第 17 卷 第 1 期
1995 年 3 月

重庆建筑工程学院学报
J. Chongqing Inst. of Archit & Engin.

Vol. 17 No. 1
Mar. 1995

37-42

广义向量最优化问题的最优性条件*

李声杰
(基础科学系)

O 224

摘 要 本文讨论了目标函数是集值映射的约束和无约束最优化问题，应用切导数，得到了类似的 K—T 必要和充分条件。

关键词 广义向量最优化，切导数，拟内部导数

中图法分类号 O224

必要条件

向量最优化问题的最优性条件是最优化问题的主要组成部分，它在最优化问题的理论和应用中扮演着极其重要的角色，自从 70 年代开始，已经有许多国内外学者从事这方面的研究。如文献[1]，[2]，[3]，[4]，他们都讨论了向量极值问题的 K－T 条件，在文[4]中，H. W. Corley 讨论了如下两个问题：(1) 目标函数是集值映射的无约束最优化问题；(2) 目标函数是集值映射带约束的最优化问题。显然(1)和(2)是一般多目标规划问题的抽象。它们的应用可在文献[5]、[6]中看到，本文在此基础上，1 中引入切导数和拟内部导数的概念，讨论了它们之间的关系，3 中针对问题(1)，在另外的条件下得到了相应的最优性条件，4 中针对(2)，应用切导数和拟内部导数的关系，得到形式上同于一般多目标规划的 K－T 最优性条件。

1 切导数、拟内部导数和它们的关系

定义 1(见[7]) 设 C 是 Banach 空间 Z 的子集，$x_0 \in$ Z，则称集

$$T_C(x_0) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\alpha,\beta>0} \bigcap_{\substack{x\in B_C(x_0,\alpha)\\ 0<h<\beta}} \left(\frac{1}{h}(C-x)+\varepsilon B\right)$$

为 B 在点 x_0 的切锥，其中 $B_C(x_0,\alpha) = C \bigcap (x_0+\alpha B)$，$B$ 是中心在原点的单位球。

显然有 $v \in T_C(x_0)$ 的充要条件是对任意 $x_n \in C \to x_0, h_n \to 0^+$ 存在子序列 $x_{\alpha(n)} \to x_0, h_{\alpha(n)} \to 0^+$ 和序列 $v_n \to v$，使得

$$x_{\alpha(n)} + h_{\alpha(n)} v_n \in C$$

定义 2 设 $F: Z \to Y$ 是集值映射，$(x_0, y_0) \in graphF$，

1) 设 $DF(x_0,y_0): X \to Y$ 是集值映射，$y \in DF(x_0,y_0)(x)$ 的充要条件是 $(x,y) \in T_{graphF}(x_0, y_0)$，则称 $DF(x_0,y_0)$ 为 F 在点 (x_0,y_0) 的切导数，其中 $graphF = \{(x,y) \in X \times Y | y \in F(x)\}$。

---

* 收稿日期：1993-04-01
李声杰，1962 年生，副教授，重庆建筑大学基础科学系(630045)
本文是国家自然科学基金资助项目

2) 设 $QF(x_0,y_0):X\to Y$ 是集值映射，且 $y\in QF(x_0,y_0)(x)$ 的充要条件是对任意 y 的邻域 W，存在 x_0 的邻域 V，y_0 的邻域 V，实数 $\varepsilon>0$ 和 x 的邻域 N，使得

$$[(v,u)+t(\{v'\}\times W)]\cap GraphF\neq\varnothing$$

对于任意 $(v,u)\in(V\times U)\cap graphF,t\in]0,\varepsilon[v\in N$

自然有①$y\in DF(x_0,y_0)(x)$ 的充要条件(见文[8])是对任意 $(v_n,u_n)\in graphF\to(x_0,y_0)h_n\to 0^+$、存在子序列 $(v_{\alpha(n)},u_{\alpha(n)})\to(x_0,y_0),h_{\alpha(n)}\to 0^+$ 和序列 $y_n\to y,x_n\to x$，使得

$$u_{\alpha(n)}+h_{\alpha(n)}y_n\in F(v_{\alpha(n)}+h_{\alpha(n)}V_n)\qquad\forall n$$

