(F) 悬涛之 权函数 非均质材料 破坏模型

第17卷 第1期
1995年3月
重庆建筑工程学院学报
J. Chongqing Inst. of Archit & Engin.
Vol. 17 No. 1
Mar. 1995

56-61

非局部应变软化破坏模型中的权函数*

严 更 丁方明
(建筑工程学院)

TU 528.0 ; O344.1

摘 要 对在非局部应变软化破坏模型中起重要作用的权函数进行研究，导出其具体表达形式，并分析了它的性质，其中包括该权函数与非均质材料特征长度的关系。文中还给出了非局部应变软化破坏模型中非局部量的具体计算方法。权函数的选择对于建立较客观的非局部应变软化破坏模型并用数值方法分析非均质材料的破坏性能有重要意义。

关键词 非局部应变软化破坏模型，权函数，非均质材料，特征长度

中图法分类号 O344.1

为了更好地描述混凝土等非均质材料的破坏性能，需要采用非线性的断裂破坏模型。应变软化破坏模型是近年来应用较多的非线性破坏模型之一。这种模型不仅能描述一个无应力奇异的材料逐渐破坏过程，而且能较好地反映材料非线性破坏时所具有的应变软化和应变局部化的基本特征。

然而，当将应变软化破坏模型与数值分析方法（如有限元法、边界元法等）结合起来去分析非均质材料的破坏时，会得到与实际情况不相符的结果，即随着剖分网格的逐渐细分，应变软化区域会逐渐缩小以致消失，破坏将在很小或无能量耗散的情况下发生。为了克服这个问题，不少学者提出改进措施，其中最新的进展之一是采用非局部的破坏模型[1][2]。

本文首先简述非局部应变软化破坏模型，然后，对在非局部破坏模型中起重要作用的权函数进行研究，导出其具体表达形式，并分析了它的性质，其中包括权函数与非均质材料特征长度之间的关系。最后给出实际数值分析时非局部量的具体计算方法。权函数的合适选择对于建立较客观的非局部应变软化破坏模型、并用数值方法去正确分析非均质材料的破坏性能有重要意义。

1 非局部应变软化破坏模型

所谓非局部破坏是指当破坏或应变软化出现在物体上某一点时，它将向该点周围延伸，其延伸域的大小与非均质材料的不均匀程度有关，即与非均质材料的特征长度有关。

为了将非局部破坏的概念引入本构模型，需要将有关物理量用它们在空间某种形式的平均值来代替原先局部点上的值。Bazant 和 Lin 在[1][2]文中给出了以空间加权积分的方

* 收稿日期：1994-10-14

严 更，男，1944年生，副教授，重庆建筑大学建筑工程学院(630045)

式来定义某物理量的空间平均值，并指出在软化应力应变的本构关系中，那些与非线性应变软化有关的物理量，例如塑性应变增量 $\Delta\varepsilon_{ij}^{p}$、等效塑性应变增量 $\Delta\varepsilon^{p}$、塑性乘子 $\Delta\lambda$ 等应取空间平均值，是非局部量；而其它量，例如弹性量仍为局部量。具体来说，对物体上某点 p 处，可如下列方式来定义非局部量：

$$\overline{\Delta\varepsilon_{ij}^{p}}(p) = \int_{\Omega} \beta(p,q)\Delta\varepsilon_{ij}^{p}(q)\mathrm{d}\Omega(q) \tag{1}$$

$$\overline{\Delta\varepsilon^{p}}(p) = \int_{\Omega} \beta(p,q)\Delta\varepsilon^{p}(q)\mathrm{d}\Omega(q) \tag{2}$$

$$\overline{\Delta\lambda}(p) = \int_{\Omega} \beta(p,q)\Delta\lambda(q)\mathrm{d}\Omega(q) \tag{3}$$

式中变量上的横杠表示相应变量的非局部量，p、q 为物体上的点，Ω 为所研究物体的体积。$\beta(p,q)$ 称为权函数。

显然，不同形式的权函数将决定了相应变量在空间的值的不同分布。可见，权函数的选择对于确定非局部应变软化破坏模型是十分重要的。下面我们将讨论权函数的具体形式和性质等有关问题。

2　权函数的选取

权函数的选取通常应满足以下要求：

1）在破坏点或应变软化点 p 处其权值最大，而 p 域上的点 q 处的权值要小些，且随着 q 点远离 p 点，其权值逐渐减小直至趋于零。

2）权函数描述的分布状况应与材料的非均匀性程度，即与材料的特征长度有关。若材料的特征长度越大，软化点的延伸域范围越大，反之，特征长度越小，延伸域范围越小。当特征长度趋于零即材料完全均匀，则软化点的延伸域为零，与局部破坏模型应完全一致。

