

DOI: 10.11835/j.issn.2096-6717.2023.125



开放科学(资源服务)标识码 OSID:



# 基于 AK-FORM 方法和降维方法的高效时变可靠度分析方法

张亮<sup>1</sup>, 唐亚可<sup>1</sup>, 牛凯<sup>1</sup>, 李昊宇<sup>2</sup>, 余书君<sup>2</sup>

(1. 国网河南省电力公司经济技术研究院, 郑州 450052; 2. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

**摘要:** PHI2 方法是进行结构时变可靠度分析的常用方法, 而跨越率的求解是该方法的关键, 为达到足够精度往往需要计算大量时刻处的跨越率, 然而, 对于具有复杂极限状态面的实际问题, 计算每个时刻的跨越率可能非常耗时。为进一步提高 PHI2 方法的效率, 引入 3 种策略改进跨越率的计算效率:首先, 采用无 Cholesky 分解策略以减少随机变量数目, 并给出与之对应的相关系数计算方法;其次, 引入基于主动学习 Kriging 模型的改进一次可靠度(AK-FORM)方法, 以高效计算各时刻的可靠指标;最后, 利用降维方法将二维积分转化为一维积分, 以改善计算性能。将上述 3 种改进策略与 PHI2 方法相结合, 形成基于 AK-FORM 方法和降维方法的高效时变可靠度分析方法, 即 K-PHI2 方法。与此同时, 仅将无 Cholesky 分解策略与 PHI2 方法结合, 形成 PHI2-方法。数值算例和工程算例计算结果表明:提出的 PHI2-、K-PHI2 方法与 PHI2 方法一样具有高准确性, 在精度上均优于 PHI2+方法(一种基于 PHI2 的改进方法);相较于 PHI2、PHI2+方法, PHI2-方法在效率上有一定提升, 而 K-PHI2 方法在此基础上进一步提高了时变可靠度分析效率。

**关键词:** 时变可靠度; PHI2 方法; 一次可靠度方法; Kriging 模型; 跨越率; 降维方法

中图分类号: TB114.3; TU318 文献标志码: A 文章编号: 2096-6717(2025)03-0162-09

## An efficient time-varying reliability method based on AK-FORM method and dimension reduction method

ZHANG Liang<sup>1</sup>, TANG Yake<sup>1</sup>, NIU Kai<sup>1</sup>, LI Haoyu<sup>2</sup>, YU Shujun<sup>2</sup>

(1. State Grid Henan Economic Research Institute, Zhengzhou 450052, P. R. China; 2. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

**Abstract:** The PHI2 method is commonly used to perform the time-varying structural reliability analysis, with the calculation of outcrossing rate being pivotal to its implementation. Achieving sufficient accuracy is often necessary to calculate the outcrossing rate at a large number of moments. However, for practical problems involving complex limit state surfaces, the calculation of the outcrossing rate at each moment can be very time-consuming. To further improve the efficiency of PHI2 method, three strategies are proposed to be introduced in

收稿日期: 2023-02-28

基金项目: 国网河南经研院生产合作项目(SGHAYJ00SJS2250020)

作者简介: 张亮(1986-), 男, 高级工程师, 主要从事输电线路结构设计研究, E-mail: 550599894@qq.com。

余书君(通信作者), 女, 博士生, E-mail: ysjcqu@163.com。

Received: 2023-02-28

Foundation item: State Grid Henan Economic Research Institute Production Cooperation Project (No. SGHAYJ00SJS2250020)

Author brief: ZHANG Liang (1986-), senior engineer, main research interest: structural design of transmission lines, E-mail: 550599894@qq.com.

YU Shujun (corresponding author), PhD candidate, E-mail: ysjcqu@163.com.

this paper to improve the efficiency of calculating outcrossing rate. Firstly, the strategy without Cholesky decomposition is used to reduce the number of random variables, while the corresponding calculation of correlation coefficients is given. Secondly, the improved first-order reliability method based on the adaptive Kriging model (AK-FORM) is introduced to efficiently calculate the reliability index at each moment. Finally, the two-dimensional integral is converted into a one-dimensional integral by using the dimension reduction method. The three improvement strategies are combined with the PHI2 method, which forms an efficient time-varying reliability analysis method based on the AK-FORM method and the dimension reduction method, i.e., the K-PHI2 method. Meanwhile, only the strategy without Cholesky decomposition is combined with the PHI2 method to form the PHI2- method. The calculation results of numerical and engineering examples demonstrate that the PHI2- and K-PHI2 methods proposed in this paper have the same high accuracy as the PHI2 method, and both are better than the PHI2+ method (an improved method based on PHI2) in terms of accuracy; compared with the PHI2 and PHI2+ methods, the PHI2- method has a little improvement in efficiency, while the K-PHI2 method further greatly improves the efficiency of time-varying reliability analysis on this basis.

