生了。大家熟知，三维位势或断裂力学的问题中，其解u在棱边处具有$\rho^{\frac{1}{2}}$的奇异性，$\partial_n u$具有$\rho^{-\frac{1}{2}}$的奇异性（ρ是到棱边的距离）。设边界元空间$S^{m,k}\subset H^k$，则按Galerkin法求解2α阶拟微分算子的误差估计式

$$\| u-u_h \|_{H^s(\Gamma)} \leqslant c h^{t-s} \| u \|_{H^t(\Gamma)} \tag{17}$$

$$2\alpha-k\leqslant s<m \quad , \quad s<t\leqslant k.$$

如果$u\in H^k(\Gamma)$，可得最佳收敛性：

$$\| u-u_h \|_{H^{2\alpha-k}(\Gamma)} = O(h^{2(k-\alpha)}). \tag{18}$$

由于此时奇异性的存在，u至多只能属于$H^{1-\varepsilon}(\Gamma)(\varepsilon>0)$而不能属于$H^1(\Gamma)$。若用双层位势求解第二边值问题$(\alpha=\frac{1}{2})$，最多只能得到$h^{1-2\varepsilon}$的收敛阶。

为了改善收敛性，如同有限元方法一样，也可采用在奇异部位加密单元的部分，或者引入奇异单元，也就是把边界元空间扩充到包含特定的奇性函数。这里我们需要给在非光滑边界上定义的积分算子以确切的分析上的描述。为此，我们首先需要在部分边界上恰当定义的Sobolev空间。在应用上非常广泛的一类问题，如多角形或多面体上定义的混合边值问题，断裂力学，屏障问题等边界几何形状是开线段（二维问题）或开曲面（三维问题）的各种边值问题的边界元分析中，边界积分算子是定义在部分边界上的。

不妨设边界$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\gamma$，这里$\Gamma_1$和$\Gamma_2$是$\Gamma$的两个互不相交的部分，$\gamma$是$\Gamma_1$和$\Gamma_2$的公共边界（二维问题中，$\gamma$是曲线段$\Gamma_1$和$\Gamma_2$的联接点；三维问题中，$\gamma$是分割开曲面$\Gamma_1$和$\Gamma_2$的曲线）。混合边值问题就是在$\Gamma_1$和$\Gamma_2$上给出不同的边界条件。而在裂纹、裂缝、屏幕、薄膜型障碍物〔44〕、〔46〕、〔48〕等问题中，Γ_2又可能不是实在的边界，称为Γ_1的任意光滑延拓，以至于最终得到一个虚拟的闭曲面Γ。

参考Hömander和Lions、Magenes两大流派的工作〔28〕〔35〕，在部分边界（不妨设为Γ_1）上的Sobolev空间可定义为：当$s\geqslant 0$时，$H^s(\Gamma)$在Γ_1上的限制

$$H^s(\Gamma_1)=\{u|_{\Gamma_1},\ u\in H^s(\Gamma),\ \Gamma_1\subset\Gamma\},$$

其范数为

$$\| u \|_{H^s(\Gamma_1)} = \inf_{f|_{\Gamma_1}=u} \| f \|_{H^s(\Gamma)} .$$

同时定义

$$\widetilde{H}^s(\Gamma_1)=\begin{cases} H^s_0(\Gamma_1), & 若 s\neq\mu+\frac{1}{2}, \\ H^s_{00}(\Gamma_1), & 若 s=\mu+\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \mu 是非负整数。$$

这里 $H_0^s(\Gamma_1)=\{u|u\in H^s(\Gamma_1),\ u|_\gamma=0\}$， $s\neq\mu+\dfrac{1}{2}$，

$$H_{00}^{\mu+\frac{1}{2}}(\Gamma_1)=\{u|u\in H_0^{\mu+\frac{1}{2}}(\Gamma_1),\ \rho^{-\frac{1}{2}}D^\alpha u\in L^2(\Gamma_1),$$

$\forall|\alpha|=\mu$，$\rho=d(x,\gamma)$是$x\in\Gamma_1$到Γ_1的边界γ的距离，μ是非负整数 $\}$。

显然$\widetilde{H}(\Gamma_1)\subset H^s(\Gamma_1)$ $(s\geqslant0)$ 。对于负指数的Sobolev空间，我们定义为以下的对偶：

$$H^{-s}(\Gamma_1):=(\widetilde{H}^s(\Gamma_1))' \qquad (s>0)$$

如果又定义

$$\widetilde{H}^{-s}(\Gamma_1)=\{u\in H^{-s}(\Gamma_1)\quad supp\,u\subset\overline{\Gamma}_1\},$$

