

DOI: 10.11835/j.issn.2096-6717.2024.042



开放科学(资源服务)标识码 OSID:



基于精细有限元模型的云冈石窟稳定分析与安全评估

窦超¹, 丁会方¹, 闫丁², 任建光², 王娟^{1,3}, 杨娜^{1,3}

(1. 北京交通大学 土木建筑工程学院, 北京 100044; 2. 云冈研究院, 山西 大同 037007;

3. 北京古遗址保护研究中心, 北京 100044)

摘要: 在自然界的各种营力作用下, 石窟寺病害严重, 随着时间的推移, 损伤程度不断加剧, 因此, 石窟寺的预防性保护问题日渐严峻。石窟寺的预防性保护研究方法主要为数值计算及现场监测, 为确保数值计算的准确性, 提出研究思路: 利用石窟寺的三维激光扫描云图生成石窟寺的精细几何模型, 准确反映石窟寺的复杂几何形状; 利用 H-B 准则考虑风化、裂隙、节理等病害造成的岩体力学性能劣化, 得到接近实际情况的岩石物理力学参数值, 进而建立能较为真实地反映石窟边界条件、应力位移及可能破坏情况的精细化数值计算模型; 结合强度折减法对石窟寺的稳定性进行分析, 并结合岩体的纵波波速对岩体劣化后石窟的危险区域进行预测, 建立预警系统, 实现对石窟寺的预防性保护。以云冈石窟第 9、10 号洞窟为例, 采用该方法进行系统性建模、受力分析和稳定性讨论。结果表明, 现阶段洞窟整体呈稳定状态, 部分区域存在应力集中; 通过岩石强度劣化模拟对洞窟的潜在失稳风险区域进行预测, 并建立以岩体纵波波速为评判依据的预警系统。

关键词: 石窟寺; 稳定性分析; 安全评估; H-B 准则; 精细化数值模型; 预警分析

中图分类号: TU457 **文献标志码:** A **文章编号:** 2096-6717(2025)03-0066-13

Stability analysis and safety evaluation of Yungang Grottoes based on fine finite element model

DOU Chao¹, DING Huifang¹, YAN Ding², REN Jianguang², WANG Juan^{1,3},
YANG Na^{1,3}

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, P. R. China; 2. Yungang Grottoes Research Institute, Datong 037007, Shanxi, P. R. China; 3. Beijing Ancient Site Protection Research Center, Beijing 100044, P. R. China)

Abstract: Subjected to various natural forces, the disease of grotto temple is serious. The damage degree of grotto temple is increasing with time, and the preventive protection for grotto temple is becoming more essential. The preventive protection measures mainly consists of the numerical evaluation and on-site monitoring. In order to ensure the accuracy of numerical calculation, this paper proposes the following methodology: First, the three-dimensional laser scanning cloud image of the grottoes temple is used to generate

收稿日期: 2024-01-19

基金项目: 山西省文物局科技项目 (2021KT33)

作者简介: 窦超 (1984-), 男, 博士, 副教授, 从事古遗址评估与保护研究, E-mail: douchao@bjtu.edu.cn.

Received: 2024-01-19

Foundation item: Science and Technology Project of Shanxi Cultural Relics Bureau (No. 2021KT33)

Author brief: DOU Chao (1984-), PhD, associate professor, main research interests: heritage protection and risk assessment, E-mail: douchao@bjtu.edu.cn.

a fine geometric model of the grottoes temple to accurately reflect its complex geometric shape; Secondly, H-B criterion is used to fully consider the deterioration of rock mass mechanical properties caused by weathering, cracks, joints and other diseases, and to obtain reliable rock physical and mechanical parameter, and then establish a refined numerical calculation model that more truly reflects the boundary conditions, stress displacement and possible failure path. Finally, the current stability of the grotto temple is analyzed by strength reduction method, and the danger zone of the grotto after the deterioration of the rock mass is predicted by the longitudinal wave velocity of the rock mass, and an early warning system is established to realize the preventive protection of the grotto temple. Taking Grottoes No. 9 and 10 of Yungang Grottoes as an example, systematic modeling, force analysis and stability discussion are carried out by using the above research ideas. The results show that the grottoes maintain a stable state as a whole at present, and stress concentration exists in some areas. By simulating rock strength deterioration, the potential instability risk area of the cave is predicted, and an early warning system based on rock P-wave velocity is established.

Keywords: grotto temple; stability analysis; safety evaluation; H-B criterion; refined numerical model; precautionary analysis

作为一种重要的历史文化载体,石窟寺具有较高的文化、历史和观赏等价值,但在风化、雨蚀以及人类活动等各种营力作用下,各石窟寺受到了不同程度的破坏,其预防性保护研究亟待开展^[1-2]。

对于石窟寺的预防性保护研究工作,常见方法有数值分析和现场监测等^[3-4]。数值分析作为一种行之有效的研究方法,有着很广泛的应用。为保证数值分析的准确性,构建的模型需尽量与实际相符,包括几何信息、力学参数以及边界条件等。已有不少专家学者对云冈石窟^[5-7]、龙游石窟^[8-9]、敦煌莫高窟^[10-11]、圆觉洞石窟^[12-13]等众多石窟寺开展了数值分析研究,取得了一定成果。但目前对石窟寺的稳定性数值分析研究工作或多或少存在以下问题:1)在建立数值模型时,一般对石窟寺几何形状进行了简化处理,常将复杂的石窟几何形状简化为规则几何形状(如文献[14-15]等);2)对岩体力学参数的选取过于简化,未考虑节理分层、裂隙、风化等缺陷等对岩石性能的综合性影响(如文献[16-17]等);3)研究结果针对当时研究的情形,未能建立石窟寺的预防性保护体系(如文献[18-19]等)。针对上述问题,笔者在尽量符合石窟真实几何尺寸、现存条件以及应力状态的基础上,建立更为精细的几何和力学数值分析模型。首先,利用石窟寺的扫描云图生成精细的石窟几何模型,准确反映石窟内部的复杂几何形状;其次,利用H-B准则充分考虑风化、裂隙、节理等病害造成的岩体力学性能劣化,得到接近实际情况的岩石物理力学参数值,进而建立能较为真实反映石窟边界条件、应力位移及可能破坏情况的精细化数值计算模型;最后,结合强度折减法对石窟的稳定性进行分析,依据岩体的纵波波速对因岩体劣化造成的石窟危险区域进行预测,并建立

预警系统,从而实现对石窟寺的预防性保护。

1 云冈石窟概况

作为中国首批国家重点文物保护单位和世界文化遗产,云冈石窟具有极高的历史文化价值。但由于遭受近1 500 a自然风化营力的作用和人为损毁,洞窟与石雕受到不同程度的损坏,局部窟顶岩石有崩塌、掉块的危险。在构造裂隙和风化卸荷裂隙切割的影响下,云冈石窟的第9、10号洞窟岩体的稳定性有所降低,且外立柱风化严重,洞窟失稳风险大^[20]。为验证研究思路的可行性,选取具有典型石窟寺病害特点的云冈石窟第9、10号洞窟作为研究对象进行分析。

1.1 洞窟分布

云冈石窟位于山西省大同市西郊云冈镇,距大同市中心约16 km。窟区南侧、西侧毗邻十里河,北依武周山。云冈石窟现存洞窟53个,大小佛龕1 100多个,东西绵延约1 km。窟区分为东部(1~4窟)、中部(5~20窟)、西部(21~53窟)3部分,为中国规模最大的古代石窟群之一。石窟平面分布见图1。

云冈石窟第9、10号洞窟位于云冈石窟中部的五华洞,二者同期开凿,都分前后两室。窟前都有立柱支撑,其平面布置图见图2。

图2中标号1~7分别为:1为第9、10号洞窟前室隔墙;2为第9、10号洞窟前、后室隔墙;3为第9、10号洞窟后室隔墙;4为第9号洞窟后室佛像;5为第10号洞窟后室佛像;6为第9号洞窟拱门所处位置;7为第10号洞窟拱门所处位置。