**Keywords:** time-dependent reliability; PHI2 method; irst-order reliability method (FORM); Kriging model; outcrossing rate; dimension reduction method

结构可靠度分析旨在通过考虑结构或荷载的随机性确定结构在规定时间内的失效概率。传统的结构可靠度分析<sup>[1-2]</sup>一般认为结构的模型特性与服役环境不随时间而变化。实际上,结构在服役期间的几何形状、材料性能等特性会随时间而退化,所受荷载亦随时间而变化<sup>[3-6]</sup>,对结构进行时变可靠度分析才能评估其真实状态。目前,基于首次超越破坏准则的时变可靠度分析方法主要分为两种<sup>[7-9]</sup>:一种是基于极值的方法,另一种是基于跨越率的方法。

基于极值的方法基本思路是根据极限状态函数极值的概率特征获得失效概率,从而将时变问题转化为时不变问题<sup>[10]</sup>。蒙特卡洛模拟(MCS)方法是一种典型的基于极值的时变可靠度方法,该方法简单且精确,但在实际应用中需消耗大量计算资源<sup>[11]</sup>。为提高对可靠度问题的分析效率,研究者们提出了两种改进思路:一种是对采样方法进行改进,如引入重要性采样方法<sup>[12]</sup>和子集模拟方法<sup>[13]</sup>等,但这种方法在处理小失效概率事件时仍不可避免地需要大量样本以达到较高精度;另一种是近似处理极限状态函数极值的概率分布,如引入概率密度演化方法<sup>[14]</sup>和代理模型方法<sup>[2,15-16]</sup>等。其中,Kriging代理模型因具有同时提供预测点期望和标准差的特性而被广泛应用。考虑到基于一次性抽样的普通Kriging方法无法保证训练样本的有效性,将Kriging模型和高效的主动学习策略相结合的AK类方法<sup>[15-17]</sup>近年成为研究热点。将AK方法与一次可靠度方法(FORM)相结合的AK-FORM方法<sup>[17]</sup>在保证精度的同时有效提高了FORM方法的效率,是一种具有发展前景的可靠度分析方法。

基于跨越率的方法基本思路是基于泊松过程、马尔可夫过程等假设,利用数值积分方法将任意离散时刻极限状态函数的跨越率映射为失效概率。跨越率最早由Rice<sup>[18]</sup>提出,但其概念难以应用于实际。随后,研究者们通过引入首次超越公式求解方法和基于跨越事件发生服从泊松过程假设的解析方法等,拓宽了跨越率模型的应用范围。近年来,PHI2方法<sup>[19]</sup>成为了一种被广泛应用的时变可靠度分析方法,该方法将跨越率的计算转换为并联的静态问题,从而实现了跨越率的高效求解。为达到足够的计算精度,PHI2方法会将时间周期以较小的时间增量进行离散化,即需要计算大量时刻处的跨越率。显然,跨越率的求解效率是影响PHI2方法效率的关键因素,而跨越率的求解主要涉及到相关系数计算、相邻时刻处的可靠指标计算以及二维积分计算。在处理极限状态面很复杂的实际工程问题时,单次跨越率的求解效率有待提高。为提升PHI2方法的效率,研究者们提出了PHI2+<sup>[20]</sup>、EPHI2<sup>[11]</sup>等方法,但这些方法大多仅从某一方面改进了跨越率的计算效率,并且有可能获得不准确的可靠度评估结果。

笔者从3个方面改进PHI2方法,形成一种高效的时变可靠度分析方法。首先,采用无Cholesky分解的策略来减少可靠指标求解过程中的随机变量数目,然后采用基于主动学习Kriging模型的改进一次可靠度(AK-FORM)方法来计算各时刻的可靠指标,再利用降维方法将二维积分转化为一维积分,从而完成跨越率的计算。最后通过数值算例和工程算例验证建议方法的精度和效率。

# 1 时变可靠度分析的 PHI2 方法

## 1.1 PHI2 方法的原理

假设结构时变可靠度问题的极限状态方程为

$$Z(t) = G(X, Y(t), t) \quad (1)$$

式中:  $X = \{X_1, X_2 \dots X_{n-1}\}^T$  为  $n-1$  维随机变量向量;  $Y(t)$  为一维随机过程。

基于跨越事件的方法是计算时变可靠性问题最常用的方法之一, 将时间周期  $[0, t]$  内跨越事件的数量定义为  $N^+(0, t)$ , 结构在时间周期  $[0, t]$  内的累计失效概率可表示为<sup>[19-20]</sup>

$$P_{f,c}(0, t) = P_r(\exists \tau \in [0, t] \{Z(0) \leq 0\} \cup \{N^+(0, t) > 0\}) \quad (2)$$

由式(2)可知,  $P_{f,c}(0, t)$  的上界为<sup>[21]</sup>

$$P_{f,c}(0, t) \leq P_{f,i}(0) + \int_0^t v^+(\tau) d\tau \quad (3)$$

式中:  $P_{f,i}(0)$  表示初始时刻结构的失效概率;  $v^+(\tau)$  为  $\tau$  时刻的跨越率, 可由式(4)计算。

$$v^+(\tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0^+} P_r(\{Z(\tau) \geq 0\} \cap \{Z(\tau + \Delta\tau) \leq 0\}) / \Delta\tau \quad (4)$$

式中:  $\Delta\tau$  为时间增量。

若  $Y(t)$  在  $\tau$  与  $\tau + \Delta\tau$  时刻的截口随机变量分别用  $Y_k^{(1)}$  与  $Y_k^{(2)}$  表示, 两者间的相关系数为