它是 $C_0^\infty(\Gamma_1)=\{u|u\in C^\infty(\Gamma_1),\ u|_\gamma=0\}$在$H^{-s}(\Gamma_1)$范数下的完备化空间。事实上，可以证明$\widetilde{H}^{-s}(\Gamma_1)$是$H^{-s}(\Gamma_1)$的子空间，即$\widetilde{H}^{-s}(\Gamma_1)\subset H^{-s}(\Gamma_1)$。注意，$\widetilde{H}^{-s}(\Gamma_1)$并不是$\widetilde{H}^s(\Gamma_1)$的对偶空间，而仅是$\widetilde{H}^s(\Gamma_1)$的对偶空间$H^{-s}(\Gamma_1)$的子空间[49]。按这样的定义，对任意的指数$s$，用零来把$\widetilde{H}^s(\Gamma_1)$延拓到整个$\Gamma$上定义的$H^s(\Gamma)$上的映射

$$\widetilde{H}^s(\Gamma_1)\longrightarrow H^s(\Gamma)$$

是连续的。这样可以把仅在Γ_1上定义的问题形式上扩展到在整个$\Gamma(\Gamma_1\subset\Gamma)$上讨论，而又不影响问题的实质（用零延拓）。如此，对下面在部分边界Γ_i上定义的积分算子

$$V_{ij}\varphi(x):=\int_{\Gamma_i}\varphi(y)E(x,y)dS_y,\quad x\in\Gamma_j \tag{19}$$

$$K_{ij}\varphi(x):=\int_{\Gamma_i}\varphi(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}dS_y,\quad x\in\Gamma_j \tag{20}$$

$$K'_{ij}\varphi(x):=\int_{\Gamma_i}\varphi(y)\frac{\partial \mathrm{E}(x,y)}{\partial n_y}dS_y,\quad x\in\Gamma_j \tag{21}$$

$$D_{ij}\varphi(x):=\int_{\Gamma_i}\varphi(y)\frac{\partial^2 E(x,y)}{\partial n_x\partial n_y}dS_y,\quad x\in\Gamma_j \tag{22}$$

对任意实数 s，以下的映射是连续的：

$$V_{ij}:\quad \widetilde{H}^s(\Gamma_i)\longrightarrow H^{s+1}(\Gamma_j)$$

$$K_{ij}:\quad \widetilde{H}^s(\Gamma_i)\longrightarrow H^s(\Gamma_j)$$

$$K'_{ij}:\quad \widetilde{H}^s(\Gamma_i)\longrightarrow H^s(\Gamma_j)$$

$$D_{ij}:\quad \widetilde{H}^{s+1}(\Gamma_i)\longrightarrow H^s(\Gamma_j)$$

在G.Fichera[49]基本研究工作的基础上，大量的文献（如[46]）指出，当边界不光滑时，那怕是给出光滑的边界数据，边值问题及边界积分方程的解（广义解）不可能光滑。如果采用通常的插值技术去逼近边界函数，其收敛性一定受到损害。如果我们能把边界积分方程的解分解为奇异项与非奇异项之和

$$u=\beta u^s+u^0, \tag{23}$$

这里 u^s 是由显式给出的奇异项，β是常数（或光滑函数），而 u^0 是解的正则部分。β和u^0依赖于求解问题来确定。如果试探函数u_h采用具有相同奇性的形式

$$u_h = \beta_h u^s + u_h^0, \tag{24}$$

这里u^s与(23)式中u^s相同，u_h^0是非奇异项u^0的通常的边界元近似。当$\beta = \beta_h$时，我们可得到最好的收敛结果：

$$\| u - u_h \|_{H^s(\Gamma)} = \| u^0 - u_h^0 \|_{H^s(\Gamma)} \leqslant c h^{t-s} \| u^0 \|_{H^t(\Gamma)} \tag{25}$$