第9、10号洞窟的宽度(东西长)、进深(南北长)、高度和底板标高见表1。

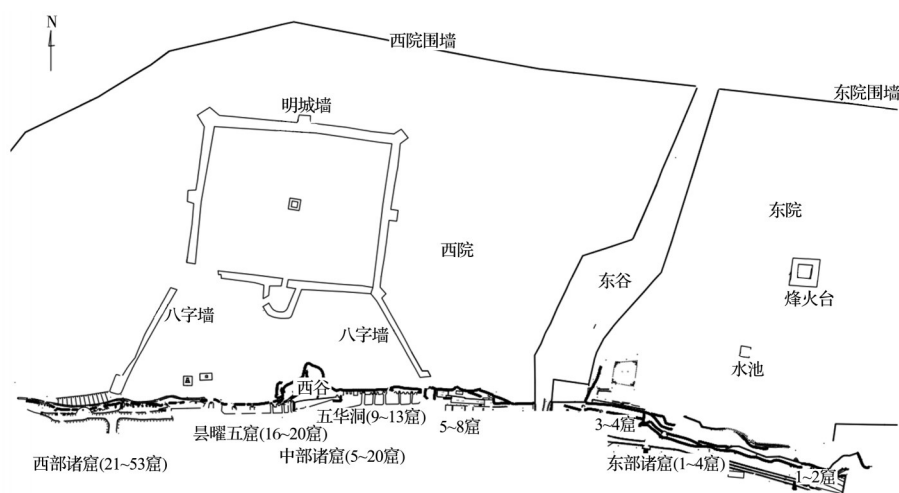


图 1 石窟平面分布示意图

Fig. 1 Plane distribution diagram of grottoes

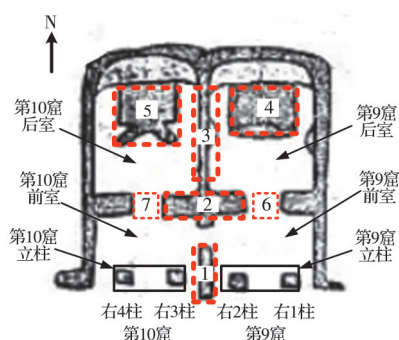


图 2 第 9、10 号洞窟平面布置图

Fig. 2 Floor plan of Cave 9 and 10

表 1 第 9、10 号洞窟几何尺寸

Table 1 Geometric dimensions of caves 9 and 10

石窟编号	宽度/m	进深/m	高度/m	底板标高/m
9	10.4	16.5	10.8	1 138.1
10	11.0	17.2	10.2	1 138.6

1.2 石窟地质地貌

云冈石窟开凿于十里河三级基座阶地砂岩中。石窟南临十里河,窟顶北部为低山丘陵,地势平缓,呈波状起伏,地形北高南低,最大高差 55 m 左右;石窟东侧为冲沟,西侧为十里河谷。窟区被南北向大冲沟(东谷、西谷)分为东、中、西 3 部分。

窟区地层结构较简单,属中生代中侏罗统上部云冈组(J_2y)和第四系中上部的中更新统(残积-冲积)、上更新统(冲积-洪积)、全新统(冲积-坡积)^[20]。可将云冈组对石窟有影响的地层划分为 6 个岩性段,石窟开凿于云冈组第 2~4 岩性段。第 9、10 号洞窟主要开凿于第 4 段(J_2y^4),该段岩性为黄褐色、灰黄色、黄色及肉红色含砾粗中粒长石岩屑砂岩,粗粒铁质、钙质长石岩屑砂岩,中粗粒长石岩屑砂岩及中粗粒钙质长石岩屑砂岩。岩石质地较疏松,易风化,具有交错层理(地层分布图见图 3)。

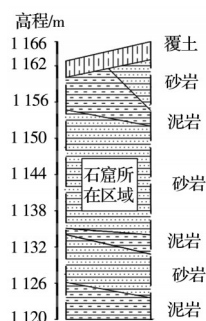


图 3 云冈石窟地层分布图

Fig. 3 Stratigraphic distribution map of Yungang Grottoes

窟区内岩层产状平缓,一般倾角为 $3^\circ \sim 4^\circ$,倾向多为北北东向。断层和节理均不发育,区内构造以节理为主。区内裂隙以构造裂隙为主,亦发育有风化裂隙。风化裂隙的发育很不规则,多呈不规则的网状,裂面不平整。第 9、10 号洞窟所在区段平均节理 0.14 条/ m^2 ,该区段节理优势方向以 $81^\circ \sim 90^\circ$ 为主, $41^\circ \sim 60^\circ$ 次之, $351^\circ \sim 360^\circ$ 方向节理也有一定发育,即近东西向张节理(迭加卸荷)在本区段最发育,其次为北东向剪切节理。

2 精细几何模型的建立

石窟寺数字化保护的发展以及各种建模、计算软件的交互式应用给石窟寺数值模型的建立带来了新的思路^[13, 21]。使用三维激光扫描技术获取石窟寺的点云图,利用 Geomagic studio 软件的点云处理功能和 Hypermesh 的网格划分功能,建立石窟寺的精细化几何模型,准确反映洞窟的内部尺寸和形状细节^[17],精细化模型建立流程图见图 4。

2.1 点云数据处理

利用三维激光扫描技术扫描石窟内部构造及石窟入口处的外立柱,获得云冈石窟第 9、10 号洞窟的点云数据,将三维扫描点云图导入 Geomagic

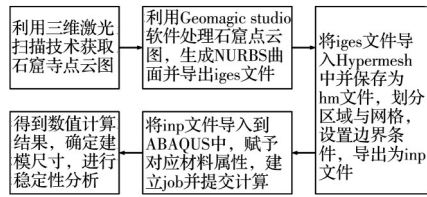


图4 模型建立流程图

Fig. 4 Model building flow chart

studio软件(图5)。初始的点云图包括543 008个点云数据,去除无用的点云数据,并生成三角面片(图6)。

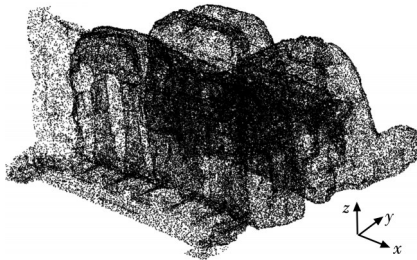


图5 石窟扫描点云图

Fig. 5 Scan points cloud image of the caves

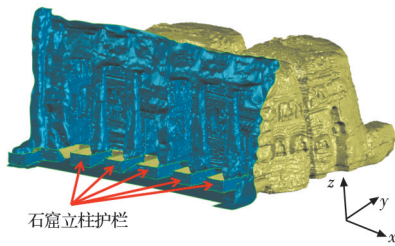


图6 第9、10号洞窟扫描云图

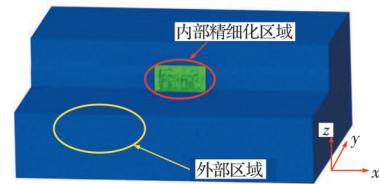
Fig. 6 Scanned cloud images of Caves 9 and 10

在图6的三角面片图形中,存在对石窟稳定性分析无用的区域,如立柱的护栏,洞窟内部的杂物等,将上述内容去除,并把模型中的孔洞区域进行修补,经过降噪、松弛、构造曲面片等操作生成NURBS曲面,随后导出为iges文件。