$$\rho(Y_k^{(1)}, Y_k^{(2)}) = \rho_{Y_k}(\tau, \tau + \Delta\tau) \quad (5)$$

若  $Y(t)$  为平稳非高斯随机过程, 则  $Y_k^{(1)}$  与  $Y_k^{(2)}$  均为非高斯变量, 可引入 Nataf 变换将其转换为独立的标准正态变量。为简便, 仅考虑  $Y(t)$  为平稳高斯随机过程的情形, 可先通过线性变换将其转化为均值为 0、标准差为 1 的高斯过程  $\underline{Y}(t)$ 。相应地,  $Y_k^{(1)}$  与  $Y_k^{(2)}$  可表示为相应的标准正态变量  $\underline{Y}_k^{(1)}$  与  $\underline{Y}_k^{(2)}$  的线性函数, 且  $\underline{Y}_k^{(1)}$  与  $\underline{Y}_k^{(2)}$  的相关系数仍为  $\rho_{Y_k}(\tau, \tau + \Delta\tau)$ ; 然后可引入 Cholesky 分解, 将  $\underline{Y}_k^{(1)}$  与  $\underline{Y}_k^{(2)}$  用独立的标准正态变量  $u_1, u_2$  表示, 即

$$\begin{cases} \underline{Y}_k^{(1)} = u_1 \\ \underline{Y}_k^{(2)} = \rho_{Y_k}(\tau, \tau + \Delta\tau) u_1 + \sqrt{1 + \rho_{Y_k}^2(\tau, \tau + \Delta\tau)} u_2 \end{cases} \quad (6)$$

于是, 在标准正态空间中,  $\tau$  时刻的极限状态面可由超平面近似为

$$\alpha(\tau) \mathbf{u}^{(1)} + \beta(\tau) = 0 \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{u}^{(1)} = (u_1, u_2 \dots u_{n+1})$ ;  $\alpha(\tau) = (\alpha_{l,1}, \alpha_{l,2} \dots \alpha_{l,n+1})$ ,  $u_3 \dots u_{n+1}$  分别为随机向量  $X$  转换至标准正态空间后对应的标准正态变量;  $\beta(\tau)$  为  $\tau$  时刻的可靠指标。同理,  $\tau + \Delta\tau$  时刻的极限状态面可近似为

$$\alpha(\tau + \Delta\tau) \mathbf{u}^{(2)} + \beta(\tau + \Delta\tau) = 0 \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{u}^{(2)} = (u_1, u_2, u_3 \dots u_{n+1})$ ,  $\alpha(\tau + \Delta\tau) = (\alpha_{h,1}, \alpha_{h,2}, \alpha_{h,3} \dots \alpha_{h,n+1})$ ;  $\beta(\tau + \Delta\tau)$  为  $\tau + \Delta\tau$  时刻的可靠指标。在 PHI2 方法中<sup>[19]</sup>,  $\tau$  和  $\tau + \Delta\tau$  时刻的线性化功能函数的相关系数为

$$\rho_G(\tau, \tau + \Delta\tau) = -\tilde{\alpha}(\tau) \alpha(\tau + \Delta\tau) \quad (9)$$

式中:  $\alpha \sim (\tau) = (\alpha_{l,1}, 0, \alpha_{l,3} \dots \alpha_{l,n+1})$ 。此时, 跨越率的计算可转换为式(10)所示并联静态问题的求解。

$$v^+(\tau) = \Phi_2[\beta(\tau), -\beta(\tau + \Delta\tau), \rho_G(\tau, \tau + \Delta\tau)] / \Delta\tau \quad (10)$$

式中:  $\beta(\tau)$ 、 $\beta(\tau + \Delta\tau)$ 、 $\rho_G(\tau, \tau + \Delta\tau)$  均可由 FORM 方法求解;  $\Phi_2(\cdot)$  为二维标准正态分布函数, 即

$$\Phi_2[\beta(\tau), -\beta(\tau + \Delta\tau), \rho_G(\tau, \tau + \Delta\tau)] = \int_{-\infty}^{\beta(\tau)} \int_{-\infty}^{-\beta(\tau + \Delta\tau)} \varphi_2[x_1, x_2, \rho_G(\tau, \tau + \Delta\tau)] dx_1 dx_2 \quad (11)$$

式中:  $\varphi_2(\cdot)$  为二维标准正态概率密度函数。

## 1.2 PHI2 方法的计算性能

利用 PHI2 方法进行时变可靠度分析的关键在于跨越率  $v^+(\tau)$  的求解, 主要包括 3 个步骤: 首先, 通过 Cholesky 分解将随机变量  $\underline{Y}_k^{(1)}$  与  $\underline{Y}_k^{(2)}$  独立化, 并推导相关系数  $\rho_G(\tau, \tau + \Delta\tau)$ ; 然后, 利用 FORM 方法计算各时刻的可靠指标; 最后, 利用二维数值积分方法求解  $\Phi_2[\beta(\tau), -\beta(\tau + \Delta\tau), \rho_G(\tau, \tau + \Delta\tau)]$ 。显然, 上述 3 个步骤的计算效率对方法的总效率有着至关重要的影响。

### 1.2.1 Cholesky 分解对计算效率的影响

由式(6)可知, 通过引入 Cholesky 分解,  $\tau + \Delta\tau$  时刻的随机变量  $\underline{Y}_k^{(2)}$  表示为 2 个随机变量的线性组合, 因此, 计算  $\tau + \Delta\tau$  时刻的可靠指标时, 所需考虑的随机变量数目由  $n$  增加至  $n+1$ 。若采用 FORM 方法计算可靠指标, 则每一迭代过程所需计算的梯度值亦增加 1 个; 若采用单边差分法计算梯度值, 相应功能函数的调用次数亦增加 1 次。因此, 采用 Cholesky 分解将随机变量  $\underline{Y}_k^{(1)}$ 、 $\underline{Y}_k^{(2)}$  独立化会导致  $\tau + \Delta\tau$  时刻可靠指标计算的每次迭代都多调用 1 次功能函数, 从而降低可靠指标的求解效率。