因为此时近似解的逼近性仅由正则部分控制。由此可见，在构造边界元空间时，把反映具体奇异性的表达式引入边界单元，即构造奇异单元，可以改善收敛性。

对于各种具体问题，在不同类型边界下解的奇异性的特定的表达式，已有许多研究。二维情况的研究已近完善。Kondratiev[32]推出了二维角点奇异性的一般表达式：

$$u^s = \sum_{j=1}^{J} \sum_{s=0}^{S} \sum_{m=0}^{M} c_{jsm} \psi_{jsm}(\theta) r^{\alpha_j + m} (\ln r)^m \tag{26}$$

这里 (r, θ) 是角点为中心的局部极坐标系，有限的整数J，S，M，指数α_j以及各项系数只依赖于角点处的几何形状。对Laplace方程和多角形区域，角点处的u在一般的边界条件下可以更具体地写成（$S = M = 0$）

$$u = \sum_{j=1}^{J} c_j \psi_j(\theta) r^{\alpha_j} + u^0 \tag{27}$$

其中，

$$\alpha_j = \begin{cases} j\pi/\omega, & \text{对Dirichlet或Neumann边界条件,} \\ (2j-1)\pi/2\omega, & \text{对混合边界条件,} \end{cases}$$

$$\psi_j(\theta) = \begin{cases} \sin\alpha_j\theta, & \text{对Dirichlet或混合边界条件,} \\ \cos\alpha_j\theta, & \text{对Neumann边界条件,} \end{cases}$$

ω是角点处边界内部夹角，混合边界条件是指当$\theta = 0$时给的是Dirichlet边界条件，当$\theta = \omega$时，给出的是Neumann条件。

继Kondratiev的工作之后，很多人，如Grisvard[26]、Mazya[36]等对奇异项作了更详细具体的研究。这类工作都是基于与微分方程相关的特征值问题，利用扇形区域或锥形区域的Green函数来开展的。

另一类方式是Eskin[23]采用的对拟微分算子的主象征进行分解的办法，即把积分方程局部化和平坦化后转化为半空间的问题，采用所谓 Wiener-Hopf 方法，把拟微分算子的主部作因式分解，通过 Fourier 变换及其逆变换把奇异部分表达式分解出来。这种方法，对边界是开线段或开曲面的问题非常有效。Costabel和Stephan[19][43]用这种方法处理了三维的屏障和裂缝问题，Wendland和Zhu[48]处理了绕薄膜状障碍物的三维Stokes流问题。对于各种三维问题的奇异性的具体表达式，至今仍是一个活跃的研究课题，因为它远比二维问题复杂。例如，在三维屏障问题中，类似于(23)式，我们有

$$u = \beta(s) \rho^{\frac{1}{2}} \chi(\rho) + u^0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\beta(s)}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \chi(\rho) + \psi^0 \tag{29}$$

这里$\beta(s)$是开曲面的边界曲线的参数s的函数，ρ仍是到边界曲线γ的距离，$\chi(\rho)$是截断函数。在$|\rho|$充分小时，$\chi(\rho) \equiv 1$. 当$|\rho| > 1$时，$\chi(\rho) \equiv 0$. 我们称开曲面（屏幕或屏障）为Γ_1. 只要给出的边界数据充分光滑，我们可以得出[43]：

$$\beta(s)\in H^{\frac{1}{2}+\sigma}(\gamma)\quad,\quad u^0\in\widetilde{H}^{-\frac{3}{2}+\sigma'}(\Gamma_1),$$

$$\psi^0\in\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}+\sigma'}(\Gamma_1)\quad,\quad 0<\sigma'<\sigma<\frac{1}{2}.$$

这时要把奇异函数引入到边界元空间也比二维情况复杂，这是因为不仅要建立Γ_1上的边界单元，同时对$\beta(s)$也必须要用曲线γ上的边界元来近似。目前，我们还没有看到在三维问题中，采用奇异单元进行实际数值计算的报道。不过理论上的分析表明，如果试探函数也取为(28)或(29)的形式，收敛性可以到得改善。前面已提到，只要给定足够光滑的边界条件，可使

$$u^0\in H^{2-\varepsilon}(\Gamma)\qquad(\varepsilon=\frac{1}{2}-\sigma'>0),$$

按(25)，引进反映奇异性的单元后，收敛阶可提高到$O(h^{3-2\varepsilon})$，这仍然是按Galerkin方法求解边界积分方程，沿用有限元误差分析的方法得出的结果。三维问题用配置法求解边界积分方程的误差分析三维奇异边界时，引进奇异性到边界元空间中的数值算例还有待于开发。