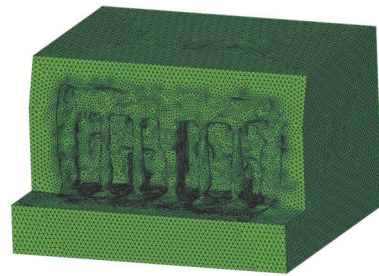
2.2 模型网格处理

将iges文件导入Hypermesh中保存为hm文件,并将曲面模型实体化,利用Hypermesh的3D→tetra→volume tetra模块进行网格划分。由于重点关注对象为洞窟内部窟壁的稳定性的,为了减少不必要的计算,在进行网格划分时,将实体模型分为两个部分(内部区域尺寸为31.5 m×27.7 m×19.8 m,总尺寸为130 m×120 m×70 m),内部区域的网格划分较为精细,非重点关注的外部区域网格划分较为粗糙^[19],具体为:内部区域平均网格尺寸为250 mm,在模型网格化后仍能保持真实的轮廓形状。内部区域单元数量为864 497,节点数量为163 671,外部区域单元数量为371 392,节点数量为69 406,采用

的单元类型为C3D4,如图7所示。



(a) 模型区域的划分

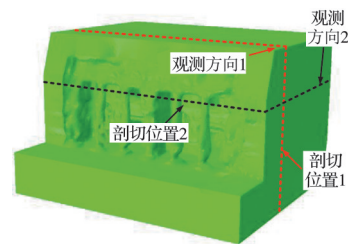


(b) 内部精细化区域网格划分

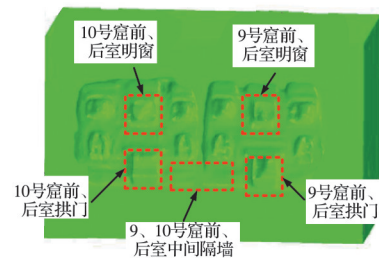
图7 模型区域及网格划分

Fig. 7 Model region division and grid division

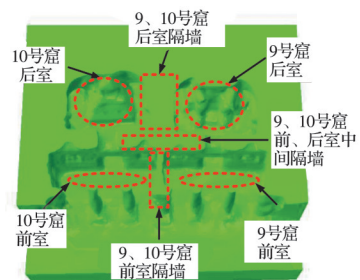
为方便对洞窟内部各部位的应力-应变状态进行描述,对第9、10号洞窟进行剖切,以说明洞窟内部各位置分布情况及各部位名称,如图8所示。



(a) 剖切位置及视图方向



(b) 剖切位置1,视图方向1



(c) 剖切位置2,视图方向2

图8 洞窟内部布置及名称

Fig. 8 Cave interior layout and name

2.3 计算范围的确定

文献[16]提到,石窟开挖对周围岩体的应力及位移有明显影响的范围大约是开挖轮廓尺寸的2.5~3.0倍。为了得到更加符合实际的模型尺寸,以第9、10号洞窟开挖轮廓尺寸的倍数建立相应的几何模型,同时模型地面以上的竖向尺寸(地面至第9、10号洞窟所在边坡顶部的距离)保持为实际高度。

建立几何模型之后,在Hypermesh中赋予模型边界条件。为使模型能在竖向自由沉降变形而不发生侧向移动,模型的边界条件设置为:约束石窟模型底部节点 x 、 y 、 z 三个方向的位移, y 方向边界约束其 y 方向的位移, x 方向边界约束其 x 方向的位移。最后,将模型导出为inp文件,再导入ABAQUS中,赋予材性和荷载参数进行计算。

图9所示为在自重作用下第9、10号洞窟的右3柱上部区域一点的最小主应力值随不同边界尺寸的变化曲线。可以看到,该点应力值随着模型尺寸的增大而增加,但增长速度逐渐减缓。当模型尺寸由洞窟开挖轮廓尺寸的4.0倍增加到7.0倍时,该点应力值的增幅只有2.8%,因此,可认为模型外围尺寸为第9、10号洞窟开挖轮廓尺寸的4.0倍时,便能较好地考虑洞窟边界范围的影响。为了减少计算量,取第9、10号洞窟开挖轮廓尺寸的4.0倍建立最终模型。

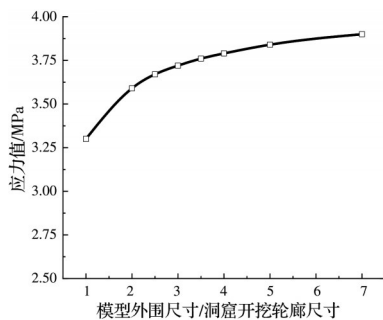


图9 应力值随模型尺寸变化曲线

Fig. 9 The stress value varies with the model size

3 实际破损岩体的力学参数取值

第9、10号洞窟岩体的物理力学参数从《云冈石窟防水保护工程岩土工程勘察报告》^[20](以下简称《勘察报告》)获取。出于文物保护的需要,《勘察报告》中获取洞窟岩体物理参数的岩体样本并非取自洞窟内部本体,而是取自洞窟所在山体后方的岩层。对后方岩层钻孔取芯,并对岩体样本进行室内试验,得到第9、10号洞窟岩石的物理参数如表2所示。

由于岩体的尺寸效应^[22]以及洞窟内部及邻近部

表2 第9、10号洞窟勘探参数

Table 2 Exploration parameters of caves 9 and 10

H/m	$\rho/(\text{g}/\text{cm}^3)$	σ_c/MPa	σ_{cw}/MPa
29	2.492	59.42	32.53
ν	E/GPa	$\varphi/(^{\circ})$	c/MPa
0.192	16.81	42.81	11.2

注: H 为第9、10号石窟所在边坡的高度; ρ 为岩体密度; σ_c 为岩体单轴抗压强度; σ_{cw} 为岩体饱水单轴抗压强度; ν 为岩体泊松比; E 为岩体弹性模量; φ 为岩体内摩擦角; c 为岩体内聚力。

位的岩体存在风化、裂隙、节理等病害,相比新鲜完整的岩石,其力学性能存在一定程度的劣化。而《勘察报告》中的岩体样本取自较远区域的深层岩石,不能反映洞窟岩体的真实力学性能,因此,数值分析中一项重要工作就是对表2中的力学参数进行折减,以获取存在病害和缺陷的石窟岩体的实际力学性能参数^[12]。

利用H-B强度准则来考虑岩体病害和缺陷对岩体强度的折减。H-B强度准则是基于对大量岩体强度曲线的系统研究结果提出的,其经验公式的表达式为^[23-24]

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c (m_b \sigma_3 / \sigma_c + s)^a \quad (1)$$

式中: σ_1 、 σ_3 分别为实际岩体的最大、最小主应力值; σ_c 为完整未破损岩石的单轴抗压强度; m_b 、 s 和 a 为半经验参数, m_b 与岩石软硬程度有关; s 反映岩体破损程度,取值范围为0~1,完整岩石 $s=1$; a 与岩体类型有关。

从式(1)看到,H-B强度准则中采用 m_b 、 s 和 a 三个关键参数来反映岩体病害对其强度的折减效果。 m_b 、 s 和 a 可由式(2)~式(4)确定。

$$m_b = m_i e^{\frac{G-100}{28-14D}} \quad (2)$$

$$s = e^{\frac{G-100}{9-3D}} \quad (3)$$

$$a = \frac{1}{2} + \left(e^{-\frac{G}{15}} - e^{-\frac{20}{3}} \right) \quad (4)$$