不难发现, 若能不增加  $\tau + \Delta\tau$  时刻随机变量的数目, 将有助于提高该时刻可靠指标的计算效率。

### 1.2.2 各时刻可靠指标计算效率的影响

为达到足够的失效概率预测精度, PHI2 方法通常将时间周期以较小的时间增量进行离散化, 因此, 需要计算大量时刻处的跨越率。由式(10)可知, 求解任意时刻的跨越率均涉及到  $\beta(\tau)$  和  $\beta(\tau + \Delta\tau)$  的计算。因此, 若采用 FORM 方法计算各时刻的可靠指标, PHI2 方法将涉及大量 FORM 方法的运行, 显然, FORM 方法的分析效率会在很大程度上影响 PHI2 方法的分析效率。然而, FORM 方法

的每一迭代过程均需通过调用功能函数确定迭代点的功能函数值与梯度值,若能在迭代过程中减少功能函数的调用次数,时变可靠度分析效率将得到极大提高。

### 1.2.3 二维积分的求解

由式(11)可知, $\Phi_2[\beta(\tau), -\beta(\tau+\Delta\tau), \rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)]$ 本质上是二维积分,尽管可采用数值积分求解,但并不特别方便。尤其需要指出的是,PHI2方法中, $\rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)$ 的值较为接近 $-1^{[19]}$ ,此时采用二维数值积分时 $\varphi_2(\cdot)$ 中的大部分积分节点为无效节点<sup>[22]</sup>,导致二维数值积分方法效率较低。

若能避免直接采用二维数值积分求解 $\Phi_2[\beta(\tau), -\beta(\tau+\Delta\tau), \rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)]$ ,将有助于改善时变可靠度分析的性能。

## 2 高效的时变可靠度分析方法

为提高PHI2方法的计算效率,引入3个策略对其进行改进:

1)不引入Cholesky分解将随机变量 $\underline{Y}_k^{(1)}$ 与 $\underline{Y}_k^{(2)}$ 独立化,以避免各个时刻可靠指标计算时随机变量数目的增加。

2)引入基于主动学习Kriging模型的改进一次可靠度方法<sup>[17]</sup>计算各时刻的可靠指标,以提高FORM方法的计算效率。

3)利用降维方法将式(11)中的二维积分转化为一维积分,以简化计算。

### 2.1 无Cholesky分解时相关系数的计算

若不引入Cholesky分解将随机变量 $\underline{Y}_k^{(1)}$ 与 $\underline{Y}_k^{(2)}$ 独立化,即 $\tau$ 时刻与 $\tau+\Delta\tau$ 时刻的 $\underline{Y}_k^{(1)}$ 与 $\underline{Y}_k^{(2)}$ 均为基本随机变量,那么 $\tau$ 时刻与 $\tau+\Delta\tau$ 时刻的功能函数均只涉及 $n$ 个随机变量,这有助于改善 $\beta(\tau+\Delta\tau)$ 的计算效率,但 $\rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)$ 的表达式(9)将不再适用。

综合式(6)、式(7)不难发现, $\tau$ 时刻的近似极限状态面仍可由式(7)表示,但 $\tau+\Delta\tau$ 时刻的近似极限状态面需修改为

$$\alpha(\tau+\Delta\tau) u^{(2)} + \beta(\tau+\Delta\tau) = 0 \quad (12)$$

式中: $\underline{u}^{(2)} = (\underline{Y}_k^{(2)}, u_3 \cdots u_{n+1})$ , $\alpha(\tau+\Delta\tau) = (\underline{a}_{h,1}, \underline{a}_{h,3} \cdots \underline{a}_{h,n+1})$ 。很明显, $\underline{u}^{(2)}$ 中仅包含 $n$ 个随机变量。定义标准正态变量

$$V_L = a_{l,1} \underline{Y}_k^{(1)} + \sum_{i=3}^{n+1} a_{l,i} u_i \quad (13)$$

$$V_H = a_{h,1} \underline{Y}_k^{(2)} + \sum_{i=3}^{n+1} a_{h,i} u_i \quad (14)$$

$V_L$ 与 $V_H$ 间的相关系数为

$$\begin{aligned} \rho_{V_L V_H} &= E(V_L \cdot V_H) = \\ &E \left[ \left( a_{l,1} \underline{Y}_k^{(1)} + \sum_{i=3}^{n+1} a_{l,i} u_i \right) \cdot \left( a_{h,1} \underline{Y}_k^{(2)} + \sum_{i=3}^{n+1} a_{h,i} u_i \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

当 $i \neq j$ 时,有 $E[u_i \cdot u_j] = 0$ 。因此,式(15)可改写为

$$\begin{aligned} \rho_{V_L V_H} &= E \left[ a_{l,1} \underline{Y}_k^{(1)} a_{h,1} \underline{Y}_k^{(2)} + \left( \sum_{i=3}^{n+1} a_{l,i} u_i a_{h,i} u_i \right) \right] = \\ &E \left( a_{l,1} \underline{Y}_k^{(1)} a_{h,1} \underline{Y}_k^{(2)} \right) + E \left( \sum_{i=3}^{n+1} a_{l,i} u_i a_{h,i} u_i \right) = \\ &a_{l,1} a_{h,1} E \left( \underline{Y}_k^{(1)} \underline{Y}_k^{(2)} \right) + \sum_{i=3}^{n+1} a_{l,i} a_{h,i} \end{aligned} \quad (16)$$