参 考 文 献

1 杜庆华等．边界积分方程方法—边界元法．高等教育出版社，1989.10

2 严更，丁方明．边界元法基础．重庆大学出版社，1986年

3 祝家麟．椭园边值问题的边界元分析．科学出版社，1991.5

4 祝家麟．边界元方法——一个老而新的发展中的数值方法．数学的实践与认识，1985.3. pp.44—49

5 祝家麟．边界元方法的数学分析，数学的实践与认识，1989.1. pp.67—76

6 祝家麟．用边界积分方程法解平面双调和方程的Dirichlet问题．计算数学．Vol.6. №3. 1984. pp.278—288

7 祝家麟．三维定常Stokes问题的边界积分方程法．计算数学．Vol.7. №1. 1985. pp.40—49

8 杜庆华编．第一届工程中的边界元法会议文集．1985,12，重庆，西安交通大学印刷

9 杜庆华编．第二届工程中的边界元法会议文集．1982,12,南宁，西安交通大学印

10 Aliabadi, M.H., Hall,W.S.(1987). Weighted Gaussian methods for three-dimensional boundary element kernel integration. Comm. Appl. Numer. Methods. Vol.3, pp.89—96

11 Aliabadi,M.H.,Hall W.S., Phemister T.G. (1985), Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method. Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.21, pp.2221—2236

12 Baker, C.T.H.(1977), The Numcrical Treatment of Integral Equations Oxford University Press

13 Banerjee,P.K.,et al., Developments in Boundary Element Methods Vol.1, 2, 3, Applied Science Publishers, London, 1979 ff

14 Brebbia, C.A. editor. Progress in Boundary Element Methods,

Vol.1, 2, 3, 4, Springer-Verlag, Berlin, 1981 ff

15 Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C. (1984), Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin

16 Brebbia, C.A., editor, Boundary Elements X, (1988), Proceedings of the 10th International Conference on BEM, Southampton.1989.9, Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Berlin, 1988

17 Costabel, M., Boundary integral operators on curved polygons, Ann. Mat. Pura Appl. 33 (1983), pp.305—326

18 Costabel, M., Stephan, E., Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation. in (Fiszdon, W., Wilmànski, K., eds.) Math. Models and Meth. in Mech. 1981, Banach Center Publ. 15 (1985) Warsaw, pp.175—251

19 Costabel, M., Stephan, E.P., An improved boundary element Galerkin method for three-dimensional crack problems, Integral Equs. and Operator Theory, 10 (1987), pp.467—504

20 Cristescu, M., Loubignac, G., (1978). Gaussian quadrature formula for functions with singularities in 1/R over triangles and quadrangles. In Recent Advance in the Boundary Element Method (ed. Brebbia, C.A.) Pentech Press. New York

21 Cruse, T.A., Numerical solution in three dimensional elastostatics, Int. J. Solids Structures, 5 (1969), pp.1259—1274

22 Duong, T.H., A Finite element method for the double—layer potential solutions of the Neumann exterior problem, Math. Meth. in the Appl. Sci. 2 (1980) pp.191—208

23 Eskin, G.I., Boundary problems for elliptic Pseudo-differential operators, Transl. of Math. Mon., American Math. Soc. 52, Providence Rhode Island (1981).

24 Giroire, J., Nedelec, J.C., Numerical sotution of an exterior Neumann problem using a double layer potential, Math. of computation, 32 (1978), pp.973—990

25 Grisvard, P., Behaviour of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain, in Numerical Solution of PDE Ⅲ (ed. Hubbard, B.), Synspade, Academic Press, New York, (1976), pp.207—274

26 Guiggiani, M., Casalini. P., Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements. Int. J.

Numer. methods Eng., 24 (1987), pp.1711—1720

27 Hamdi, M., Une formnlation variaionnelle par èquations intègrales pour la rèsolution de l'èquation de Helmholtz avec des conditions aux limites mixtes, C.R. Acad. Sci. Paris, Sèrie II 292(1981) pp.17—21

28 Hörmander, L., Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, Berlin (1969)

29 Jun, L., Beer, G., Meek, J.L., Efficient evaluation of integrals of order $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^3}$ using Gauss quadrature. Engineering Analysis 2 (1985), pp.118—123

