(9)

重庆建筑工程学院学报
第14卷第3期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.14 No.3
1992年 9月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING Sept. 1992

25-29

拓扑等价度量生成的一些新方法及应用

白任伦

（基础科学系）

O189.11

摘 要 若干文献中经常用到空间中的新度量，而它与空间的原度量是拓扑等价的。本文将推广新的拓扑等价度量产生的方法，这在理论与应用上均是有意义的。

关键词 拓扑等价，度量空间

1 定义及引理

定义1 一度量空间是序对$(x,d)\Longleftrightarrow X$—基本集，$d$：$X\times X\longmapsto R^{+}\cup\{0\}$且满足：

(M_1) $d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$

(M_2) $d(y,x)=d(x,y)$, $\forall x,y\in X$

(M_3) $d(x,z)=d(x,y)+d(y,z)$, $\forall x,y,z\in X$

定义2 (X,d)——度量空间，由基

$$B_d=\{B(x,\varepsilon)|\varepsilon>0,x\in X\}$$

其中

$$B(x,\varepsilon)=\{y|d(x,y)<\varepsilon\}$$

产生之拓扑称为度量拓扑，记为T_d

定义3 B_1与B_2为X上之二拓扑基，若其产生之拓扑一致，则称B_1与B_2为等价之拓扑基。

引理1 B_1与B_2等价之充要条件为：$\forall\beta_1\in B_1$，$\forall x\in\beta_1$，$\exists\beta_2\in B_2$，$x\in\beta_2\subset\beta_1$且$\forall\beta_2\in B_2$，$\forall x\in\beta_2$，$\exists\beta_1\in B_1$，$\ni$：$x\in\beta_1\subset\beta_2$

引理2 ρ与d同为X中之度量，则$T_d=T_\rho$之充要条件为$\forall x\in X(\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,B_d(x,\delta)\subset B_\rho(x,\varepsilon)$，且$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$B_\rho(x,\delta)\subset B_d(x,\varepsilon))$，此时称$\rho$与$d$为拓扑等价之度量。

引理3 $\rho(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ 则ρ为X上之度量，且ρ与d拓扑等价。

引理4 $\rho(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$，则$\rho$为$X$上之度量且$\rho$与$d$拓扑等价。

本文1991年9月27日收到。

引理5 若 d 为拓扑空间 (X,τ) 上之一度量，则 $\tau=T_\rho$ 之充要条件为：$\forall A\subset X$，$\rho(x,A)=0$，当且仅当 $x\in\overline{A}$。

2 定理及证明

定理1 (X,d)——度量空间 $\varphi: R^+\cup\{0\}\longmapsto R$

(1) $\varphi(x)=0 \Longleftrightarrow x=0$

(2) $\varphi'(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in[0,+\infty)$

(3) φ为次可加的，即对$\forall x,y\in[0,+\infty)$

$$\varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)+\varphi(y)$$

(4) $\rho=\varphi\circ d$： $X\times X\longmapsto R$

则 ρ 仍为空间X上之一度量，且$T_\rho=T_d$

证： ρ： $X\times X\longmapsto R$，$\rho=\varphi\circ d$

下证ρ满足度量公理，$\forall x,y,\ z\in X$

$$(M_1)\quad \rho(x,y)=0$$
$$\Longleftrightarrow \varphi\circ d(x,y)=0$$
$$\overset{由①}{\Longleftrightarrow} d(x,y)=0$$
$$\Longleftrightarrow x=y$$
$$(M_2)\quad \rho(x,y)=\varphi\circ d(x,y)=\varphi\circ d(y,x)=\rho(y,x)$$
$$(M_3)\quad \because d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

又$\because$ $\varphi'(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in[0,+\infty)$

$\therefore$ $\varphi(x)$单调增加 $\forall x\in[0,+\infty)$

$\therefore$ $\rho(x,y)=\varphi\circ d(x,y)=\varphi[d(x,y))\leqslant\varphi(d(x,z)+d(z,y))$

又由φ之次加性

$$\varphi(d(x,y)+d(z,y))\leqslant\varphi(d(x,y))+\varphi(d(z,y))$$
$$=\varphi\circ d(x,y)+\varphi\circ d(z,y)$$
$$=\rho(x,y)+\rho(z,y)$$

所以，ρ 为X上之一度量。

欲证 ρ 与 d 拓扑等价，须证 T_ρ 与 T_d 有等价之拓扑基。

1. 空间(X,T_d)中，$\forall\varepsilon>0$，基元$B_d(x,\varepsilon)\in B_d$，$\exists\delta=\varphi(\varepsilon)>0$，由$\varphi$在$[0,\infty)$之单调性，则当

$$\rho(x,y)=\varphi\circ d(x,y)<\delta=\varphi(\varepsilon)\text{时}$$

必有 $\quad d(x,y)<\varepsilon$

即$\exists\delta$ $\quad B_\rho(x,\delta)\in B_{T_\rho}$ 致

$$B_\rho(x,\delta)\subset B_d(x,\varepsilon)$$

2. $\because\varphi$可微，故连续，又$\varphi(0)=0$

$\forall\varepsilon>0$，即$\forall B_\rho(x,\varepsilon)\in B_\rho$，$\exists\delta>0$，当 $d(x,y)<\delta$ 时

$$\rho(x,y)=\varphi\circ d(x,y)<\varepsilon$$

即对$\forall x\in X$

$$B_d(x,\delta)\subset B_\rho(x,\varepsilon)$$

$\therefore$ B_d与B_ρ为等价之拓扑基

$\therefore$ $T_d=T_\rho$

$\therefore$ d与ρ为X上拓扑等价之度量 □

下面之定理2为由(X,ρ)上的可数映射族ρ_i产生与ρ拓扑等价的度量d的方法与结果。

定理2 (X,ρ)是度量空间，$\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$为$X\times X$上之可数函数族且$\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$满足以下条件：