式中: D 为岩石扰动参数,取决于外界因素对原位岩体的扰动程度,如爆破、岩体开挖、岩体卸荷等行为,取值范围为0~1,外界扰动越大,其值越大,可按照式(5)取值^[25]。

$$D = 1 - K_v \quad (5)$$

式(5)中 K_v 为岩体完整性系数,可根据岩体中的纵波波速进行取值^[26]。

$$K_v = (V_{ml} / V_{cl})^2 \quad (6)$$

式中: V_{ml} 为实际岩体中的纵波波速; V_{cl} 为完整未破损岩石中的纵波波速。 K_v 值越小,表明岩体的完整性越差,节理化程度越严重。

根据《勘察报告》可知,第9、10号洞窟的 $V_{ml}=2800 \text{ m/s}$ 、 $V_{cl}=3374 \text{ m/s}$ 。

由式(5)和式(6)可得,第9、10号洞窟的完整性系数 $K_V=0.689$,扰动参数 $D=0.311$ 。

$G(GSI)$ 为岩石的地质强度指标,其值在0~100,取决于岩体的结构、节理等发育程度。实际岩体的地质状况越好, G 值越大,相应的计算式为^[26]

$$G=1.418B^{0.6241}-5 \quad (7)$$

$$B=90+3\sigma_{cw}+250K_V \quad (8)$$

当 $\sigma_{cw} \geq 90K_V+30$ 时,以 $\sigma_{cw}=90K_V+30$ 代入求 B 值;当 $K_V \geq 0.04\sigma_{cw}+0.4$ 时,以 $K_V=0.04\sigma_{cw}+0.4$ 代入求 B 值。 σ_{cw} 为岩体饱水单轴抗压强度; K_V

为前述岩体完整性系数。

对于第9、10号洞窟,岩石饱水单轴抗压强度 $\sigma_{cw}=32.53 \text{ MPa}$ (表2),则: $B=359.76$, $G=50.87$ 。

m_i 为岩石类型参数,与组成岩石的矿物成分有关,岩体质量越好其值越大。

可查询表格^[25]获得 m_i 值,部分取值见表3。根据《勘察报告》,第9、10号洞窟的岩体以多层黄灰色薄层状细粒~中细粒泥质长石岩屑砂岩为主,因此,取 $m_i=17$ 。

表3 m_i 近似值取值表(部分)

Table 3 Approximation table of m_i (part)

岩石类型	分类	小类	不同质地岩石及其 m_i 值			
			粗糙	中等	精细	非常精细
沉积岩	碎屑		砾岩 21±3		粉砂岩 7±2	黏土岩 4±2
			角砾岩 19±5	砂岩 17±4	硬砂岩 18±3	页岩 6±2
						泥灰岩 7±2
	非碎屑	碳酸盐	结晶灰岩 12±3	粉晶灰岩 10±2	微晶灰岩 9±2	白云石 9±3
		蒸发岩		石膏 8±2	硬石膏 12±2	
		有机物				白垩 7±2

由于岩体的劣化,实际岩体的弹性模量^[25]也与《勘察报告》中的试验结果有所差别。可由式(9)、式(10)确定折减后的岩体弹性模量。

当 $\sigma_c \leq 100$ 时:

$$E_m = 10^{\frac{G-10}{40}} \left(1 - \frac{D}{2} \right) \sqrt{\frac{\sigma_c}{100}} \quad (9)$$

当 $\sigma_c > 100$ 时:

$$E_m = 10^{\frac{G-10}{40}} \left(1 - \frac{D}{2} \right) \quad (10)$$

由表2可知,未破损岩石的单轴抗压强度 $\sigma_c=59.42 \leq 100$,则采用式(9),计算得到 $E_m=6.844 \text{ GPa}$ 。

由式(2)~式(4)可得H-B强度准则的半经验参数 $m_b=2.124$, $s=2.25 \times 10^{-3}$, $a=0.505$ 。

4 有限元分析的M-C准则参数

尽管Hoek-Brown强度准则应用广泛,能够有效考虑结构面等缺陷的影响以及岩体结构的非线性破坏特征^[27],但当前H-B本构模型仅集成在少数专用有限元软件,无法直接在ABAQUS等通用有限元软件中使用。相比之下,M-C准则因参数简单、物理意义明确而被广泛应用于各数值分析软件

中^[28]。并且已有研究表明,利用H-B强度准则的等效M-C参数在实际工程应用中效果不错,如利用等效的M-C参数对某地下工程^[29]、公路隧道工程^[30]等实际工程问题进行研究,验证了使用等效M-C参数进行数值分析的可行性。

M-C准则表达式为

$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3 + \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} c \quad (11)$$

式中: σ_1 、 σ_3 分别为岩体的最大、最小主应力值; φ 为岩体内摩擦角; c 为岩体内聚力。

将H-B准则的有关参数结果应用于基于ABAQUS软件的石窟稳定性分析的关键在于,如何将H-B强度准则参数等效为M-C强度准则参数 φ 和 c ,进而实现在ABAQUS软件中考虑病害和缺陷影响的石窟岩体的实际力学性能。

为得到等效强度参数,可在如图10所示的特定最小主应力区间内,基于H-B准则和M-C准则的覆盖面积相等的原则^[28, 31],计算等效M-C参数 φ 和 c 。

等效M-C参数计算式为

$$\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{3am_b(s + m_b\sigma_{3n})^{a-1}}{(1+a)(2+a) + 3am_b(s + m_b\sigma_{3n})^{a-1}} \right) \quad (12)$$

$$c = \frac{\sigma_c [(1+2a)s + (1-a)m_b\sigma_{3n}](s + m_b\sigma_{3n})^{a-1}}{(1+a)(2+a) \sqrt{1 + \frac{[6am_b(s + m_b\sigma_{3n})^{a-1}]^2}{[(1+a)(2+a)]^2}}} \quad (13)$$

式中: $\sigma_{3n} = \sigma_{3\max} / \sigma_c$ 。

对于边坡工程,侧限应力上限值 $\sigma_{3\max}$ 由式(14)确定。

$$\sigma_{3n} = \sigma_{3\max} / \sigma_c = 0.72 \left(\sigma_{cm} / \gamma H \right)^{-0.91} \quad (14)$$

式中: γ 为岩体重度; H 为埋深(坡高); σ_{cm} 为岩体的整体强度,可由式(15)确定。

$$\sigma_{cm} = \sigma_c \frac{[m_b + 4s - a(m_b - 8s)](m_b/4 + s)^{a-1}}{2(1+a)(2+a)} \quad (15)$$

由式(12)~式(15)可计算得到等效的 M-C 强度参数 $c = 1.015 \text{ MPa}$ 、 $\varphi = 30.6^\circ$ 。

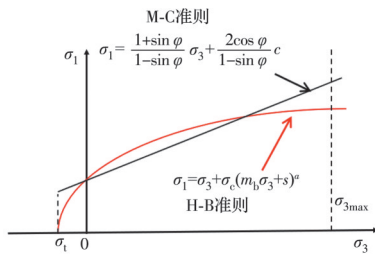


图 10 σ_1 - σ_3 平面面积等效法

Fig. 10 Area balancing approach on σ_1 - σ_3 plane

将计算得到的岩体抗剪强度指标汇总,见表 4。

表 4 实际石窟岩体的抗剪强度指标

Table 4 Rock mass shear strength index

c/MPa	$\varphi/^\circ$	E_m/GPa
1.015	30.6	6.844

注: c 为折减后的等效内聚力; φ 为折减后等效内摩擦角; E_m 为折减后的弹性模量。

岩土材料破坏的主要形式是剪切破坏和拉伸破坏,对于石窟岩体可能发生破坏的判定,可选择 M-C 破坏准则^[32],其表达式为

$$f_s = \sigma_1 - \sigma_3 N_\phi + 2c \sqrt{N_\phi} \quad (16)$$

$$f_t = \sigma_3 - \sigma_t \quad (17)$$

$$N_\phi = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

式中: σ_1 为最大主应力; σ_3 为最小主应力; c 为岩体内

聚力; φ 为岩体内摩擦角; σ_t 为岩体抗拉强度。

当岩体中某一点应力满足 $f_s < 0$, 则发生剪切破坏。当岩体中某一点应力满足 $f_t > 0$, 则发生拉伸破坏。

在 ABAQUS 软件中以拉应力为正、压应力为负,因此,最大主应力云图一般反映拉应力集中现象,拉应力集中区易发生拉伸破坏;最小主应力云图一般反映压应力集中现象,压应力集中区易发生剪切破坏。可根据石窟应力集中区分布和石窟的塑性区发展情况定性判断洞窟可能发生破坏的位置,然后通过判定公式 f_s 和 f_t 定量地判断岩体某点是否发生剪切破坏和拉伸破坏。