② $y\in QF(x_0,y_0)(x)$ 的充要条件(见文[8])是对任 $(v_n,u_n)\in graphF\to(x_0,y_0)\quad h_n\to 0^+,x_n\to x$，存在子序列 $(v_{\alpha(n)},u_{\alpha(n)})\to(x_0,y_0)h_{\alpha(n)}\to 0^+,x_{\alpha(n)}\to x$ 和序列 $y_n\to y$，使得

$$u_{\alpha(n)}+h_{\alpha(n)}y_n\in F(v_{\alpha(n)}+u_{\alpha(n)}x_{\alpha(n)})\qquad\forall n$$

为了讨论的方便起见，把上述结论中的子序列看作它本身。如②可改写成如下形式：

$y\in QF(x_0,y_0)(x)$ 的充要条件为对任意 $(v_n,u_n)\in graphF\to(x_0,y_0),h_n\to 0^+,x_n\to x$ 存在 $y_n\to y$ 使得

$$u_n+h_ny_n\in F(v_n+h_nx_n)\qquad\forall n$$

定义 3 称 F 在点 x_0 是李普希兹连续的，如果存在 x_0 的邻域 W，使得

$$F(x_1)\subset F(x_2)+M\|x_1-x_2\|B\qquad\forall x_1,x_2\in W$$

命题 1 设 F 在点 x_0 是李普希兹连续的，$y_0\in F(x_0)$，则

$$DF(x_0,y_0)(x)=Q(x_0,y_0)(x)$$

证 由定义有 $QF(x_0,y_0)(x)\subset DF(x_0,y_0)(x)$，所以只须证 $DF(x_0,y_0)(x)\subset QF(x_0,y_0)(x)$ 即可

设 $y\in DF(x_0,y_0)(x)$

则对任意 $(v_n,u_n)\in graphF\to(x_0,y_0),h_n\to 0^+$，存在 $\bar{x}_n\to x,\bar{y}_n\to y$，使得

$$u_n+h_n\bar{y}_n\in F(v_n+h_n\bar{x}_n)$$

任取序列 $\{x_n\}$，且 $x_n\to x$，

由于 F 在点 x_0 是李普希兹连续的，则存在 x_0 的邻域 W，使得

$$F(x_1)\subset F(x_2)+M\|x_1-x_2\|B\qquad\forall x_1、x_2\in W$$

显然当 n 充分大时，有

$$v_n+h_n\bar{x}_n\in W,\quad v_n+h_nx_n\in W$$

所以存在子序列 $v_{\alpha(n)}、h_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}、\bar{x}_{\alpha(n)}$，使得

$$v_{\alpha(n)}+h_{\alpha(n)}\bar{x}_{\alpha(n)}\in W,v_{\alpha(n)}+h_{\alpha(n)}x_{\alpha(n)}\in W\quad\forall n$$

又因为 $u_{\alpha(n)}+h_{\alpha(n)}\bar{y}_{\alpha(n)}\in F(v_{\alpha(n)}+h_{\alpha(n)}\bar{x}_{\alpha(n)})$

所以存在 $d_{\alpha(n)}\in M\|x_{\alpha(n)}-\bar{x}_{\alpha(n)}\|B,d_{\alpha(n)}\to 0$，满足

$$u_{\alpha(n)}+h_{\alpha(n)}\bar{y}_{\alpha(n)}-h_{\alpha(n)}d_{\alpha(n)}\in F(v_{\alpha(n)}+h_{\alpha(n)}x_{\alpha(n)}))$$

令 $y_{\alpha(n)}=\bar{y}_{\alpha(n)}-d_{\alpha(n)}$

显然 $y_{\alpha(n)}\to y$

由定义 $y\in QF(x_0,y_0)(x)$

因此有 $DF(x_0,y_0)(x)=QF(x_0,y_0)(x)$

2　问题的引出

设 X、Y、Z 是 Banach 空间，K 是 Y 的点凸锥，D 是 Z 的点凸锥，$A \subset X$.