(1) $\forall\rho_i$: $X\times X\longmapsto R$是$T_\rho\times T_\rho$连续的

(2) 对$\forall$非空之T_ρ—闭集$F\subset X$，若$x\bar{\in}F$，则$\exists i$，$\ni$：$\rho_i(x,F)=\inf\limits_{a\in F}\rho_i(x,a)>0$

(3) $\forall(x,y)\in X\times X$，$\rho_i(x,y)$一致有界，即$\exists M>0$，$\ni$：$\forall i$，$\rho_i(x,y)\leqslant M$

(4) ρ_i本身为伪度量族

令

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{z^i}\rho_i(x,y)$$

则 d: $X\times X\longmapsto R$

是X上之一度量，且d与ρ拓扑等价

证：对d验证度量公理

(M_1) $\forall x\in X$，$d(x,x)=0$

$\because$ (X,ρ)是T_1的，$\forall x,y\in X$，$x\neq y$，$x\bar{\in}\{y\}=\overline{\{y\}}$

由已知，$\exists\rho_i\ni$：$\rho_i(x,y)>0$，$\therefore d(x,y)>0$

$$\therefore\quad x=y\Longleftrightarrow d(x,y)=0$$

(M_2)，(M_3)由$\forall\rho_i$是伪度量直接可得

欲证 $T_d=T_\rho$ 只须证：对$\forall A\subset X$，$\overline{A}_{T_d}=\overline{A}_{T_\rho}$，事实上，若$x\bar{\in}\overline{A}_{T_\rho}$由已知$\exists i$使得

$$\rho_i(x,\overline{A}_{T_\rho})=r>0$$

因为

$$d(x,A)=\inf_{y\in A}d(x,y)$$

而对$\forall y\in A$：

$$d(x,y)\geqslant\frac{1}{z^i}\rho_i(x,y)\geqslant\frac{1}{z^i}\rho_i(x,\overline{A}_{T_\rho})=\frac{r}{z^i}$$

所以

$$d(x,A)\geqslant\frac{r}{z^i}>0$$

故

$$x\bar{\in}\overline{A}_{T_d}$$

另一方面，$\because\forall\rho_i$: $X\times X\longmapsto R$是$\rho\times\rho$连续的

所以

$$\varphi_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z^i}\rho_i(x,y)$$

也是$X\times X$上的连续函数，且一致收敛于$d(x,y)$

事实上，$d(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{z^i}\rho_i(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x,y)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \ni: \forall n \geq N \quad \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$ 所以

$$|\varphi_n(x,y) - d(x,y)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\rho_i(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\rho_i(x,y) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\rho_i(x,y) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{M}{2^i} < M\varepsilon$$

所以，d 在 $X \times X$ 上是 $\rho \times \rho$ 连续的。

又由 $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ 知：$f(x) = d(x,A)$

是 T_ρ——连续的。事实上，若 $\rho(x_n,x) \longmapsto 0$ 则 $(x_n,x) \xrightarrow{\rho \cdot \rho} (x,x)$ 故有：

$$|d(x_n,A) - d(x,A)| \leq d(x_n,x) \longmapsto d(x,x) = 0$$

所以，若 $x \in \overline{A}_{T\rho}$ 则

$$f(x) \in f(\overline{A}_{T\rho}) \subset \overline{f(A)} = \overline{\{0\}} = \{0\}$$

所以
$$d(x,A) = f(x) = 0$$

$$\therefore \quad x \in \overline{A}_{Td}$$

从而得

$$\overline{A}_{T\rho} = \overline{A}_{Td} \qquad \square$$

应用举例

引理 3 中，若令 $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$，则于 (X,d) 中，φ：$R^+ \cup \{0\} \longmapsto R$ 且

(1) $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$

(2) $\varphi'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$

(3) φ 为次可加的，即对 $\forall x,y \in [0,\infty)$，$\forall x \in [0,\infty)$

$$\varphi(x+y) = \frac{x+y}{1+(x+y)} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} = \varphi(x) + \varphi(y)$$

(4) $\rho = \varphi \circ d$：$X \times X \longmapsto R$

$$\forall (x,y) \in [0,\infty) \quad \rho(x,y) = \varphi \circ d(x,y)$$

由定理 1，ρ 为空间 X 上之一度量，且 $T_\rho = T_d$，仿此可构造若干新度量。

参 考 文 献

1 郭大均．非线性泛函分析．山东科技出版社，1988

2 J.L.Kelley．一般拓扑学．科学出版社，1982

3 W.Rudin．实分析和复分析．人民出版社，1982

4 B.T.Sims. Fundamentals of Topology. Macmillan P.CO.INC, New York, 1980

5 Jones. T.F.Non Metrization of Topological Space. Amer. Math.Soc. Transl. 91(1983)

（编辑：刘家凯）

TWO METHODS OF GENERATING TOPOLOGICAL EQUIVALENT METRIC AND APPLICATIONS

Bai Renlun

(Dept. of Natural Science)

ABSTRACT Many papers often use new metric on space, which is equivalent to old metric. This paper gives two methods to generate new topological equivalent metric, and it is valuable to theories and applications.

KEY WORDS topological equivalent, metric on space, topology