对于洞窟的整体稳定性可根据洞窟塑性区的发展情况进行判断,若洞窟在自重作用下形成了连续的塑性贯通区或滑移面^[33-34],则认为洞窟整体发生了失稳破坏。

5 数值计算结果及稳定性分析

基于得到的 M-C 岩土力学参数,利用 ABAQUS 进行数值计算,得到第 9、10 号洞窟在重力载荷作用下的应力-变形分布云图,并对其可能的破坏情况进行分析。

5.1 石窟塑性区发展

图 11 为第 9、10 号洞窟在重力荷载作用下的塑性区发展情况。可以看到,第 9、10 号洞窟除了立柱上部和底部、前室中间隔墙下部存在塑性发展区,其他部位没有塑性区形成。其中,第 9 号洞窟左侧立柱(右 2 柱)底部等效塑性应变最大。

塑性区呈现零散状态,未形成塑性贯通区,说明石窟虽然局部出现破损,但在重力作用下整体尚处于稳定状态。随着时间推移、岩体强度进一步劣化,上述区域发展为塑性贯通区而发生破坏的风险性较大,在日常巡护中应格外关注。

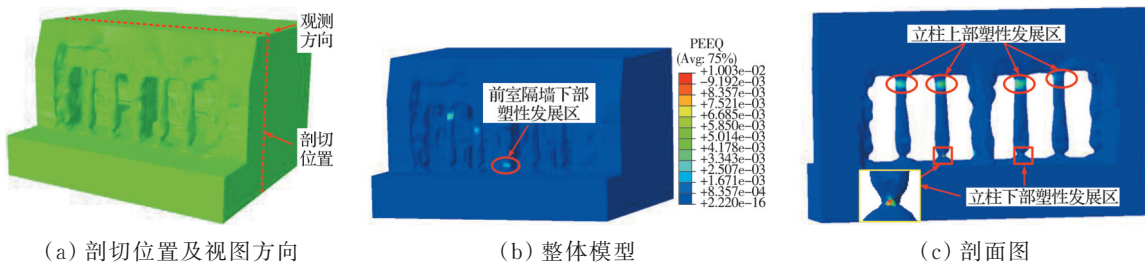


图 11 第 9、10 号洞窟塑性发展云图

Fig. 11 Equivalent plastic strain of Cave 9 and 10

5.2 石窟最小主应力分布

图12为石窟在重力荷载作用下的最小主应力分布情况及对应的剖面图。可以看到,第9、10号洞窟整体应力分布较为均匀(图12(b)),但在第9号洞窟最右侧入口坡脚处(图12(c))及第10号洞窟最左侧入口坡脚处(图12(d))压应力集中现象较为突

出,此区域易发生剪切破坏,其他部位无明显应力集中现象。提取压应力集中区最危险点的应力值,即第9号洞窟最右侧入口坡脚处某点的应力值为 $\sigma_1 = -4.34 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -0.58 \text{ MPa}$ 。由此可得 $f_s = \sigma_1 - \sigma_3 N_\phi + 2c\sqrt{N_\phi} > 0$,说明压应力集中区未发生剪切破坏,目前处于稳定状态。

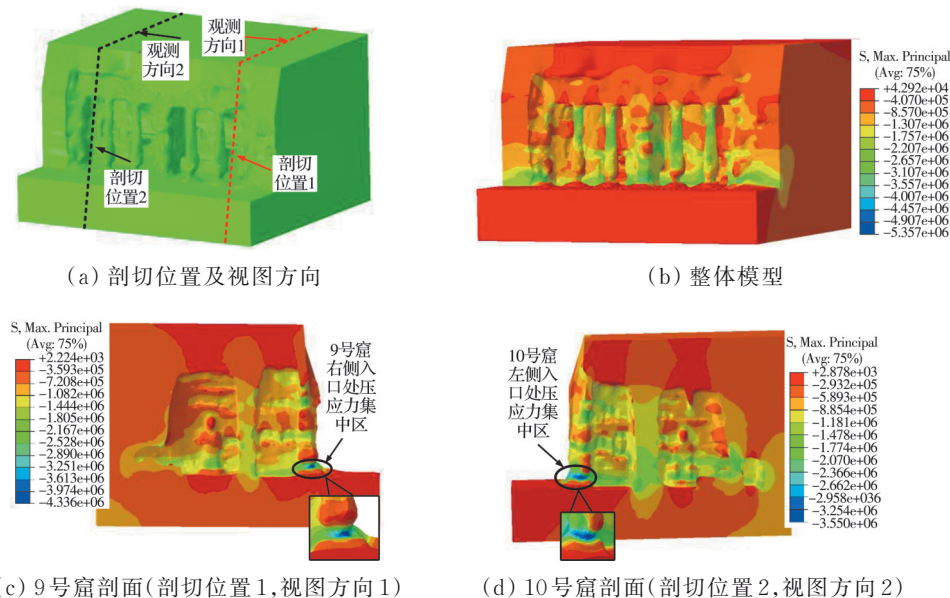


图12 第9、10号洞窟最小主应力云图

Fig. 12 Minimum principal stress of Cave 9 and 10

5.3 石窟最大主应力分布

图13为石窟在重力荷载作用下的最大主应力分布情况及相应剖面图。可以看到,大部分区域应力分布较为均匀,但第9、10号洞窟内部以下位置拉应力集中现象较为严重:第9号洞窟和第10号洞窟的拱门底部(图13(c))、9号洞窟前室顶部、9、10号洞窟立柱门梁处及两窟明窗顶部位置(图13(d))。由于拉应力集中,这些部位易发生拉伸破坏,造成原有裂隙进一步发展,出现洞窟底部开裂,顶部掉块等现象,需要引起重视。

5.4 立柱安全系数

对于有立柱承重的石窟寺,立柱的稳定性对整个石窟寺安全十分重要,作为主要承力部位,云冈石窟第9、10号洞窟的外立柱风化严重,亟待对其开展安全性评价,立柱的安全系数可通过强度折减法得到。强度折减法的思路为^[35]:对岩体的力学参数内聚力 c 和内摩擦角 φ 的初始值进行人为折减(式(18)),将不同折减系数 k 值对应的 c_k 和 φ_k 赋予有限元模型进行计算,当石窟某处刚好达到失稳临界破坏状态时,对应的折减系数即为安全系数 k_s 。

$$c_k = \frac{c}{k}, \varphi_k = \tan^{-1} \left(\frac{\tan \varphi}{k} \right) \quad (18)$$

式中: c_k 为折减后的内聚力; φ_k 为折减后的内摩擦角; k 为折减系数。

临界失稳破坏状态的判断依据有3种:数值计算不收敛;特征部位位移曲线出现拐点;形成连续的塑性贯通区^[36]。一般而言,以数值计算不收敛为判断依据会导致结构安全系数偏大,利用塑性贯通区作为判断依据增加了不确定的人为因素^[37],因此,选择洞窟立柱特征部位(立柱上部区域,图11)位移拐点作为立柱安全性评价标准,绘制折减系数-位移($k-u$)曲线,见图14。

根据图14所示的折减系数-位移曲线可知,石窟立柱的安全系数均在2.5左右,处于15.3^[15](未考虑岩体劣化)和1.43^[16](把岩体视为强风化岩体)之间,可认为结果可靠。目前石窟立柱尚处于安全状态^[38],但随着风化的加剧,其安全系数会不断减小,立柱在未来仍存在失稳的可能性。