由于式(16)中 $E(\underline{Y}_k^{(1)}, \underline{Y}_k^{(2)}) = \rho_{Y_k}(\tau, \tau+\Delta\tau)$ ,式(16)可被进一步化简成

$$\rho_{V_L V_H} = a_{l,1} a_{h,1} \rho_{Y_k}(\tau, \tau+\Delta\tau) + \sum_{i=3}^{n+1} a_{l,i} a_{h,i} \quad (17)$$

由式(7)、式(12)可知, $\rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)$ 为 $\rho_{V_L V_H}$ 的相反数,即

$$\begin{aligned} \rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau) &= \\ &- \left[ a_{l,1} a_{h,1} \rho_{Y_k}(\tau, \tau+\Delta\tau) + \sum_{i=3}^{n+1} a_{l,i} a_{h,i} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

值得指出的是,若将无Cholesky分解的策略直接与PHI2方法相结合,在计算 $\beta(\tau+\Delta\tau)$ 时仅涉及 $n$ 个随机变量,可进一步提高PHI2方法的分析效率,进而形成一个改进的PHI2方法,将此方法记为PHI2<sup>-</sup>方法。

### 2.2 基于主动学习Kriging模型的改进一次可靠度方法

各时刻可靠指标的求解效率对时变可靠度分析的效率十分重要。因此,采用高效的基于主动学习Kriging模型的改进一次可靠度方法(AK-FORM)<sup>[17]</sup>求解 $\beta(\tau)$ 和 $\beta(\tau+\Delta\tau)$ ,以改善各时刻可靠指标的计算效率。

该方法在迭代过程中有两个阶段:全局搜索阶段和局部搜索阶段。若第 $q$ 次迭代点 $\underline{u}^{(q)}$ 与第 $q-1$ 次迭代点 $\underline{u}^{(q-1)}$ 的距离 $\|\underline{u}^{(q)} - \underline{u}^{(q-1)}\|$ 大于等于某一较小的阈值 $c$ (可取 $c=0.1$ ),则属于全局搜索阶段,否则属于局部搜索阶段。在全局搜索阶段沿用已有FORM方法迭代至 $\|\underline{u}^{(q)} - \underline{u}^{(q-1)}\| < 0.1$ 。在局部搜索阶段,首先以全局搜索阶段的迭代点和计算梯度值所用差分点为初始训练点 $\{\underline{u}^{(1)}, \underline{u}^{(2)} \cdots \underline{u}^{(M)}\}$ ( $M$ 为初始样本点数)建立初始Kriging模型,然后根据Kriging模型在后续迭代点处的预测精确性自适应地更新模型。假设第 $l$ 次更新的Kriging模型为 $\tilde{h}^{(l)}(\underline{U})$ ,由

$\tilde{h}^{(l)}(\mathbf{U})$ 确定的迭代点记作 $\mathbf{u}^{(M+l)}$ 。该迭代点的预测精度可由 $S(\mathbf{u}^{(M+l)})$ 衡量。

$$S(\mathbf{u}^{(M+l)}) = \tilde{h}(\mathbf{u}^{(M+l)}) / \tilde{s}(\mathbf{u}^{(M+l)}) \quad (19)$$

式中: $\tilde{h}(\mathbf{u}^{(M+l)})$ 和 $\tilde{s}(\mathbf{u}^{(M+l)})$ 分别为 $\mathbf{u}^{(M+l)}$ 对应的预测值和标准差。由Kriging模型的高斯特性可知, $S(\mathbf{u}^{(M+l)}) \geq 50$ 时, $\mathbf{u}^{(M+l)}$ 对应的预测响应 $\underline{z}^{(M+l)}$ 的误差小于6%的概率大于99.7%,说明 $\underline{z}^{(M+l)}$ 具有较高预测精度,不需要更新 $\tilde{h}^{(l)}(\mathbf{U})$ 。反之,需要将 $\mathbf{u}^{(M+l)}$ 加入训练点集 $\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)} \dots \mathbf{u}^{(M+l+1)}\}$ ,并结合该点真实的响应 $z^{(k+l)}$ 更新 $\tilde{h}^{(l)}(\mathbf{U})$ ,即

$$\begin{cases} \tilde{h}^{(l+1)}(\mathbf{U}) = \tilde{h}^{(l)}(\mathbf{U}), & S(\mathbf{u}^{(M+l)}) \geq 50 \\ \tilde{h}^{(l+1)}(\mathbf{U}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{U}) \mathbf{P}^{(l+1)} + \mathbf{m}(\mathbf{U})^{(l+1)}, & S(\mathbf{u}^{(M+l)}) < 50 \end{cases}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_2[\beta(\tau), -\beta(\tau+\Delta\tau), \rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)] = \\ & \Phi_2(\beta(\tau), -\beta(\tau+\Delta\tau), 0) + \int_0^{\rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)} \frac{\partial \Phi_2(\beta(\tau), -\beta(\tau+\Delta\tau), \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=y} dy = \\ & \varphi_2(\beta(\tau), -\beta(\tau+\Delta\tau), y) dy \end{aligned} \quad (21)$$

式中: $\Phi(\cdot)$ 表示一维标准正态分布函数。将式(21)代入式(10),此时仅用一维数值积分方法即可求解 $\tau$ 时刻的跨越率,相较于二维积分的求解更加简单高效,并且解决了 $\rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)$ 取值接近-1所导致的积分节点利用率低的问题,从而进一步提升了PHI2方法的时变可靠度分析效率。需要指出的是,体系可靠度分析研究中,针对 $\Phi_2[\beta(\tau), -\beta(\tau+\Delta\tau), \rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)]$ 给出了一些简化的近似计算方法<sup>[24-26]</sup>,尽管由于不涉及积分而计算简单,但其适用范围与精度往往受到一定影响。