为此，可选择如下形式函数作为权函数，即

$$\beta(p,q) = \alpha(p,q) \,/\, V_r \tag{4}$$

式中

$$\alpha(p,q) = e^{-\left(\frac{kr}{l}\right)^2} \tag{5}$$

$$V_r = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(p,q)\mathrm{d}\Omega(q) \tag{6}$$

V_r 称为表征体积。r 为 p 点与 q 点之间的距离。对一维问题：$r = x - x_p$；对二维问题：$r = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}$；对三维问题：$r = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}$。$(x_p, y_p, z_p)$ 和 (x,y,z) 分别为 p 点和 q 点的坐标。l 为非均质材料的特征长度。K 为一待定常数。

为了确定常数 K，我们先来考察表征体积 V_r。表征体积有如下性质，即

$$V_r(p) = V_l(p) \tag{7}$$

上式中 $V_l(p)$ 为当 $\alpha(p,q)$ 为一单位均匀分布 $\alpha_l(p,q)$ 时的表征体积，即

$$V_l(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_l(p,q)\mathrm{d}\Omega(q) \tag{8}$$

而
$$\alpha_l(p,q)=\begin{cases}1 & q\in\Omega_l\\0 & q\overline{\in}\Omega_l\end{cases}\tag{9}$$

Ω_l 是一个与材料特征长度 l 有关的区域。对一维问题，Ω_l 为一长 l 的线段；对二维问题，Ω_l 为一直径为 l 的圆域；对三维问题，Ω_l 为一直径为 l 的球域。

将(9)代入(8)，并由(7)即可得

$$V_r(p)=V_l(p)=\begin{cases}l & \text{对一维问题}\\ \dfrac{\pi l^2}{4} & \text{对二维问题}\\ \dfrac{\pi l^3}{6} & \text{对三维问题}\end{cases}\tag{10}$$

现在由 V_r 的定义和上式来确定权函数中的待定常数 K。

不失一般性，设 p 点位于坐标原点，即 $x_p=y_p=z_p=0$。

1）对一维问题：$r=x$ $\qquad V_r=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{Kx}{l}\right)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}\,\frac{l}{k}$

与(10)式对照，可得 $K=\sqrt{\pi}$

2）对二维问题：$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$V_r=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{K}{l}\right)^2(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\left(\frac{Kr}{l}\right)^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\pi\left(\frac{l}{k}\right)^2$$

与(10)式对照，可得 $K=2$

3）对三维问题：$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$V_r=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{K}{l}\right)^2(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\left(\frac{Kr}{l}\right)^2}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{\sqrt{\pi}\,l}{k}\right)^3$$

与(10)式对照，可得 $k=(6\sqrt{\pi})^{1/3}$

综上所述，权函数中的待定常数

$$K=\begin{cases}\sqrt{\pi} & \text{对一维问题}\\ 2 & \text{对二维问题}\\ (6\sqrt{\pi})^{1/3} & \text{对三维问题}\end{cases}\tag{11}$$

K 确定后，权函数 $\beta(p,q)$ 也就完全确定了。

将 K 和 V_r 的具体表达形式代入权函数 $\beta(p,q)$，经过整理可得对 $i=1,2,3$ 维问题的权函数的统一表达式为

$$\beta(p,q)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^i e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\tag{12}$$

式中

$$\sigma=\begin{cases}\dfrac{l}{\sqrt{2\pi}} & \text{对一维问题}\\ \dfrac{l}{2\sqrt{2}} & \text{对二维问题}\\ \dfrac{l}{\sqrt{2\pi}}\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6}} & \text{对三维问题}\end{cases}$$

由上式可见，所选择的权函数为一正态分布。

3　权函数的性质

现在以一维问题为例来具体分析权函数的性质。设 p 点位于坐标原点，$x_p = 0$，此时，权函数

$$\beta(x) = \frac{\alpha(x)}{V_r} = \frac{1}{l}e^{-\frac{\pi x^2}{l^2}} \tag{13}$$

其曲线如图 1 所示。其中实线和虚线分别对应特征长度为 l 和 $l/2$ 时的权函数曲线。

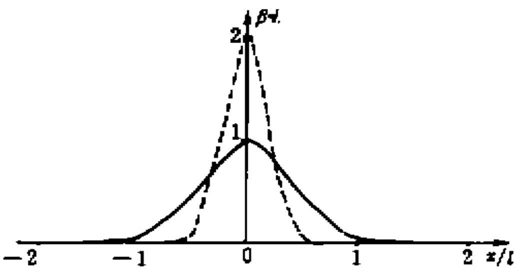

图 1

由定义和图 1 可知，权函数 $\beta(x)$ 有以下性质：

1) $\beta(x) \geqslant 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)\mathrm{d}x = 1$