$F: X \to Y$ 是集值映射，$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$

$G: X \to Z$ 是集值映射，$G^-(U) = \{x \mid G(x) \cap U \neq \varphi\}$

设 K 在 Y 上定义的偏序如下：

对任意 y_1、$y_2 \in Y$

$y_1 \leqslant y_2 \quad iff\ y_2 - y_1 \in K \backslash \{0\}$

$y_1 < y_2 \quad iff\ y_2 - y_1 \in K^0$（$K^0$ 表示 K 的内部）

定义 4　设 $B \subset Y$，$y_0 \in B$

(1) 如果不存在 $y \in B$，使得 $y_0 \leqslant y$，则称 y_0 为 B 的有效点，B 的全体有效点记为 $\max B$；

(2) 如果不存在 $y \in B$，使得 $y_0 < y$，则称 y_0 为 B 的弱有效点。B 的全体弱有效点记为 $W\max B$。

显然有 $y_0 \in \max B$ 的充要条件是 $K \cap [B - y_0] = \{0\}$

$y_0 \in W\max B$ 的充要条件是 $K^0 \cap [B - y_0] = \varnothing$

下面引出约束和无约束广义向量最优化问题：

(1) $\underset{x \in A}{maximize}\ F(x)$

即求存在 $y_0 \in F(x_0)$，使得 $y_0 \in \max F(A)$（或 $y_0 \in W\max F(A)$）所有 x_0 点，x_0 称为问题 1 在点 y_0 的有效点（或弱有效点）；

(2) $\underset{x \in E}{maximize}\ F(x)$

$s.t.\ G(x) \cap D \neq \varnothing$

即求存在 $y_0 \in F(x_0)$，$x_0 \in E \cap G^-(D)$，使得 $y_0 \in maxF(E \cap G^-(D))$（或 $y_0 \in WmaxF(E \cap G^-(D))$ 的所有 x_0 点，x_0 称为问题 2 在点 y_0 的有效点（或弱有效点）。

3　无约束问题的最优性条件

定理 1　设 x_0、$x \in domF$，$graphF$ 是凸集，$y_0 \in F(x_0)$

则　$F(x) - y_0 \subset DF(x_0, y_0)(x - x_0)$

证　首先证

$$DF(x_0,y_0)(x) = \left\{ y \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{存在 } h_n \to 0^+, x_n \to x, y_n \to y \\ \text{使得 } y_0 + h_n y_n \in F(x_0 + h_n x_n) \end{array} \right\} \stackrel{\triangle}{=} M$$

由定义显然有　$DF(x_0, y_0)(x) \subset M$

所以只须证　$M \subset DF(x_0, y_0)(x)$

设 $y \in M$，则存在 $\bar{h}_n \to 0^+$，$x_n^1 \to x$，$y_n^1 \to y$，使得

$$y_0 + \bar{h}_n y_n^1 \in F(x_0 + \bar{h}_n x_n^1) \quad \forall n$$

即

$$(x_0 + \bar{h}_n x_n^1, y_0 + \bar{h}_n y_n^1) \in graphF$$

任取 $(v_n, u_n) \in graphF \to (x_0, y_0)$　　$h_n \to 0^+$，选取子序列，使得

$$\| v_{\alpha(n)}, u_{\alpha(n)}) - (x_0, y_0) \| \leqslant \bar{h}_n^2, \qquad h_{\alpha(n)} \leqslant \bar{h}_n$$

显然有
$$(v_{\alpha(n)}, u_{\alpha(n)}) \to (x_0, y_0) \quad h_{\alpha(n)} \to 0^+$$

令
$$(x_n, y_n) = \frac{1}{\bar{h}_n}((x_0 + \bar{h}_n x_n^1, y_0 + \bar{h}_n y_n^1) - (v_{\alpha(n)}, u_{\alpha(n)}))$$

则
$$\| x_n, y_n) - (x, y) \| \leqslant \| (x_n^1, y_n^1) - (x, y) \| + \frac{1}{\bar{h}} \| (v\,\alpha(n), u_{\alpha(n)}) - (x_0, y_0) \|$$
$$\leqslant \| (x_n^1, y_n^1) - (x, y) \| + \bar{h}_n \to 0 (n \to \infty)$$

即
$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad (n \to \infty)$$

而
$$(v_{\alpha(n)}, u_{\alpha(n)}) + h_{\alpha(n)}(x_n, y_n) = \left(1 - \frac{h_{\alpha(n)}}{\bar{h}_n}\right)(v_{\alpha(n)}, u_{\alpha(n)}))$$
$$+ \frac{h_{\alpha(n)}}{\bar{h}_n}(x_0 + \bar{h}_n x_n^1, y_0 + \bar{h}_n y_n^1) \in graphF$$