## 2.4 时变可靠度分析及步骤

将上述3个策略与PHI2方法相结合,即形成了建议的基于AK-FORM方法和降维方法的高效时变可靠度分析方法,简记为K-PHI2方法。该方法流程图见图1,其主要步骤包括

1)将时间段 $[0, t]$ 以 $dt$ 为间隔进行离散,并确定时间增量 $\Delta\tau$ ,使得 $\rho_{Yk}(\tau, \tau+\Delta\tau)$ 的取值位于[0.990, 0.995]之间。

2)利用AK-FORM方法计算 $\tau$ 和 $\tau+\Delta\tau$ 时刻的可靠指标 $\beta(\tau)$ 、 $\beta(\tau+\Delta\tau)$ 和灵敏度系数 $\alpha(\tau)$ 、 $\alpha(\tau+\Delta\tau)$ 。

3)参考无Cholesky分解策略,由式(18)计算 $\tau$ 和 $\tau+\Delta\tau$ 时刻间的极限状态面相关系数 $\rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)$ 。

4)将步骤2)和3)中得到的 $\beta(\tau)$ 、 $\beta(\tau+\Delta\tau)$ 和 $\rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)$ 代入式(21),然后利用一维数值积分方法求解 $\Phi_2[\beta(\tau), -\beta(\tau+\Delta\tau), \rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)]$ 。

式中: $f(\mathbf{U})$ 为多项式基函数; $\mathbf{P}^{(l+1)}$ 、 $\mathbf{m}(\mathbf{U})^{(l+1)}$ 分别为利用训练点 $\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)} \dots \mathbf{u}^{(M+l)}\}$ 及其真实的响应建立的回归系数向量和方差为 $\sigma^2$ 的零均值高斯过程。在局部搜索阶段的每一迭代过程中,均采用更新的Kriging模型式(20)代替功能函数进行计算。正是由于在局部搜索阶段引入了自适应的更新Kriging模型,AK-FORM方法通常较常规的FORM方法具有更高的计算效率。AK-FORM方法的流程图见文献[17]。

## 2.3 二维标准正态分布函数的降维积分计算方法

为避免直接采用二维数值积分求解 $\Phi_2[\beta(\tau), -\beta(\tau+\Delta\tau), \rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)]$ ,引入降维方法<sup>[23]</sup>将二维积分简化为一维积分,即

5)将 $\Phi_2[\beta(\tau), -\beta(\tau+\Delta\tau), \rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)]$ 代入式(10),确定 $\tau$ 时刻的跨越率 $v^+(\tau)$ 。

6)不断重复步骤2)~5)计算新时间 $\tau+dt$ 的跨越率,直至得到所有时刻的跨越率。

7)由式(3)计算失效概率 $P_{f,c}(0, t)$ 。

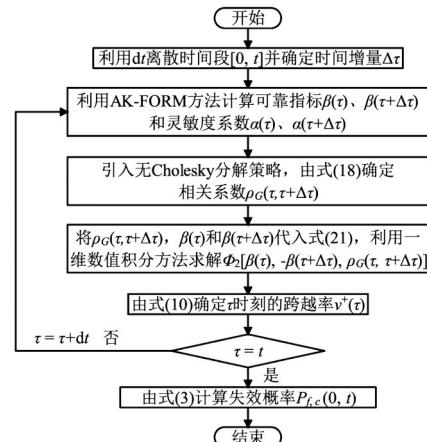


图1 K-PHI2方法流程图

Fig. 1 K-PHI2 method flowchart

## 3 算例分析

首先通过一个设计的简单数值算例说明K-PHI2方法的计算流程,然后用一个经典的具有显式表达式的工程算例对比各方法的计算性能,最后将验证后的应用到了涉及有限元分析的工程算例中,进而表明K-PHI2对于各种时变可靠度问题的适用性。各方法的效率以功能函数调用次数 $N$ 来评估,精度由可靠指标的相对误差 $\epsilon r_\beta$ 来评估,即

$$\varepsilon r_{\beta} = \left( \left| \beta_{\text{mcs}} - \beta \right| / \beta_{\text{mcs}} \right) \times 100\% \quad (22)$$

式中: $\beta_{\text{mcs}}$ 为MCS方法的可靠指标计算结果; $\beta$ 为其余方法(即PHI2方法<sup>[19]</sup>、PHI2-方法、PHI2+方法<sup>[20]</sup>以及K-PHI2方法)的可靠指标计算结果。其中,PHI2+方法基于有限差分法对PHI2方法进行了改进,其跨越率表达式为

$$v_p^+(\tau) = \Psi \left[ (\beta(\tau + \Delta\tau) - \beta(\tau)) / A \right] \varphi(\beta(\tau)) A / \Delta\tau \quad (23)$$

式中: $A = \| \alpha(\tau + \Delta\tau) - \alpha(\tau) \|$ ;  $\Psi(x) = \varphi(x) - x\Phi(x)$ ;  $\varphi(\cdot)$ 为一维标准正态概率密度函数。

