

# 钢筋高应变低周疲劳寿命的统计分析

盛光敏, 薛昊飞, 吕煜坤

(重庆大学材料科学与工程学院, 重庆 400044)

**摘要:**对轧后淬火、自回火(QST)HRB400钢筋的低周疲劳寿命进行了试验测定。针对高应变低周疲劳的分散性,采用威布尔双参数概率函数、正态分布与对数正态分布函数及 $t$ 分布函数等多种数理统计方法,对所测得的低周疲劳寿命进行了统计处理与分析。结果表明,在所采用的概率函数中, $t$ 分布函数应用于疲劳寿命的分析具有最高的可靠性,正态分布应用于疲劳寿命的分析最不具有可靠性,威布尔最大似然法应用于疲劳寿命的分析最为安全。统计分析结果可为钢筋高应变低周疲劳寿命的数据分析提供可靠的理论依据。

**关键词:**疲劳寿命;高应变低周疲劳;钢筋;数理统计

**中图分类号:**TU511.32 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2012)06-0008-05

## Statistical Analysis on High Strain and Low Cycle Fatigue Life of Rebars

SHENG Guangmin, XUE Hao-fei, LYU Yukun

(School of Materials Science and Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** High strain and low cycle fatigue (HSLCF) life of anti-seismic behaviors of rebars was investigated. Reliable theoretical basis was provided for data analysis on high strain and low cycle fatigue life of anti-seismic behaviors of rebars. The low cycle fatigue life of the HRB400 anti-seismic behaviors of rebars by quenching and self tempering (QST) process was tested. Because the low cycle fatigue life data was disperse, some kinds of mathematical statistics methods, such as Weibull double parameters probability function, normal distribution, lognormal distribution function and  $t$ -distribution function were used to statistically analyze the low cycle fatigue life data. The results indicate that in all of the probability functions, the low cycle fatigue life has the highest reliability by the  $t$ -distribution function method; the low cycle fatigue life has the lowest reliability by the normal distribution method; and the low cycle fatigue life has the highest safety by Weibull maximum likelihood method.

**Key words:** fatigue life; low cycle; the steel bar; mathematical statistics

目前,全球已处于地震活跃期。由于地震对建筑物有巨大的破坏作用,因此对建筑材料的性能要求越来越高<sup>[1-2]</sup>。目前广泛采用的钢筋混凝土结构由具有一定延性的钢筋和完全脆性的混凝土组成,其中钢筋起到加强的作用<sup>[3]</sup>。在地震过程中,钢筋所承受的是高应变交变载荷,其失效形式以高应变低周疲劳为主<sup>[4]</sup>,所以高应变低周疲劳性能是钢筋

的主要抗震性能指标。

疲劳寿命具有较大的分散性,因此采用合理的数据统计处理方法来提供可靠的疲劳失效数据是疲劳研究领域的热点之一。多年来学者们处理疲劳实验数据的方法很多,对不同应力水平下的高周疲劳实验数据,通常采用升降法、S-N曲线法、Duezt数理统计方法处理疲劳性能数据;对滚动

收稿日期:2012-02-20

基金项目:国家科技支撑计划(2007BAE30B05)

作者简介:盛光敏(1958-),男,教授,博士生导师,主要从事高抗震性能建筑结构钢的研究,(E-mail)gmsheng@cqu.edu.cn。

接触疲劳试验下所得到的疲劳数据,通常采用威布尔双参数分布<sup>[6]</sup>方法;对不同应力或低应变水平下的低周疲劳实验数据,通常运用灰度预测模型、有限元分析进行仿真<sup>[7-8]</sup>。但是对于抗震钢筋高应变水平下的低周疲劳的实验数据处理,目前还没有研究报道,因此本文对这一方面进行了对比研究,运用不同的统计方法处理数据,使评价钢筋的高应变低周疲劳性能更科学、更合理,为地震设防区建筑结构的设计提供依据。

1 试验方法

由于采用轧后淬火、自回火的方法生产钢筋,投资少、成本低、经济效益良好,世界很多国家都在普遍采用<sup>[9-10]</sup>。中国轧后淬火、自回火钢筋也投入生产应用有 20 余年的历史<sup>[11]</sup>,所以本试验选用轧后淬火、自回火的 HRB400QST,其化学成分如表 1 所示。

