第27卷 第6期
2005年12月

重庆建筑大学学报
Journal of Chongqing Jianzhu University

Vol. 27 No. 6
Dec. 2005

两对边固支另两对边自由弹性矩形薄板理论解*

钟 阳[1]， 殷建华[2]
（1. 大连理工大学 土木学院，大连 116024；2. 香港理工大学 土木学院，香港）

摘要：利用辛几何的方法推导出了两对边固支另两对边自由支承条件情况下，弹性矩形薄板问题的理论解。在推导过程中并不需要事先人为的假定挠度函数，而是直接从弹性矩形薄板问题的控制方程出发，利用纯数学的手段推导出问题的解析解，使得求解过程更加理论化，从而为进一步解决了这类问题（例如动力问题）奠定了理论基础。文中还给出了算例来验证方法的正确性。

关键词：两对边固支另两对边自由支承；弹性矩形薄板；辛几何法；理论解

中图分类号：TB125 **文献标识码**：A **文章编号**：1006－7329(2005)06－0029－04

Theoretical Solution of Elastic Rectangular Thin Plate with Opposite Boundary Completely Clamped Support and Others Free

ZHONG Yang[1], YIN Jian－Hua[2]
(1. School of Civ. Engrg.. Dalian Univ. of Tech., Dalian 116024, P. R. China; 2. Dept. of Civ. Engrg. The Hong Kong Poly. Univ., Hongkong, P. R. China)

Abstract: In this paper, the analytical solutions for an elastic rectangular thin plate with opposite boundary completely clamped support and others free were derived by a Symplectic geometry method. Due to the fact that the basic elasticity equations of the thin plate were only used, it was not necessary to select the deformation function arbitrarily. Therefore, the solutions in this paper are much more general mathematically. In order to prove the validity of the formulations, numerical results were presented to be compared with those derived by other references.

Keywords: Opposite boundary clamped supported and others free; elastic rectangular thin plate; Symplectic Geometry Method; analytical solution

弹性矩形薄板是土木工程中较为常用的一种结构形式，尤其是矩形薄板更为普遍，其中两对边固定两对边自由矩形板广泛应用于地下建筑工程和水利工程中。例如，水闸闸门在特定情况下就是最典型的两对边固定两对边自由矩形板。众所周知，寻求一般边界条件下矩形板的精确解是相当困难的，多年一直没有得到很好的解答。目前，通常用以求解此类问题的方法主要有两大类，即解析法和数值法。解析法主要是叠加法[1]、富里哀级数法[2]。数值法主要是有限元法。各种解析法中都要事先选定挠度函数，而这些函数的选取具有一定的任意性，无确定的规律可循。虽然，数值法可以完全解决这类问题，但要求输入数据多，比较繁杂。

近年来，钟万勰教授将辛几何的概念引入弹性力学的解法中，给弹性力学的计算这一经典学科带来了新的活力[3-6]。从弹性薄板的平衡方程出发，利用纯数学的手段直接推导出完全满足所有边界条件的对边固支矩形薄板的解析解。该方法摒弃了人为选定挠度函数，概念清晰，易于应用。为了验证该方

* 收稿日期：2005－05－26
资助项目：科学技术部重大基础研究项目资助（2004CCA03300）
作者简介：钟 阳（1955－），男，四川富顺人，教授，博士导师，主要从事道路工程研究。

法的正确性,文中还给出了数值算例。

1 弹性矩形薄板问题的控制方程和辛几何解法

弹性矩形薄板问题的控制方程和内力分别为[5]:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y=0 \tag{3}$$

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) \tag{5}$$

$$M_{xy}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} \tag{6}$$

$$V_x=-D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}\right] \tag{7}$$

$$V_y=-D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}\right] \tag{8}$$

其中,$D=Eh^3/(12(1-\nu^2)$;E、ν 和 h 分别为板的弹性模量、泊松比和厚度。$Q_x,Q_y,M_x,M_y,M_{xy},V_x,V_y$ 分别为沿坐标轴 x,y 方向的剪力、弯矩、扭矩和总剪力。而 W 和 q 分别为板的挠度和作用于板面上的外力荷载。为了能够把上述方程在 Hamilton 体系中表示,可令

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\theta \tag{9}$$

由公式(5)可得

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}=-\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{M_y}{D} \tag{10}$$

再由公式(1)、(8)、(6)和(4)可得

$$\frac{\partial(-V_y)}{\partial V_y}=D(1-\nu^2)\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\nu\frac{\partial M_y}{\partial_x}+q \tag{11}$$

由公式(3)和(6)可得

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}=-(-V_y)+2D(1-\nu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{12}$$