3) 权函数曲线关于 $x = x_p$ 轴对称。在 $x = x_p$ 处有极大值 $\frac{1}{V_r} = 1/l$，在 $x = \pm\frac{l}{\sqrt{2\pi}}$ 处有拐点。

当 q 点离 p 点越远，$\beta(x)$ 值越小，且当 $x \to \pm\infty$，$\beta(x) \to 0$。

由此可见，权函数的形状完全由非均质材料的特征长度 l 所确定。当特征长度 l 减小时，$\beta(x)$ 的峰值增大，曲线变陡，延伸域减小；反之，当特征长度 l 增大，$\beta(x)$ 峰值减小，曲线变缓，延伸域扩大。

现在考虑一种特殊情况。若选取权函数为

$$\beta(p,q) = \delta(p,q) = \begin{cases} 0 & q \neq p \\ \infty & q = p \end{cases} \tag{14}$$

由 δ 函数性质 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p,q)\mathrm{d}\Omega(q) = 1$ 可见，这里选取的权函数满足上述权函数的性质。这种情况相当于非均质材料的特征长度趋于零的情况，即表示材料完全均匀。

利用 δ 函数的性质 $\int_{\Omega} \delta(p,q)f(q)\mathrm{d}\Omega(q) = f(p)$，当 $p \in \Omega$ 时，由(1)(2)(3) 定义的非局部量

$$\overline{\Delta\varepsilon_{ij}^{p}}(p) = \int_{\Omega} \delta(p,q)\Delta\varepsilon_{ij}^{p}(q)\mathrm{d}\Omega(q) = \Delta\varepsilon_{ij}^{p}(p) \tag{15}$$

$$\overline{\Delta\varepsilon^{p}}(p) = \int_{\Omega} \delta(p,q)\Delta\varepsilon^{p}(q)\mathrm{d}\Omega(q) = \Delta\varepsilon^{p}(p) \tag{16}$$

$$\overline{\Delta\lambda}(p) = \int_{\Omega} \delta(p,q)\Delta\lambda(q)\mathrm{d}\Omega(q) = \Delta\lambda(p) \tag{17}$$

由此可见，当材料完全均匀时，非局部量值与相应的局部量值相等，其软化延伸域为零，即为局部破坏模型。

综上分析，上述选择的权函数完全满足对权函数的要求，可以作为非局部应变软化破坏

模型[illegible]的。

4　非局部量的计算

在[illegible]计算非局部应变软化破坏模型中的非局部量时，需要指出的是，当所研究的物体[illegible]时，权函数 $\alpha(p,q)$ 中的[illegible]应当用 $V_r(p)=\int_{\Omega}\alpha(p,q)\mathrm{d}\Omega(q)$ 替代。此处的 $V_r(p)$ 与前述的表征体积[illegible]略有不同，前者积分域在有限空间 Ω 上，而后者则在整个无限空间。但是由[illegible]的性质可知，在远离[illegible] Ω 处，权函数衰减很快，所以可以将 $V_r(p)$ 看作近似表征体积。[illegible]在有限域上[illegible] $V_r(p)$ 的取值与 p 点的位置有关。

当用边界元、有限元等数值方法分析材料非线性问题时，通常需要将物体部分内域或整个内域剖分成若干单元，这样，前述的非局部量表达式中的积分就变成在每个单元上积分的累加。[illegible]塑性乘子增量 $\Delta\lambda(p)$ 为例

$$\overline{\Delta\lambda}(p)=\int_{\Omega}\alpha(p,q)\Delta\lambda(q)\mathrm{d}\Omega(q)=\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\alpha(p,q)\Delta\lambda(q)\mathrm{d}\Omega(q) \tag{18}$$

式中[illegible]内部单元，M 为单元个数。

[illegible]积分，通常可以采用数值积分求得。这样，在计算得到所研究物体上的 $\Delta\lambda$ 后，[illegible]由(18)式求得相应的非局部量 $\overline{\Delta\lambda}$。