30 Katz, C., Analytic integration of isoparametric 2D boundary elements. In Boundary Elements VII (ed. Brebbia, C.A., Maier, G.) Proceedings of the 7th Int. Conf., Como, Italy, pp.115—130

31 Kutt, H.R., The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. Numer. Math., 24 (1975), pp.205—210

32 Kondratiev, V.A., Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Trans. Moscow Math. Soc. 16 (1967), pp.227—313

33 Lachat, J.C., Watson, J.O., Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. Int. J. Numer. Meth. Eng., 10 (1976), pp.991—1005

34 Lean, M.H., Wexler, A., Accurate numerical integration of singular boundary element kernels over boundaries with curvature. Int. J. Numer. Methods. Eng., 21 (1985), pp.211—228

35 Lions, J.L., Magenes, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. I, Springer-Verlag, Berlin (1972).

36 Maz'ya, V.G., Plamenevskii, B.A., On the coefficients in the asymptotics of solutions of elliptic boundary value problems near the edgc. Soviet Math. Dokl., 17 (1976), pp.970—974

37 Monegato, G., The Numerical evaluation of one-dimensional Cauchy principal value integrals, Computing, 29 (1982), p.337—354.

38 Nedelec, J.C., Integral equations with non integrable kernels. Integral Equs. and Operator Theory, 5 (1982), pp.562—572

39 Pina, H.L.G., Fernades, J.L.M., Brebbia, C.A., Some numerical integration formulae over triangles and squares with 1/R singularity. Appl. Math. Modelling. 5 (1981), pp.209—211

40 Sato, M., Yuuki, R., Yoshioka, S., Accurate Numerical integration of singular kernels in the two-dimensional boundary element

Method, Proc. of the 4th Japan National symposium on Boundary Element Methods, JASCOME, (1987), pp.37—42

41 Schwab, C.H., Wendland, W.L., 3-D BEM numerical integration. In Boundary Elements Ⅶ (ed. Brebbia, C.A., Maier, G.) Proc. of 7th. Int. Conf., Como. Italy. (1985)

42 Stephan, E.P., A boundary integral equation method for three-dimensional crack problems in elasticity, Math. Meth. Appl. Sci. 8 (1986) pp.609—623

43 Stephan, E.P., Boundary integral equations for screen problems in R^3, Integral Equs, and Oper. Theory, 10 (1987), pp.236—257

44 Stephan, E.P., Wendland, W.L., An augmented Galerkin procedure for the boundary integral method applied to two-dimensinal screen and crack problems. Appl. Analysis 18 (1984), 183—219

45 Wendland, W.L., On some mathematical aspects of boundary element methods for elliptic problems. In Mathematics of Finite Elements and Applications (ed. Whiteman, J.) Academic Press London (1985), pp.193—227

46 Wendland, W.L., Stephan. E.P., Hsiao, G.C. On the integral equation method for the plane mixed boundary value problem of the Laplacian. Math. Meth. in the Appl. Sci, 1 (1979), 265—321

47 Wendland, W.L., Volk, K., Schmitz, H., A boundary element method for three-dimensional singularities of elastic fields in Proc 2nd Nat. Congress Mechanics. Athens

48 Wendland, W.L., Zhu, J., The boundary element method for three -dimensional Stokes flows exterior to an open surface, Mathematical and Computer Modelling (Formerly Mathematical Modelling), Vol. 15, 6 (1991) , pp. 19—41

49 Fichera, G., sul problema della derivata obliqua e sul problema misto per l'equazione di Laplace. Boll. Un. Mat. Italy. Ser. Ⅱ 7 (1952) pp.367—377

50 Stroud, A., Secrest, D., Gaussian Quadrature Formulas, Prentice -Hall, New York, 1966

（编辑：姚国安）

SINGULARITIES IN BOUNDARY ELEMENT METHODS

Zhu Jialin
(Department of Natural Science)

ABSTRACT This paper presents an all round review of recent developments in treating the singularities in boundary element methods both for numerical computing and for mathematical analysing. Approaches for numerical treatment of singular and hyper-singular integrations are listed. Singular behaviour of solution on non-smooth boundary are discussed and the mathematical tools for describing it, such as the Sobolev spaces defined on a part of boundary, the pseudo-differential operators are presented. In order to incorporate the singular behaviour into the boundary element approximation, the technique of introducing singular boundary element is suggested.

KEY WORDS boundary element method, singularity, singular integral, non-smooth boundary, singular boundary element.