令 $T=-V_y$,公式(9)、(10)、(11)和(12)可写成矩阵的形式

$$\frac{\partial U}{\partial y}=HU+f \tag{13}$$

其中,$U=[W\quad \theta\quad T\quad M_y]^T$;$f=[0\quad 0\quad q\quad 0]^T$;$H=\begin{bmatrix}F & G\\ Q & -F^T\end{bmatrix}$;

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0\end{bmatrix};\ G=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{D}\end{bmatrix};\ Q=\begin{bmatrix}-D(1-\nu^2)\frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0\\ 0 & 2D(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\end{bmatrix}$$

方程(13)称为板的弯曲方程在 Hamilton 体系中的表示。H 为 Hamilton 算子矩阵,其特点是特征值

正负成对出现,特征向量相互辛正交[5]。方程(13)的齐次方程为

$$\frac{\partial U}{\partial y} = HU \tag{14}$$

按文献[3]中的辛几何方法,可利用分离变量法求解方程式(14),另

$$U = \bar{X}_n(x)\bar{Y}_n(y) \tag{15}$$

其中 $\bar{X}_n(x) = [\bar{W}(x) \quad \bar{\theta}(x) \quad \bar{T}(x) \quad \bar{M}_y(x)]^T$

将(15)式代入(14)式可得到

$$\frac{\mathrm{d}\bar{Y}_n(y)}{\mathrm{d}y} = \mu_n \bar{Y}_n(y) \tag{16}$$

$$H\bar{X}_n(x) = \mu_n \bar{X}_n(x) \tag{17}$$

其中 μ_n 是本征值,待求。而 $\bar{X}_n(x)$ 是与之对应的本征函数向量。

方程(17)是特征值问题。展开后可知,其解可归结为如下方程的解

$$\frac{\mathrm{d}^4\bar{W}(x)}{\mathrm{d}x^4} + 2\mu_n^2\frac{\mathrm{d}^2\bar{W}(x)}{\mathrm{d}x^2} + \mu_4^4\bar{W}(x) = 0 \tag{18}$$

其解为

$$\bar{W}(x) = A\cos\mu_n x + B\sin\mu_n x + Cx\cos\mu_n x + Fx\sin\mu_n x \tag{19}$$

式中的常数 A,B,C,F 可由边界条件得出。对于在 x 方向为固支边界条件有

$$x = \begin{cases}0\\a\end{cases}; \quad \bar{W}(x) = \frac{\partial \bar{W}(x)}{\partial x} = 0 \tag{20}$$

由边界条件(20)可得 $A=0$;$C=-\mu_n B$ 以及

$$\begin{cases}B(\sin\mu_n a - a\mu_n\cos\mu_n a) + aF\sin\mu_n a = 0\\ a\mu_n{}^2B\sin\mu_n a + F(a\mu\cos\mu_n a + \sin\mu_n a) = 0\end{cases} \tag{21}$$

由上式非零解的条件可以得到

$$\sin^2 a\mu_n = a^2\mu_n^2 \tag{22}$$

本征值方程(22)的其解可以采用文献[7]中的算法得到。表1列出的前5个本征值。

表1　前5个本征值

n	1	2	3	4	5
$\mathrm{Re}(a\mu_n)$(实部)	7.498	13.899	20.238	26.554	32.859
$\mathrm{Im}(a\mu_n)$(虚部)	2.768	3.352	3.716	3.983	4.193

每一个 μ_n 都对应存在有辛共轭本征值 $-\mu_n$ 以及它们的复共轭本征值,总共有4个本征值[3]。求出本征值之后,由(22)式、(21)式以及(14)式可求得本征函数向量为

$$\bar{X}_n(x) = \begin{cases}B(\sin\mu_n x - x\mu_n\cos\mu_n x) + Fx\sin\mu_n x\\ \mu_n[B(\sin\mu_n x - x\mu_n\cos\mu_n x) + Fx\sin\mu_n x]\\ \mu_n^2 D\{\mu_n[x\nu_1 F - (\nu_1 - 2)B]\sin\mu_n x - [2(\nu_1 - 1)F + B\nu_1 x\mu_n^2]\cos\mu_n x\}\\ -\mu_n D\{[2\nu F + x\nu_1\mu_n^2 B]\cos\mu_n x + \mu_n[(v_1+2)B + \nu_1 xF]\sin\mu_n x\}\end{cases} \tag{23}$$

其中:$B=a$;$F=\cos a\mu_n - 1$;$\nu_1 = \nu - 1$,由此可以得到板的挠度为

$$\bar{W}_n(x) = [a + (\cos a\mu - 1)x]\sin\mu_n x - a\mu_n x\cos\mu_n x \tag{24}$$

得到本征值和本征函数向量后,就可以按展开定理[3]写出对边固支板的通解表达式为

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}[f_n U_n + \bar{f}_n\bar{U}_n + f_{-n}U_{-n} + \bar{f}_{-n}\bar{U}_{-n}] \tag{25}$$