### 3.1 算例1:数值算例

考察由文献[17]修改而来的功能函数

$$G(X, Y(t), t) = (1 - rt)R - G - Q(t) \quad (24)$$

式中:退化系数 $r=0.009$ ;随机变量向量 $X=\{R, G\}$ , $R$ 和 $G$ 分别为构件的初始抗力和永久荷载效应,各随机变量相互独立,其概率信息见表1;  $Y(t)$ 为高斯过程,在此为时变的可变荷载效应 $Q(t)$ ,其间隔时间为 $\Delta\tau$ 的两截口随机变量间的相关系数为

$$\rho_{Y_k}(\tau, \tau + \Delta\tau) = \exp \left( -(\Delta\tau/\lambda)^2 \right) \quad (25)$$

式中: $\lambda$ 为相关长度,取 $\lambda=1/12$  a,时间间隔 $\Delta\tau=0.1\lambda$ ,此时 $\rho_{Y_k}(\tau, \tau + \Delta\tau)=0.99$ 。各随机变量和随机过程的统计信息见表1。

表1 算例1中随机变量和随机过程统计信息

Table 1 Statistical information of random variables and processes for Example 1

参数	分布	均值	标准差
$R$	正态	5.3	0.371
$G$	对数正态	30.92	5.26
$Q(t)$	高斯过程	7	2.03

该算例对构件5 a内的时变可靠度进行评估,时间段[0, 5]被均匀分成125个区间。由于引入了无Cholesky分解策略,K-PHI2方法每个时刻的跨越率计算仅涉及3个随机变量。以 $\tau=1$ 时的跨越率 $v^+(1)$ 的求解为例,简要说明K-PHI2方法的计算流程:首先,利用AK-FORM方法计算可靠指标 $\beta(1)=4.1371$ 、 $\beta(1+\Delta\tau)=4.1367$ 和灵敏度系数 $\alpha(1)=(-0.8158415, 0.1039628, 0.5688535)$ 、 $\alpha(1+\Delta\tau)=(-0.8158360, 0.1039643, 0.5688611)$ ,这一过程仅需调用36次功能函数。相比较而言,PHI2-方法计算可靠指标和灵敏度系数也仅涉及3个随机变量,但由于采用了传统FORM方法,其功能函数调用次数为88。由于需要Cholesky分解,PHI2方法计算可靠指标和灵敏度系数会涉及4个随机变量。此外,PHI2方法还采用传统FORM方

法,其功能函数调用次数为99。然后,K-PHI2方法直接由式(18)得到 $\tau$ 和 $\tau+\Delta\tau$ 时刻的极限状态面相关系数 $\rho_G(1, 1+\Delta\tau)=-0.9967801$ 。接下来,将 $\beta(1)$ 、 $\beta(1+\Delta\tau)$ 与 $\rho_G(1, 1+\Delta\tau)$ 带入由降维策略得到的式(21),即可直接利用一维数值积分方法求解 $\Phi_2[\beta(1), -\beta(1+\Delta\tau), \rho_G(1, 1+\Delta\tau)] = 2.4577 \times 10^{-6}$ 。最后,将求解结果代入式(10)即得到 $\tau$ 时刻的跨越率 $v^+(1)=1.2280 \times 10^{-5}$ 。显然,K-PHI2在3个方面对PHI2方法进行了改进,各方法的计算结果见表2和图2、图3。

表2 算例1的可靠指标计算结果

Table 2 Computed reliability index results for example 1

方法	$N$	$P_f/10^{-3}$	$\beta$	$\varepsilon r_{\beta} / \%$
MCS	$126 \times 10^6$	3.300	2.7159	-
PHI2	12375	2.500	2.8063	3.270
PHI2-	11000	2.500	2.8063	3.270
PHI2+	12375	312.1	0.4899	>50
K-PHI2	4590	2.500	2.8063	3.270

注: $P_f$ 和 $\beta$ 分别为各方法的失效概率和可靠指标计算结果。

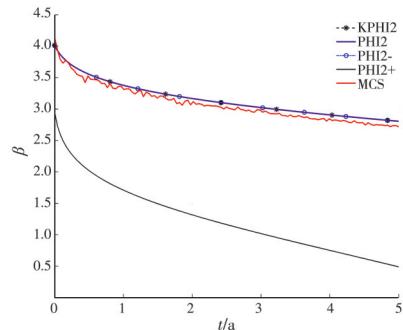


图2 算例1的时变可靠指标

Fig. 2 Time-varying reliability index for example 1

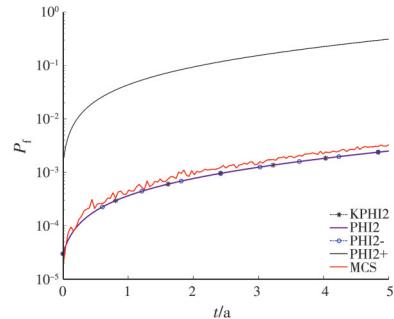


图3 算例1的时变失效概率

Fig. 3 Time-varying failure probability for example 1

表2记录了各方法计算出的第5年时结构的失效概率以及总的功能函数调用次数。图2、图3分别展示了各方法计算出的5 a内结构的时变可靠指标和失效概率。由图可知,PHI2+方法精度较差,而提出的PHI2-、K-PHI2方法与PHI2方法精度相当,这与表1中的结果相吻合,表明PHI2-、K-PHI2方法与PHI2方法一样具有良好精度。此外,相较于