由定义
$$y \in DF(x_0, y_0)(x)$$

因此
$$DF(x_0, y_0)(x) = M$$

任取 $y \in F(x)$，由于 $graphF$ 是凸集

所以
$$(1 - h)y_0 + hy \in F(x_0 + h(x - v_0)]$$

因此
$$y - y_0 \in \frac{F(x_0 + h(x - x_0))}{h} \subset M$$

由首先证明的结果，有 $y - y_0 \in DF(x_0, y_0)(x - x_0)$

因此
$$F(x) - y_0 \subset DF(x_0, y_0)(x - x_0)$$

定理 2 如果 x_0 是关于问题(1) 在点 y_0 的(弱) 有效点，则
$$DF_A(x_0, y_0)(x) \cap K^0 = \varnothing \quad \forall x \in A$$

证 见文[4] 定理 4.1

定理 3 设 $graphF$ 是凸集 $y_0 \in F(x_0)$，$A \subset Dom(F)$ 是凸集，如果
$$K \cap DF_A(x_0, y_0)(x - x_0) = \{0\}$$
则 x_0 是问题 1 在点 y_0 的有效点。

如果 $K^0 \cap DF_A(x_0, y_0)(x - x_0) = \varnothing \quad \forall x \in A$

则 x_0 是问题 1 在点 y_0 的弱有效点。

证 由定理 1，对任意 $x \in A$，有
$$K \cap [F(x) - y_0] \subset K \cap DF_A(x_0, y_0)(x - x_0) = \{0\}$$
所以 x_0 是问题 1 在点 y_0 的有效点

同理可证第二个结论。

设 Y^* 是 Y 的共轭空间 $\quad K^+ = \{l \in Y^* \mid l(y) \geqslant 0 \quad \forall y \in K\}$

设 $l \in K^+$，如果对任意 $y \in K^0$，有 $l(y) > 0$，则称 l 是正的，如果对任意 $y \in K$，有 $l(y) > 0$，则称 l 是严格正的。

由凸集分离定理，自然有如下结论。

定理 4 (a) 如果 x_0 是问题 1 在点 y_0 的(弱) 有效点，则存在正的 $l \in K^+$，使得 $l \cdot DF(x_0, y_0)(x_0) \leqslant 0$

(b) 设 $graphF_A$ 是凸集，如果存在(严格) 正的 $l \in K^+$，使得 $lDF_A(x_0, y_0)(x - x_0) \leqslant 0, \forall x \in A$。

则 x_0 是(弱)有效点(对问题1在点 y_0)。

4　约束问题的最优性条件

定理5　设 F 在点 x_0 是李普希兹连续的，$K^c \neq \emptyset$，$D^c \neq \emptyset$，且 x_0 是约束问题在点 y_0 的(弱)有效点，则对任意 $z_0 \in G(x^0) \cap D$，存在 $u \in D^+$，$l \in K^+$，$(l,u) \neq 0$，使得

$$u(z_0) = 0$$

$$lDF_K(x_0,y_0)(x) + uDG_K(x_0,z_0)(x) \leqslant 0$$

证　设 $(F_K,G_K):Z \to Y \times Z$ 是集值映射，且 $(F_K,G_K)(x) = F_K(x) \times G_K(x)$

下面首先证明

$$D(F_K,G_K)(x_0,y_0,z_0)(x) = DF_K(x_0,y_0)(x) \times DG_K(x_0,z_0)(x)$$

设 $\qquad (y,z) \in D(F_K,G_K)(x_0,y_0,z_0)(x)$

则对任意 $h_n \to 0^+$，$(w_n,u_n,v_n) \in graph(F_K,G_K) \to (x_0,y_0,z_0)$

存在 $y_n \to y$，$z_n \to z$，$x_n \to x$，使得

$$(u_n,v_n) + h_n(y_n,z_n) \in F_K(w_n + h_nx_n) \times G_K(w_n + h_nx_n)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} u_n + h_ny_n \in F_K(w_n + h_nx_n) \\ v_n + h_nz_n \in G_K(w_n + h_nx_n) \end{cases}$$

由定义有：

$$y \in DF_K(x_0,y_0)(x)$$

$$z \in DG_K(x_0,z_0)(x)$$

即 $\qquad (y,z) \in DF_K(x_0,y_0)(x) \times DG_K(x_0,z_0)(x)$

所以 $\qquad D(F_K,G_K)(x_0,y_0,z_0)(x) \subset DF_K(x_0,y_0)(x) \times DG_K(x_0,z_0)(x)$