其中 $f_n(n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ 是待定常数,可以由板在 y 方向的边界条件决定。U_n 和 U_{-n} 分别为与本征值 μ_n 以及辛共轭本征值 $-\mu_n$ 对应的本征函数向量,而 $\bar{U}_n$ 和 $\bar{U}_{-n}$ 分别为 $\pm\mu_n$ 的复共轭本征值对应的本征函数向量。确定出待定常数 f_n 后,就可以给出原问题的(13)式的解。由于板的内力都可以用板的

挠度 W 表示,为了简练起见这里只给出 W 的表示式。

$$W(x,y) = W^* + \sum_{n=1}^{\infty} [e^{\alpha y}(f_n + \bar{f}_n)Y_1 + e^{-\alpha y}(f_{-n} + \bar{f}_{-n})Y_2] \tag{26}$$

其中 W^* 为与板面上的外力荷载所对应的一个特解。

$$\alpha = \mathrm{Re}(a\mu_n);\beta = \mathrm{Im}(\alpha\mu_n);Y_1 = X_1\cos(\beta y) - X_2\sin(\beta y);Y_2 = X_1\cos(\beta y) + X_2\sin(\beta y)$$

$$X_1 = (a - x)\sin\alpha x \cdot ch\beta x - ax[\alpha\cos ax \cdot ch\beta x + \beta\sin\alpha x \cdot sh\beta x]$$
$$+ x[\cos a\alpha \cdot cha\beta \cdot \sin\alpha x \cdot ch\beta x + \sin a\alpha \cdot sha\beta \cdot \cos ax \cdot sh\beta x]$$
$$X_2 = (a - x)\cos\alpha x \cdot sh\beta x - ax[\beta\cos ax \cdot ch\beta x - \alpha\sin\alpha x \cdot sh\beta x]$$
$$+ x[\cos a\alpha \cdot cha\beta \cdot \cos\alpha x \cdot sh\beta x - \sin a\alpha \cdot sha\beta \cdot \sin ax \cdot ch\beta x]$$

给定作用于板面上的外力荷载 W^*,再利用方向两端为自由的边界条件,由式(26)就可以求解出两对边固支另两对边自由支承条件情况下,弹性矩形薄板问题的理论解。

2 算例

为了证明此方法的正确性,取文献[8]中的两对边固支另两对边自由矩形薄板为例。取 $a = b = 10$ m,$v = 3$。在板面上作用有均布荷载 q。表2和表3分别列出了计算得到的板中各点的挠度和内力。为了对比,表中还分别给出结果第二行和文献[8]的结果第一行。计算时取到4,而文献[8]在计算时级数项取值要大得多才能达到同样的精度。

表2 板的挠度

坐标值	$x=5$ m $y=0$ m	$x=5$ m $y=5$ m	$x=5$ m $y=10$ m
$W(x,y)$	2.913 2.914	2.559 2.559	2.906 2.907

表3 板的弯矩 M_x

坐标值	$x=0$ m $y=2$ m	$x=0$ m $y=5$ m	$x=0$ m $y=8$ m	$x=5$ m $y=10$ m
$M_x(x,y)$	-8.045 -8.044	-7.754 -7.755	-8.45 -8.044	4.323 4.324

由上表可知,计算结果同文献[9]的计算结果是非常接近的。并且,收敛速度也非常快。从而表明采用辛几何方法推导出的解析解是正确的。

3 结语

通过将弹性薄板的基本方程导向 Hamilton 体系,问题可以在辛几何空间里用分离变量法推导出了该问题的解析解,由于不需要事先人为的选择好挠度函数,使得求解过程更加理论化和合理化。实际算例也证明了此方法的正确性。

参考文献:

[1] 张福范. 弹性平板[M]. 北京:科学出版社,1984.
[2] 曲庆璋,章权,梁兴复. 弹性薄板理论[M]. 北京:人民交通出版社,2000.
[3] 钟万勰. 分离变量法与哈密而顿体系[J]. 计算结构力学及其应用,1991,8(3):229-240.
[4] 钟万勰. 条形域弹性平面问题与哈密尔顿体系[J]. 大连理工大学学报,1991,31(4):373-384.
[5] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连:大连理工大学出版社,1995.
[6] 钟万勰,姚伟岸. 板弯曲求解新体系及其应用[J]. 力学学报,1999,31(2):173-183.
[7] 洪维恩. 数学运算大师 Mathematica 4[M]. 北京:人民邮电出版社,2002.
[8] Timoshenko S. P. Theory of plate and shells[M]. New York,McGraw-Hill,1959.
[9] 岳建勇,曲庆璋. 两对边固定两对边自由矩形板的精确解[J]. 青岛建筑工程学院学报,2000,21(2):14-17.