6 考虑岩石强度劣化的石窟危险性预测

对于石窟寺,随着时间的推移,风化等病害发

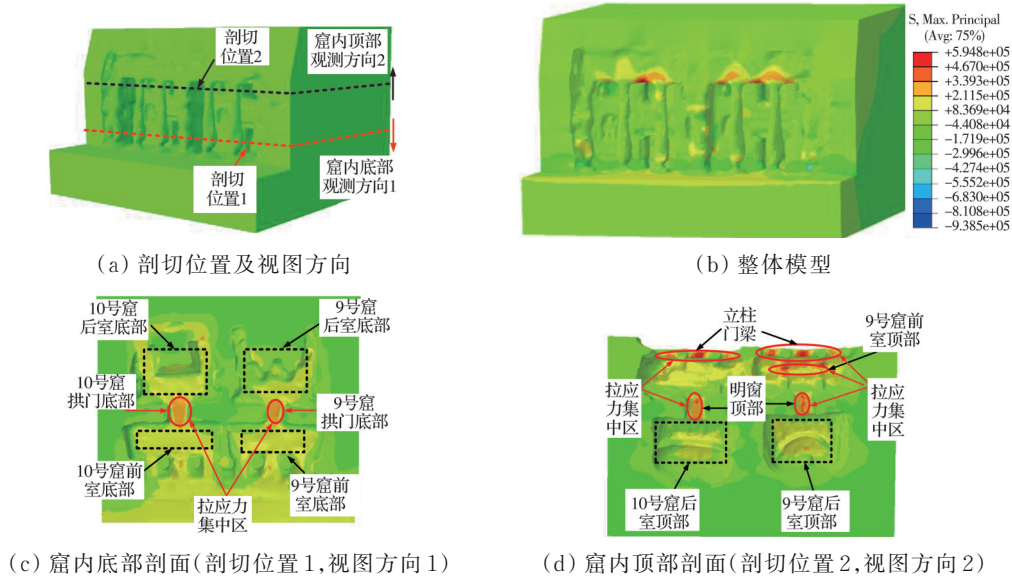
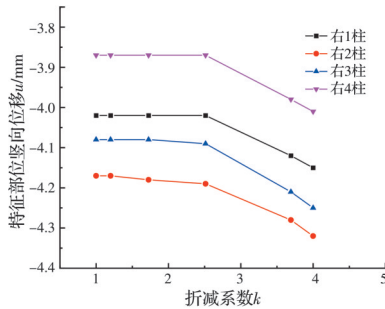


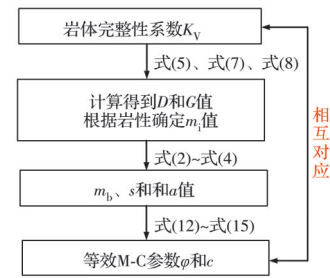
图 13 第 9、10 号洞窟最大主应力云图

Fig. 13 Maximum principal stress of Cave 9 and 10

图 14 第 9、10 号洞窟立柱 k - u 曲线Fig. 14 k - u diagram of the pillars of Cave 9 and 10

展会导致岩体整体性和强度降低,可能引起石窟产生稳定性问题。因此,预测石窟发生破坏的位置和时刻,对于石窟安全预警和预防性保护具有重要意义。

由式(1)~式(8)和式(12)~式(15)可以发现,只要确定了石窟的完整性系数 K_V (即岩体的纵波波速 V_{ml}),就可以确定参数 D 和 G (式(5)、式(7)、式(8))的值,同时 m_i 可由岩石类型确定。从而确定参数 m_b 、 s 和 a (式(2)~式(4)),最后由式(12)~式(15)可以确定 M-C 等效参数 φ 和 c 。即岩体的纵波波速 V_{ml} 与岩石力学参数值 φ 和 c 存在一一对应关系,见图 15。而参与数值计算的岩体力学参数 c_k 和 φ_k 与折减系数 k 之间存在对应关系(式(17)),由此可见,折减系数 k 与岩体的纵波波速 V_{ml} 存在一一对应关系。因此,可基于 ABAQUS 软件,通过强度折减法计算不同 c_k 和 φ_k 下石窟的塑性区发展情况,预测未来石窟发生破坏的位置,确定薄弱部位位置,并根据折减系数 k 与岩体的纵波波速 V_{ml} 的关系建立关于岩体纵波波速的危险性预测方法。

图 15 K_V 与 φ 和 c 关系图Fig. 15 The relationship between K_V and φ , c

由图 11 可知,在当前岩体强度参数数值及重力荷载作用下,第 9、10 号洞窟的立柱上部和底部、前室中间隔墙下部存在塑性发展区。现利用强度折减法进行数值计算,得到不同折减系数下的洞窟塑性区发展情况,见图 16。

由图 16 可以发现,随着岩体强度的降低,即随着折减系数的增大,不断有新的塑性区产生。当折减系数为 1.20 时,第 9、10 号洞窟的前室隔墙中部区域及后室隔墙下部区域开始进入塑性(图 16(b));当折减系数为 1.72 时,第 9、10 号洞窟拱门及第 9、10 号洞窟前、后室隔墙底部区域开始进入塑性(图 16(c));当折减系数为 2.4 时,第 9 号洞窟和第 10 号洞窟后室佛像部分区域开始进入塑性(16(d))。

由分析可知,随着岩体的劣化,第 9、10 号洞窟最先可能破坏的位置为石窟立柱,然后是前室隔墙,后室隔墙,第 9、10 号洞窟的拱门,第 9、10 号洞窟前、后室的隔墙、佛像等区域。这些部位应在日常巡检中引起重视。

根据不同折减系数对应洞窟塑性区的发展情况,并结合折减系数与岩体纵波波速的对应关系

(图 15),确定对应的岩体纵波波速的取值范围,从而建立石窟的纵波波速危险性预测方法,见表 5。在石窟的日常维护中可通过对测量潜在失稳区域

岩体的纵波波速,来判断其是否处于危险状态,提前预测岩体的稳定状态。

表 5 关于岩体纵波波速的危险性预测方法

Table 5 Risk prediction method of longitudinal wave velocity in rock mass

折减系数 k	纵波波速 $V/(m/s)$	石窟状态
$1 < k < 1.2$	$2\ 800 > V > 2\ 400$	在未进行折减时,石窟立柱进入塑性,随着折减系数的增大,塑性区增大
1.2	2 400	第 9、10 号洞窟前室隔墙中部和后室隔墙下部开始进入塑性,可以此波速为依据,对此区域进行监测
1.72	2 000	第 9、10 号洞窟拱门及第 9、10 号洞窟前、后室隔墙底部区域开始进入塑性,可根据此波速对此区域进行监测
2.4	1 400	石窟后室佛像部分区域开始进入塑性,可以此波速为依据,对此区域进行监测
> 2.4	$< 1\ 400$	塑性区会进一步发展

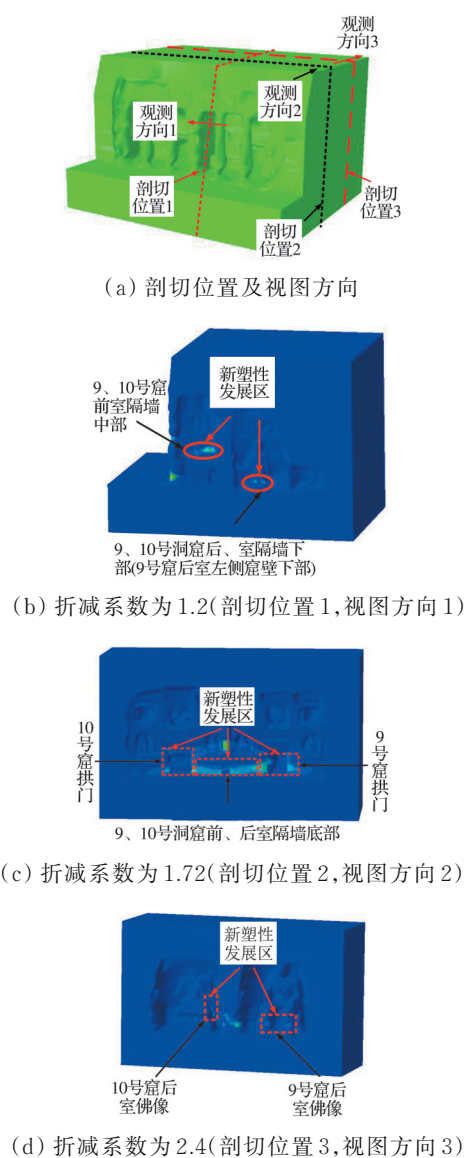


图 16 塑性发展区与折减系数

Fig. 16 Relation between plastic development zone and reduction coefficient

7 结论与讨论

7.1 结论

对具有典型病害特征的石窟寺,提出了一种新

的预防性保护研究思路,通过建立精细化几何模型、力学参数模型以及预警系统,实现对石窟寺的现存稳定性及未来危险区域预测的分析研究,并以云冈石窟第 9、10 号洞窟为例进行了分析,得到如下主要结论:

1)构建接近真实的石窟寺几何模型,综合考虑各病害对石窟寺岩体物理力学参数的折减,构建的计算模型能较好地应用在石窟寺的预防性保护工作中。

2)通过对云冈石窟第 9、10 号洞窟分析发现,目前石窟在局部和整体上均处于稳定状态;对未来因岩体劣化导致的失稳区域进行了预测,建立了以纵波波速为参考的预警系统。

7.2 讨论

1)研究的优势与不足

以云冈石窟为例,利用石窟寺的三维激光扫描云图,并运用 H-B 准则充分考虑石窟寺的风化、裂隙、节理等病害对岩体力学性能劣化的影响,建立了较为接近实际情况的石窟寺精细化数值计算模型;利用强度折减法对石窟寺的现有稳定性进行分析,结合岩体的纵波波速对因岩体劣化的石窟危险区域进行预测,并建立预警系统,实现对石窟寺的预防性保护,证明石窟寺预防性保护研究思路具备可行性。与之前的研究相比,建立的几何模型更为精细,岩体物理力学参数取值更符合实际情况。

但是,由于现场勘探数据的不足和文物保护的现实需求,云冈石窟岩体物理力学参数及相关数据获取有限。基于现有数据,将石窟岩体视为均一整体,采用力学参数折减的思路综合考虑病害的影响。实际上,石窟岩体在风化营力、构造运动、人类活动等多因素的影响下产生了异质性劣化,不同部位的完整性、风化程度存在差异。因此,算例模型存在一定不足,离反映实际石窟岩体的真实受力状态还存在差距。

2)未来展望

在后续的工作中需开展详细的现场勘察工作,并可以结合岩体的物理力学参数试验和数值反分析方法,减轻勘探作业对石窟寺的损伤,同时获取尽可能多的真实的岩体数据,在此基础上对具有不同病害程度的区域分区建模,并赋予不同参数进行分析计算,以提升模型计算的准确性和科学性。

此外,构建的预测模型在后续实际应用中还可以与现场监测相结合,基于现场监测数据以及利用机器学习等算法进行相关病害的综合性评估预测,建立考虑多因素的综合性预警系统。

参考文献

- [1] 兰恒星,吕洪涛,包含,等.石窟寺岩体劣化机制与失稳机理研究进展[J].地球科学,2023,48(4):1603-1633.
LAN H X, LÜ H T, BAO H, et al. Advances in degradation and instability mechanism of grotto temple rock mass [J]. Earth Science, 2023, 48(4): 1603-1633. (in Chinese)
- [2] 王金华,陈嘉琦.我国石窟寺保护现状及发展探析[J].东南文化,2018(1):6-14.
WANG J H, CHEN J Q. Current status and future development of cave temples protection in China [J]. Southeast Culture, 2018(1): 6-14. (in Chinese)
- [3] 安程,吕宁,张荣,等.预防性保护理念对我国石窟寺保护的影响与实践[J].东南文化,2020(5):13-19.
AN C, LYU N, ZHANG R, et al. Preventive conservation and its influence to the conservation practice on Chinese grotto temples [J]. Southeast Culture, 2020(5): 13-19. (in Chinese)
- [4] 龚晓南.对岩土工程数值分析的几点思考[J].岩土力学,2011,32(2):321-325.
GONG X N. Reflections on numerical analysis of geotechnical engineering [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(2): 321-325. (in Chinese)
- [5] 晏鄂川,方云.云岗石窟立柱岩体安全性定量评价[J].岩石力学与工程学报,2004,23(增刊2):5046-5049.
YAN E C, FANG Y. Quantitative evaluation on the safety of the column rock masses in Yungang Grotto [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(Sup 2): 5046-5049. (in Chinese)
- [6] 李天祺,董松源,周太全.云冈石窟在风化作用下岩体稳定性的数值模拟分析[J].自然灾害学报,2012,21(6):124-130.
LI T Q, DONG S Y, ZHOU T Q. Numerical simulation analysis of stability of Yungang Cavern's rock mass under weathering action [J]. Journal of Natural Disasters, 2012, 21(6): 124-130. (in Chinese)
- [7] 刘金孟,彭亚雄,吕奇,等.云冈双窟窟室围岩变形分析[J].科学技术与工程,2015,15(31):226-229.
LIU J M, PENG Y X, LV Q, et al. Research on stress and deformation of cave chambers in Yungang double-cave [J]. Science Technology and Engineering, 2015, 15(31): 226-229. (in Chinese)
- [8] 高千,王靖,杨志法,等.龙游石窟1~3号洞室稳定性分析及安全通道路线的选择[J].岩土力学,2009,30(9):2713-2721.
GAO Q, WANG J, YANG Z F, et al. Stability analysis of the large ancient underground rock Caverns in Longyou and the selection of maximum-security routes in the Caverns [J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(9): 2713-2721. (in Chinese)
- [9] 廖小辉,王雅南,刘浩,等.关于龙游石窟23号古地下洞室23-1号斜坡柱稳定问题的讨论[J].工程地质学报,2020,28(6):1406-1414.
LIAO X H, WANG Y N, LIU H, et al. The engineering scientific of the No.23-1 inclined rock pillar in No. 23 cavern in the ancient underground rock Caverns in Longyou [J]. Journal of Engineering Geology, 2020, 28(6): 1406-1414. (in Chinese)
- [10] 李利莎,杜建国,刘洪丽,等.罕遇地震下敦煌莫高窟彩塑动力响应数值模拟[J].防灾减灾工程学报,2017,37(2):201-207.
LI L S, DU J G, LIU H L, et al. Numerical simulation of dynamic responses of painted sculptures of Dunhuang Mogao Grottoes under rare earthquakes [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2017, 37(2): 201-207. (in Chinese)
- [11] 王旭东,张景科,孙满利,等.莫高窟南区洞窟古人开凿智慧初探[J].岩石力学与工程学报,2018,37(增刊2):4207-4220.
WANG X D, ZHANG J K, SUN M L, et al. Study on the ancient wisdom in the excavation of caves in the south area of Mogao Grottoes [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, 37(Sup 2): 4207-4220. (in Chinese)
- [12] 孟志刚.圆觉洞石窟顶板变形机理及控制对策研究[D].北京:中国矿业大学(北京),2021.
MENG Z G. Study on deformation mechanism and control countermeasures of roof in Yuanjue Cave [D]. Beijing: China University of Mining & Technology, Beijing, 2021. (in Chinese)
- [13] 刘长青,包含,兰恒星,等.石窟寺多尺度岩体结构发育特征与三维精细化建模方法研究——以安岳圆觉洞为例[J].工程地质学报,2024,32(6):1904-1915.
LIU C Q, BAO H, LAN H X, et al. Multi-scale rock structures development characteristics and 3D refinement modeling method of grottoes: A case study of Anyue Yuanjue Cave [J]. Journal of Engineering Geology, 2024, 32(6): 1904-1915. (in Chinese)