表 1 钢筋化学成分					wt%
成分	C	Si	Mn	P	S
质量分数	0.22	0.43	1.35	0.02	0.021

考虑到轧后淬火、自回火工艺会使钢筋表层形成马氏体,心部形成铁素体和珠光体<sup>[11]</sup>,将其加工成标准的低周疲劳试样时表层的马氏体组织会被磨削掉。这时试样就不具备原始的力学性能。因此实验时,全部试样均未经过任何机械加工处理,且规格全为 Φ 16 mm,如图 1 所示。

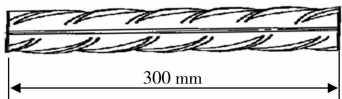


图 1 低周疲劳试样示意图(表面未加工)

疲劳试验的设备是 Instron Model1342 液压伺服材料试验机。在大气环境室温下,采用恒定总应变控制,利用标注为 12.5 mm 的轴向引伸计(如图 2)控制总应变范围 Δε<sub>t</sub>,在 4 个应变幅下进行,分别

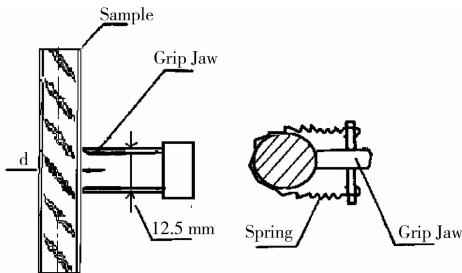


图 2 轴向引伸设置

为 ±0.5%、±1%、±1.5%、±2%,通过模拟-数字转换器,用计算机自动采集响应数据。其中循环波型为正弦波,加载频率为 0.1—0.4 Hz,应变循环比 R<sub>ε</sub> = -1。

2 低周疲劳寿命测试结果

试验为完全失效试验,样本数量为每组 6 个,所得数据如表 2。

表 2 疲劳试验的结果

应变幅 Δε <sub>t</sub> / %	低周疲劳寿命/周
±0.5	634,702,789,962,993,1135
±1	173,211,284,304,319,434
±1.5	80,96,104,113,115,134
±2	63,68,69,71,74,77

从表 2 中可以看出,由于试验过程中存在着诸多不确定性因素,如材料成分不均匀、试样表面状况的差异等,试样的疲劳寿命分散性较大。因此采用了多种常用的统计方法分别对疲劳数据进行了分析计算。

3 低周疲劳寿命的统计处理

3.1 双参数威布尔分布

威布尔分布是随机分布函数之一,广泛应用于各种寿命试验的数据处理<sup>[12-13]</sup>,因此假设疲劳实验数据符合双参数威布尔分布。

双参威布尔分布函数为:

$$P(N)_s = 1 - \exp[-(N/V_s)^b]$$
 (1)

其对数形式:

$$\ln \ln \left[ \frac{1}{1 - P(N)_s} \right] = b(\ln N - \ln V_s)$$
 (2)

式(1)和(2)中: P(N<sub>s</sub>) 是在某一试验应变水平下,试样寿命小于 N 的概率; N 表示试样寿命(周次); b 表示威布尔分布的斜率参数,代表数据的分散度,其值越大数据分散性越小; V<sub>s</sub> 表示威布尔分布的特征寿命(失效率为 63.2%时的疲劳寿命); 1 - P(N<sub>s</sub>) 为试样大于寿命 N,即不失效的概率,定义为置信度。

采用最大似然方法或最佳线性不变估计方法确定 b 和 V<sub>s</sub>。本实验是完全失效试验,对试验所得的 6 个疲劳寿命从小到大排列 (N<sub>1</sub> < N<sub>2</sub> < N<sub>3</sub> < ..... < N<sub>i</sub>)。

1)最大似然方法关于 b 和 V<sub>s</sub> 的计算公式为:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\sum_{i=1}^n N_i^b \ln N_i}{\sum_{i=1}^n N_i^b} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln N_i - \frac{1}{b} = 0 \\ &V_s = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i^b \right]^{\frac{1}{b}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中需要对斜率参数  $b$  修正偏差,修偏系数  $g$  可查国家标准 GB 10622—89 中表得之: $b = g \cdot \hat{b}$ 。由(3)计算  $b$  和  $V_s$  结果见表 3。

表 3 不同应变下 $b$ 和 $V_s$ 的值				
$\Delta \epsilon_t / \%$	$\pm 0.5$	$\pm 1$	$\pm 1.5$	$\pm 2$
$b$	4.23	2.83	5.39	13.45
$V_s$	922.50	308.73	112.34	71.94

将表 3 的结果代入式(1)得出的不同置信度下疲劳寿命如图 3 所示:

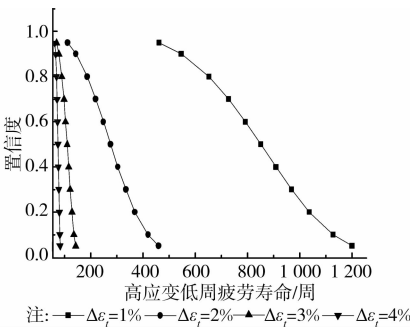


图 3 疲劳寿命-置信度关系曲线(最大似然法)

2)最佳线性不变估计关于  $b$  和  $V_s$  的计算公式为:

$$\left. \begin{aligned} &b = \frac{1}{\sum_{i=1}^r C_I(n, n, i) \ln N_i} \\ &\ln V_s = \sum_{i=1}^r D_I(n, n, i) \ln N_i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)中  $C_I$  和  $D_I$  为最佳线性不变估计系数,可查国家标准 GB 10622—89 表得之。由(4)计算  $b$  和  $V_s$  结果见表 4。

表 4 不同应变下 $b$ 和 $V_s$ 的值				
$\Delta \epsilon_t / \%$	$\pm 0.5$	$\pm 1$	$\pm 1.5$	$\pm 2$
$b$	5.39	3.64	6.9	17.08
$V_s$	963.03	329.23	116.27	72.95

将表 4 所得数据代入式(1)得出的不同置信度下疲劳寿命如图 4 所示。

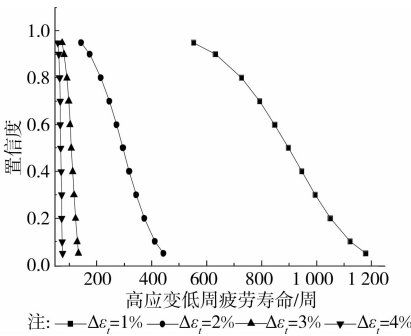


图 4 疲劳寿命-置信度关系曲线(最佳线性法)

3.2 正态分布与对数正态分布

试验疲劳寿命的样本为  $N_i$ , 正态分布的概率密度函数为:

$$f(N_i) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(N_i/\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

依参数估计中点估计或最大似然法均可知期望

$$\mu = \bar{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i, \text{ 方差 } \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N}).$$

则分布函数为:

$$P(N)_s = \int_{-\infty}^N \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(N/\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dN \quad (6)$$

式(6)中  $P(N_s)$  为置信度。根据不同概率所得的疲劳寿命  $N$  存在置信上线和下线,依前文所述置信度的定义,取不失效概率时的寿命,所以疲劳寿命为置信下线。

1)根据正态分布求得期望和方差(如表 5),代入式(6)可得不同置信度下的疲劳寿命如图 5 所示。

表 5 不同应变下 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 的值				
$\Delta \epsilon_t / \%$	$\pm 0.5$	$\pm 1$	$\pm 1.5$	$\pm 2$
$\mu$	869.17	287.50	107.00	70.33
$\sigma^2$	36 858.97	8 340.30	337.60	23.87

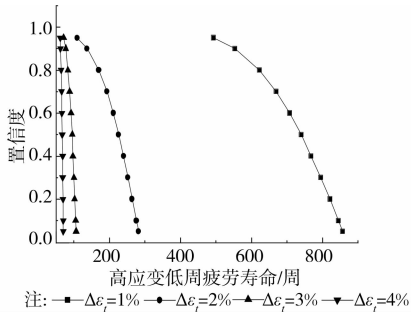


图 5 疲劳寿命-置信度关系曲线(正态分布法)

2)利用对数正态分布计算公式得出的疲劳寿命  
对数正态分布是随机变量的对数服从正态分布,所以试验将所得原始数据取对数后进行处理,求

得期望和方差(如表 6),代入式(6)可得不同置信度下的试样寿命如图 6 所示。

表 6 不同应变下 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 的值				
$\Delta\epsilon_t / \%$	$\pm 0.5$	$\pm 1$	$\pm 1.5$	$\pm 2$
$\mu$	6.747	5.618	4.66	4.251
$\sigma^2$	0.05	0.105	0.031	0.005

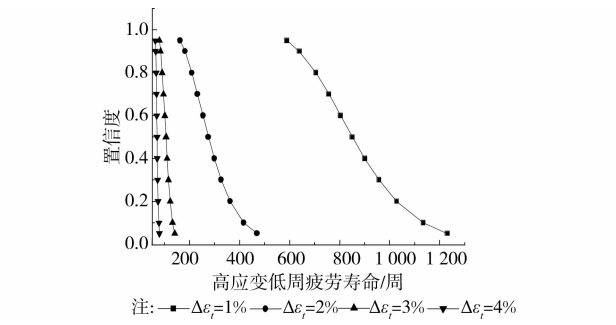


图 6 疲劳寿命-置信度关系曲线(对数正态法)