反过来设 $(y,z) \in DF_K(x_0,y_0)(x) \times DG_K(x_0,z_0)(x)$

则对任意 $h_n \to 0^+$，$(w_n,v_n) \in graphG_K \to (x_0,z_0)$

存在 $z_n \to z$，$x_n \to x$，使得

$$v_n + h_nz_n \in G_K(w_n + h_nx_n) \tag{1}$$

由已知 F 在点 x_0 是李普希兹连续的，由命题1有

$$DF_K(x_0,y_0)(x) = QF_K(x_0,y_0)(x)$$

所以对上述 $h_n \to 0^+$，$(w_n,u_n) \in graphF_K \to (x_0,y_0)$，$x_n \to x$，存在 $y_n \to y$，使得

$$u_n + h_ny_n \in F_K(w_n + h_nx_n) \tag{2}$$

由(1)，(2)有

$$(u_n,v_n) + h_n(y_n,z_n) \in F_K(w_n + h_nx_n) \times G_K(w_n + h_nx_n) = (F_K,G_K)(w_n + h_nx_n)$$

由定义 $\qquad (y,z) \in D(F_K,G_K)(x_0,y_0,z_0)(x)$

因此 $\qquad D(F_K,G_K)(x_0,y_0,z_0)(x) = DF_K(x_0,y_0)(x) \times DG_K(x_0,z_0)(x)$

又由文[4]的定理5.1，对任意 $z_0 \in G(x_0) \cap D$，存在 $l \in K^+$，$u \in D^+$，使得

$$u(z_0) = 0 \qquad l(y) + u(z) \leqslant 0$$

对于 $(y,z) \in D(F_K,G_K)(x_0,y_0,z_0)(x)$

$\qquad x \in Dom(D(F_K,G_K)(x_0,y_0,z_0))$

所以由首先证明的结果，自然有，对任意 $z_0 \in G(x_0) \cap D$，有

$$\begin{cases} u(z_0)=0 \\ tD_g(x_0,y_0)(x)+uD_g(x_0,z_0)(x)\leqslant 0 \end{cases}$$

当 $n>N$ 时，有 $v_n+h_nz_n\in D$

则存在子序列 $(u_{\alpha(n)},v_{\alpha(n)})\to(x_0,z_0),h_{\alpha(n)}\to 0^+,z_{\alpha(n)}\to z,x_{\alpha(n)}\to(x-x_0)$，使得

$$v_{\alpha(n)}+h_{\alpha(n)}z_{\alpha(n)}\in D$$

由定义有 $z\in T(D,z_0)$

即 $DG_A(x_0,z_0)(x-x_0)\subset T(D,z_0)$

由于 $u\in T^+(D,z_0)$

所以 $uDG_A(x_0,z_0)(x-x_0)\geqslant 0 \quad \forall x\in A$

因此 $tDF_A(x_0,y_0)(x-x_0)\leqslant 0$

由定理4(b)，结论自然成立。

参 考 文 献

1 Combini A. and Martein L. Some Optimality Conditions in Vector Optimization. Journal of Information and Optimization Sciences, 1989, 10(1): 141～151

2 陈光亚. Banach 空间中向量极值问题的 Lagrange 定理及 Kuhn-Tucher 条件. 系统科学与数学, 1983, 3(1): 62～70

3 李泽民、线性拓扑空间向量极值问题的广义 Kuhn-Tucher 条件. 系统科学与数学, 1990, 10(1)

4 H. W. Corley, Optimality conditions for maximizations of set-valued function. Journal of Optimization Theory and Applications, 1988, 58(1): 1～11

5 Klein K. and Thompson A. C. Theory of Correspondences. John Wiley, New York: 1984

6 Robinson S M. Generalized Equations and Their Solutions. Part I: Basic Theory. Mathematical Programming Study, 1979, 10: 128～141

7 Aubin J. P. and Ekeland I. Applied nonlinear analysis, John Wiley, New York, New York: 1984

8 Thibault L. Tangent Cones and Quasi-Interiorly Tangent cones to Multifunction. Transactions of the American Mathematical Society, 1983, 227(2)

（编辑：姚国安）

OPTIMALITY CONDITIONS IN GENERALIZED VECTOR OPTIMIZATION

Li Shengjie

(Dept. of Natural Science)

ABSTRACT This paper studies the constrained and unconstrained optimization. Their objective functions are set-valued map. By using tangent derivative, an analogue of K-T necessary and sufficient optimality conditions is proved.

KEY WORDS generlized vector optimization, tangent derivative, quasi-interiorly derivative