- [14] 郭志谦. 敦煌莫高窟南区密集洞窟群稳定性及危岩体风险评估[D]. 兰州: 兰州大学, 2018.
GUO Z Q. Stability of dense caves in the south area of Dunhuang mogao grottoes and risk assessment of dangerous rock mass [D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2018. (in Chinese)
- [15] 卢帅明. 云冈石窟9、10号窟柱体稳定性分析[D]. 沈阳: 沈阳建筑大学, 2018.
LU S M. Stability analysis of Pillars in caves 9 and 10 of Yungang Grottoes [D]. Shenyang: Shenyang Jianzhu University, 2018. (in Chinese)
- [16] 刘积魁. 云冈石窟9、10窟三维稳定性分析与地震动力响应模拟[D]. 武汉: 中国地质大学, 2011.
LIU J K. Three-dimensional stability analysis and seismic dynamic response simulation of caves 9 and 10 in Yungang Grottoes [D]. Wuhan: China University of Geosciences, 2011. (in Chinese)
- [17] 黄皇. 圆觉洞纹层状砂岩围岩稳定性分析[D]. 北京: 中国地质大学(北京), 2021.
HUANG H. Stability analysis of surrounding rock of layered sandstone with circular cave pattern [D]. Beijing: China University of Geosciences, 2021. (in Chinese)
- [18] 马雨君. 基于精细化勘察的卧佛佛手及目犍连造像稳定性研究[D]. 兰州: 兰州大学, 2022.
MA Y J. Study on the stability of the statues of Buddha's finger grown and sleeping Buddha's finger grown based on fine investigation [D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2022. (in Chinese)
- [19] 黄蕾. 大足石刻卧佛造像区局部岩体稳定性评价[D]. 兰州: 兰州大学, 2023.
HUANG L. Stability evaluation of local rock mass in the reclining Buddha statue area of Dazu stone carving [D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2023. (in Chinese)
- [20] 云冈石窟防水保护工程岩土工程勘察报告[R]. 建设综合勘察研究设计院, 2003.
Geotechnical investigation report of Yungang Grottoes waterproofing protection project [R]. Construction of Comprehensive Survey, Research and Design Institute, 2003. (in Chinese)
- [21] 李敏, 刁常宇, 葛云飞, 等. 石窟寺文物的数字化保护与利用[J]. 遥感学报, 2021, 25(12): 2351-2364.
LI M, DIAO C Y, GE Y F, et al. Digital protection and utilization of Grotto cultural relics [J]. National Remote Sensing Bulletin, 2021, 25(12): 2351-2364. (in Chinese)
- [22] 兰恒星, 包含, 孙巍锋, 等. 岩体多尺度异质性及其力学行为[J]. 工程地质学报, 2022, 30(1): 37-52.
LAN H X, BAO H, SUN W F, et al. Multi-scale heterogeneity of rock mass and its mechanical behavior [J]. Journal of Engineering Geology, 2022, 30(1): 37-52. (in Chinese)
- [23] HOEK E, BROWN E T. Practical estimates of rock mass strength [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 1997, 34(8): 1165-1186.
- [24] HOEK E, BROWN E T. The Hoek-Brown failure criterion and GSI-2018 edition [J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2019, 11(3): 445-463.
- [25] 陈鹏. 基于 Hoek-Brown 准则的边坡等效 Mohr-Coulomb 参数估算[D]. 西安: 长安大学, 2021.
CHEN P. Estimation of equivalent Mohr-Coulomb parameters of slope based on Hoek-Brown criterion [D]. Xi'an: Chang'an University, 2021. (in Chinese)
- [26] 工程岩体分级标准: GB/T 50218—2014 [S]. 北京: 中国计划出版社, 2015.
Standard for engineering classification of rock mass: GB/T 50218—2014 [S]. Beijing: China Planning Press, 2015. (in Chinese)
- [27] 金俊超, 余成学, 尚朋阳. 基于 Hoek-Brown 准则的应变软化模型有限元数值实现研究[J]. 工程力学, 2020, 37(1): 43-52.
JIN J C, SHE C X, SHANG P Y. A finite element implementation of the strain-softening model based on the hoek-brown criterion [J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(1): 43-52. (in Chinese)
- [28] 吴顺川, 张敏, 张诗淮, 等. 修正 Hoek-Brown 准则的等效 Mohr-Coulomb 强度参数确定方法研究[J]. 岩土力学, 2019, 40(11): 4165-4177.
WU S C, ZHANG M, ZHANG S H, et al. Study on determination method of equivalent Mohr-Coulomb strength parameters of a modified Hoek-Brown failure criterion [J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(11): 4165-4177. (in Chinese)
- [29] 田茂霖. HOEK-BROWN 强度准则的参数取值研究及其工程应用[D]. 山东 青岛: 山东科技大学, 2017.
TIAN M L. Study on parameter selection of HOEK-BROWN strength criterion and its engineering application [D]. Qingdao, Shandong: Shandong University of Science and Technology, 2017. (in Chinese)
- [30] 胡其志, 刘倩, 丁志刚, 等. 基于 Hoek-Brown 准则的强度等效方法对比及应用研究[J]. 隧道建设(中英文), 2021, 41(10): 1662-1671.
HU Q Z, LIU Q, DING Z G, et al. Comparison and application of strength equivalent methods based on Hoek-Brown criterion [J]. Tunnel Construction, 2021, 41(10): 1662-1671. (in Chinese)
- [31] SONG Y H, FENG M, CHEN P. Modified minimum principal stress estimation formula based on Hoek-Brown criterion and equivalent Mohr-Coulomb strength parameters [J]. Scientific Reports, 2023, 13: 6409.
- [32] 刘煜, 崔德山, 杨赫楠, 等. 须弥山石窟5号窟窟檐的地震动力响应模拟[J]. 安全与环境工程, 2022, 29(4):

- 101-109.
- LIU Y, CUI D S, YANG H N, et al. Seismic dynamic response simulation of the eaves of cave No. 5 of Xumishan Grottoes [J]. Safety and Environmental Engineering, 2022, 29(4): 101-109. (in Chinese)
- [33] 候玲, 薛海斌, 周泽华, 等. 基于 ABAQUS 二次开发平台的边坡有限元强度折减法研究[J]. 西安理工大学学报, 2016, 32(4): 449-454, 499.
- HOU L, XUE H B, ZHOU Z H, et al. Research on the strength reduction FEM of the slope by applying the secondary development platform of ABAQUS [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2016, 32(4): 449-454, 499. (in Chinese)
- [34] 尹小涛, 薛海斌, 汤华, 等. 边坡局部和整体稳定性评价方法的辩证统一[J]. 岩土力学, 2018, 39(Sup1): 98-104.
- YIN X T, XUE H B, TANG H, et al. Dialectical unity of slope local and global stability analysis methods [J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(Sup1): 98-104. (in Chinese)
- [35] HUA C Y, YAO L H, SONG C G, et al. Variational method for determining slope instability based on the strength reduction method [J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 2022, 81(10): 395.
- [36] 张鹏, 张绍和, 刘磊磊. 基于物质点强度折减法的二维均质 $c-\varphi$ 边坡稳定性分析图表[J]. 工程地质学报, 2023, 31(2): 596-606.
- ZHANG P, ZHANG S H, LIU L L. Two-dimensional homogeneous $c-\varphi$ slope stability analysis charts based on material point strength reduction method [J]. Journal of Engineering Geology, 2023, 31(2): 596-606. (in Chinese)
- [37] 商兆涛, 姚家李, 夏琴, 等. 基于强度折减理论的深基坑稳定性分析[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2022, 45(9): 1209-1215.
- SHANG Z T, YAO J L, XIA Q, et al. Stability analysis of deep foundation pit based on strength reduction method [J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science), 2022, 45(9): 1209-1215. (in Chinese)
- [38] 建筑地基基础设计规范: GB 50007—2011 [S]. 北京: 中国计划出版社, 2012.
- Code for design of building foundation: GB 50007—2011 [S]. Beijing: China Planning Press, 2012. (in Chinese)

(编辑 胡英奎)