5　算例

为了检验上述权函数的正确性与效果，将带有上述权函数的非局部应变软化破坏模型，结合到材料非线性问题的边界元法中去分析一个有弱区的矩形受拉板的破坏问题。

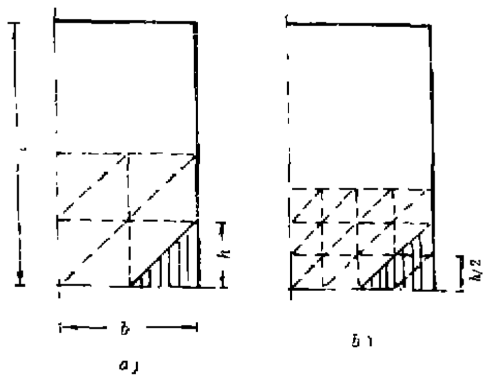

图 2

该板的四分之一对称部分如图 2(a) 所示。竖条线三角域为弱区。板的上下两端受均匀拉力，由给定的位移 Δ 控制。板尺寸 $L=610$ mm，$b=L/2$，$h=L/4$。材料弹性模量 $E=26.22$ GPa，泊松比 $\nu=0.18$，粘聚力强度 $C=4.60$ MPa，摩擦角 $\varphi=56.6°$，硬化参数 $H'=-668.7$ MPa，材料特征长度 $l=h/2$。弱区部分除粘聚力强度 $C'=0.9C$，其余同上。

为检验计算结果的客观性，采用两种不同网格的内积分三角元(见图 2(a)(b))。分别选取权函数为 δ 函数，即对应局部破坏模型和权函数为(12)式所给的函数，即对应非局部破坏模型来计算。图 3(a)(b) 分别表示对应局部破坏模型和非局部破坏模型的板端力 P 和板端位移 Δ 的计算结果。由结果可见，局部破坏模型的计算结果受网格影响很大，对应不同网格，其结果不同，这是不符合客观实际的。而非局部破坏模型的计算结果则不受网格剖分的影响，对应不同网格其结果一致。这说明，文中所给的权函数对于建立较客观的非局部应变软化破坏模型、正确分析非均质材料破坏性能是合理的，有效的。

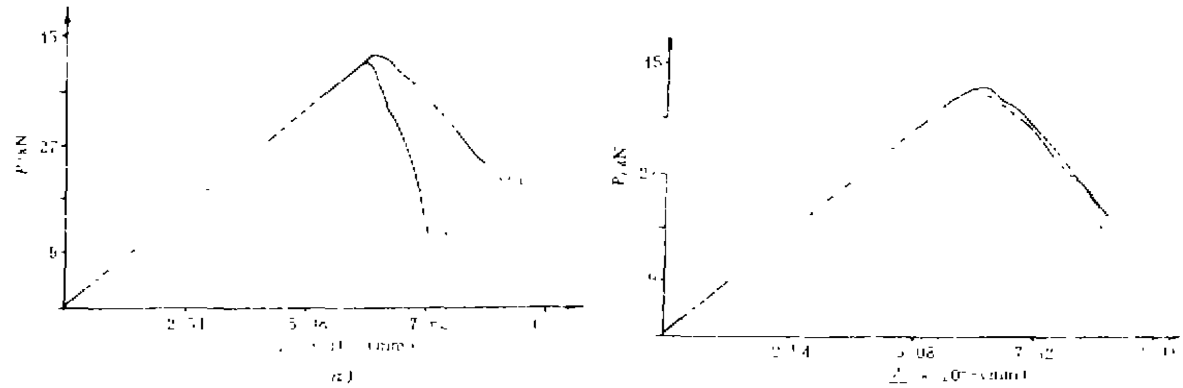

图 3

（编辑：刘家凯）

参考文献

1 Bazant Z. P. and Lin F. B. Nonlocal yield limit degradation. Int. J. for numerical methods in eng. 1988, 26(8)

2 Bazant Z. P. and Lin F. B. Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. J. of structural eng., 1988, 114(11)

3 F. B. Lin, G. Yan. Strain-softening damage modeling using boundary element method, Boundary Elements XV, Eds: C. A. Brebbia and J. J. Rencis, Vol. 2, CMP with Elsevier, 1993. 8

WEIGHTING FUNCTION IN NONLOCAL STRAIN SOFTENING DAMAGE MODEL

Yan Geng　　　Ding Fangming

(Faculty of Civil Engineering)

ABSTRACT　In the paper, the weighting function is investigated which plays an important part in nonlocal strain softening damage model. Its expression is derived and behaviours including the relationship between the weighting function and the characteristic length of heterogeneous materials are analyzed. The method for calculating nonlocal quantities is also presented. Selecting of the weighting function has important significance for more objectively establishing nonlocal damage model and analysis of damage of heterogeneous materials by numerical methods.

KEY WORDS　nonlocal strain sotening damage model, weighting function, heterogeneous materials, characteristic length