3.3 t 分布

由于在实际工作中,往往  $\sigma$  是未知的,这时用  $t$  分布来统计计算。

$t$  分布的密度函数如下:

$$f(N_i) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\left(1 + \frac{N_i^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (7)$$

则分布函数为:

$$P(N)_s = \int_{-\infty}^N f(N_i) \quad (8)$$

(7)中:  $n$  为自由度;  $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} N_i^{\frac{n+1}{2}} e^{-N_i} dN_i$ ;

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{+\infty} N_i^{\frac{n}{2}} e^{-N_i} dN_i.$$

假设试验的疲劳数据为  $t$  分布,由于试验的样本为 6 个,所以自由度为 5,用软件算出分布的双侧分位数,标准差、抽样平均误差及允许误差(见表 7),与正态分布相似取置信下线,则可得到不同置信度下的试样寿命如图 7 所示:

表 7 不同应变下各参数的值				
$\Delta\epsilon_t / \%$	$\pm 0.5$	$\pm 1$	$\pm 1.5$	$\pm 2$
样本均值	869.17	287.50	107.00	70.33
双侧分位数	2.57	2.57	2.57	2.57
样本标准差	191.99	91.33	18.37	4.89
抽样平均误差	78.38	37.28	7.50	1.99
允许误差	201.48	95.84	19.28	5.13

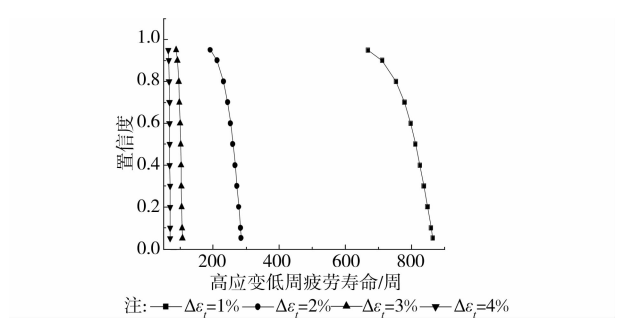


图 7 疲劳寿命-置信度关系曲线( $t$  分布法)

3.4 统计结果及分析

不同统计方法得出的置信度为 95% 下的疲劳寿命  $N_{95}$  见表 8。

大量的疲劳试验结果表明,材料的塑性应变与疲劳寿命(S-N)曲线在双对数坐标中具有大致相同的形式,钢材的双对数 S-N 曲线在某一区间内接近于直线<sup>[14-16]</sup>,由于试验为高应变,且应变取对数,所以弹性应变部分忽略不计,因此本文对应变和统计的疲劳寿命分别取对数后线性拟合。由于单独用 QST 钢筋不能很好的对比分析,所以本文对超细晶钢筋 FG 和微合金化钢筋 V-Fe 的低周疲劳寿命也分别做了统计处理。各个拟合曲线的相关系数如表 9 所示,从中可知,  $t$  分布的相关系数  $R^2$  最大,拟合结果相对最好,正态分布的结果相对最差。

表 8 不同统计方法的疲劳寿命 $N_{95}$					
$\Delta\epsilon_t / \%$	$N_{95}$ /周 (最大似然)	$N_{95}$ /周 (最佳线性)	$N_{95}$ /周 (正态分布)	$N_{95}$ /周 (对数正态分布)	$N_{95}$ /周 ( $t$ 分布)
$\pm 0.5$	457	555	493	589	668
$\pm 1$	108	146	109	162	192
$\pm 1.5$	65	76	71	79	88
$\pm 2$	58	61	61	63	65

表 9 线性拟合的相关系数 $R^2$					
钢筋	$R^2$ (最大似然)	$R^2$ (最佳线性)	$R^2$ (正态分布)	$R^2$ (对数正态分布)	$R^2$ ( $t$ 分布)
QST	0.951	0.982	0.944	0.986	0.994
FG	0.919	0.949	0.923	0.965	0.973
V-Fe	0.989	0.989	0.899	0.996	0.993

4 结 论

利用威布尔最大似然、威布尔最佳线性估计、正态分布、对数正态分布和  $t$  分布方法,对 HRB400 抗震钢筋疲劳寿命的原始试验数据进行了处理,可知威布尔最大似然方法和正态分布方法算出的疲劳寿

命较为接近,在所有统计方法中威布尔最大似然方法得出的疲劳寿命均较小,因此最为安全,而从最终的应变—疲劳寿命的双对数线性拟合可知  $t$  分布求得疲劳寿命最为准确、可靠,正态分布求得疲劳寿命最不准确。所以对钢筋的安全性能要求较高时,用威布尔最大似然方法估算疲劳寿命较好,欲准确得知钢筋的疲劳寿命用  $t$  分布方法计算为宜。

### 参考文献:

- [1] 郭湛,完卫国,孙维,等. 功能性建筑用钢筋的研究现状及发展趋势[J]. 安徽冶金科技职业学院学报, 2010, 20 (1): 3-6.  
GUO Zhan, WAN Weiguo, SUN Wei, et al. Status and trend of functional steel bar used in constructure [J]. Journal of Anhui Vocational College of Metallurgy and Technology, 2010, 20 (1): 3-6.
- [2] 黄伟,张丽,王平,等. 建筑用钢筋的应用发展研究 [J]. 建筑技术, 2010, 41 (3): 242-245.  
HUANG Wei, ZHANG Li, WANG Ping, et al. Research on application and development of steel bars used in constructure [J]. Architecture Technology 2010, 41 (3): 242-245.
- [3] Sheng G M, Gong S H. Investigation of low cycle fatigue behaviors of building [J]. Natural Disasters, 1997, 10(1): 51-55.
- [4] 于孟山,盛光敏,詹苏宇. 抗震钢筋研究现状[J]. 材料导报, 2010, 24(15): 454-458.  
YU Mengshan, SHENG Guangmin, ZHAN Suyu. Overview of researches on anti-seismic reinforcing bars [J]. Materials Review, 2010, 24(15): 454-458.
- [5] 何才. 疲劳试验数据处理及 P-S-N 曲线的作用[J]. 汽车工艺与材料, 2007, (4).  
HE Cai, Fatigue test data treatment and P-S-N curve function [J]. Automobile Technology & Material, 2007, (4).
- [6] Zhang X C, Xuan F Z. Stress-dependent fatigue mechanisms of CrC-NiCr coatings in rolling contact [J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2011, 34(6): 438-447.
- [7] 王旭亮,聂宏. 基于灰色系统 GM(1,1)模型的疲劳寿命预测方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2008, 40(6): 845-848.  
WANG Xuliang, NIE Hong. Prediction method for fatigue life based on grey model GM(1, 1) [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2008, 40(6): 845-848.
- [8] Jonathan F, Luiz C W, Ken M. Low cycle fatigue simulation and fatigue life prediction of multilayer coated surfaces[J]. Wear, 2010, 269(9): 639-646.
- [9] Apostolopoulos C A. Mechanical behavior of corroded reinforcing steel bars S500s tempcore under low cycle fatigue[J]. Construcion Building Mater, 2007, 21: 1447-1456.
- [10] Walter S, Giovanni B, Barbara M, et al. Dual-phase steel re-bars for high-ductile r. c. structures, Part 2: Rotational capacity of beams [J]. Engineering Structures, 2007, 29(12): 3333-3341.
- [11] 杨才福. 高强度建筑钢筋的最新技术进展[J]. 钢铁, 2010, 45(11): 1-11.  
YANG Caifu. Recent developments of high strength rebars for building [J]. Iron and Steel, 2010, 45(11): 1-11.
- [12] Sivapragash M, Lakshminarayanan P R, Karthikeyan R, et al. Hanumantha. Fatigue life prediction of ZE41A magnesium alloy using weibull distribution [J]. Materials & Design, 2008, 29(8): 1549-1553.
- [13] Raif S, Irfan A. Statistical analysis of bending fatigue life data using Weibull distribution in glass-fiber reinforced polyester composites [J]. Materials & Design, 2008, 29(6): 1170-1181.
- [14] Chandran K S R, Chang P, Cashman G T. Competing failure modes and complex S-N curves in fatigue of structural materials [J]. International Journal of Fatigue, 2010, 32(3): 482-491.
- [15] Hanaki S, Yamashita M, Uchida H, et al. On stochastic evaluation of S-N data based on fatigue strength distribution [J]. International Journal of Fatigue, 2010, 32(3): 605-609.
- [16] Zhao Y X, Yang B, Feng M F, et al. Probabilistic fatigue S-N curves including the super-long life regime of a railway axle steel [J]. International Journal of Fatigue, 2009, 31(10): 1550-1558.

(编辑 胡 玲)