PHI2 方法,由于不引入 Cholesky 分解,PHI2-方法减少了  $\tau + \Delta\tau$  时刻的基本随机变量数目,功能函数的调用次数就由 12 375 次减少为 11 000 次,说明建议的不引入 Cholesky 分解策略有助于提升可靠度分析效率。而在 PHI2-方法的基础上,K-PHI2 方法采用更高效的 AK-FORM 方法代替 FORM 方法计算  $\beta(\tau)$  和  $\beta(\tau + \Delta\tau)$ ,从而使功能函数调用次数由 11 000 次降低至 4 590 次,说明 K-PHI2 方法能进一步提升可靠度分析效率。需要指出的是,上述各方法的效率均高于 MCS 方法。综上所述,PHI2-方法在一定程度上提高了 PHI2 方法的效率,K-PHI2 方法在其基础上做出进一步改善,在保证精度的同时极大地提高了时变可靠度分析效率。

### 3.2 算例 2: 工程算例 1—显式表达式算例

考察如图 4 所示的矩形截面简支腐蚀梁的可靠度问题<sup>[11,19-20]</sup>,功能函数为

$$G(X, Y(t), t) = a(t)b^2(t)\sigma_y/4 - (F(t)L/4 + c a_0 b_0 L^2/8) \quad (26)$$

$$a(t) = a_0 - 2rt; b(t) = b_0 - 2rt \quad (27)$$

式中: $X = \{\sigma_y, a_0, b_0\}$ ,  $\sigma_y, a_0, b_0$  分别为材料屈服应力、初始梁宽和梁长,各随机变量相互独立,其概率信息见表 3;  $Y(t)$  为高斯过程,在此为时变的竖向集中荷载  $F(t)$ ,其相关长度和时间间隔同算例 1。 $L=5$  m 为梁的跨长; $c=78.5$  kN/m<sup>3</sup> 为钢密度; $r=0.03$  mm/a 为腐蚀速率。

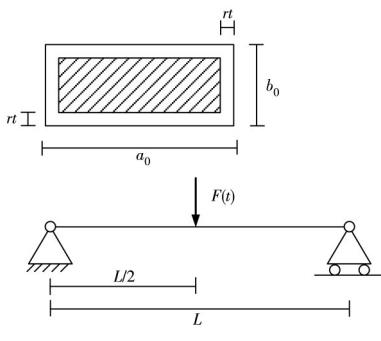


图 4 简支腐蚀钢梁

Fig. 4 A simply supported corroded steel beam

表 3 算例 2 中随机变量和随机过程统计信息

Table 3 Statistical information of random variables and processes for Example 2

参数	分布	均值	标准差
$\sigma_y/\text{MPa}$	对数正态	240	24
$a_0/\text{m}$	对数正态	0.2	0.01
$b_0/\text{m}$	对数正态	0.04	0.004
$F(t)/\text{N}$	高斯过程	3 500	700

表 4 统计了各方法对该算例的计算结果,图 5、图 6 为各方法所得可靠指标和失效概率。结果表明,PHI2+方法精度欠佳;其余方法与 MCS 方法之间的可靠指标相对误差均在 5% 以内。其中,PHI2 方法总共需要调用 68 150 次功能函数,而 PHI2-方法和 K-PHI2 方法分别仅需调用 61 955 次和 23 391 次功能函数。说明在保证精度的前提下,PHI2-方法的效率稍高于 PHI2 方法和 PHI2+方法,而 K-PHI2 方法的效率远高于其他各方法。实际工程中存在许多与此算例类似的问题,而建议方法适用于分析此类问题,且相较于 PHI2 方法和 PHI2+方法性能更优,能高效准确地对结构可靠度进行分析。

表 4 算例 2 的可靠指标计算结果

Table 4 Computed reliability index results for example 2

方法	N	$P_f/10^{-3}$	$\beta$	$\epsilon r_\beta/\%$
MCS	$126 \times 10^6$	3.487	2.698	-
PHI2	68 150	2.317	2.8315	4.944
PHI2-	61 955	2.317	2.8315	4.944
PHI2+	68 150	290.1	0.5533	20.502
K-PHI2	23 391	2.317	2.8315	4.944

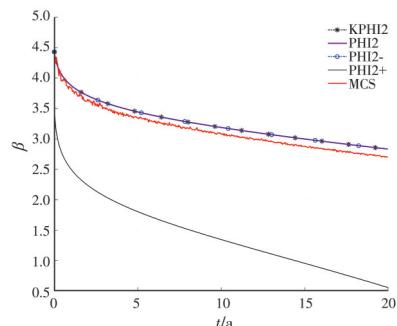


图 5 算例 2 的时变可靠指标

Fig. 5 Time-varying reliability index for example 2

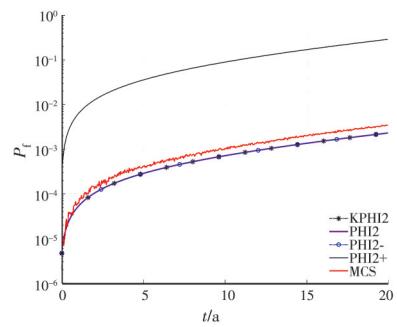


图 6 算例 2 的时变失效概率

Fig. 6 Time-varying failure probability for example 2

### 3.3 算例 3: 工程算例 2—有限元算例

图 7 所示桁架结构<sup>[27]</sup>的时变可靠度对应的功能函数为

$$G(X, Y(t), t) = s_0 - s(P(t), A, E(t)) \quad (28)$$

式中: $X=\{A, E_0\}$ ,  $A, E_0$  分别为杆的横截面积和弹性

模量初始值,各随机变量相互独立,其概率信息见表5;  $Y(t)$ 为高斯过程,在此为时变的竖向集中荷载  $P(t)$ ,其相关长度和时间间隔同算例1。 $s(P, A, E(t))$ 为节点O处的挠度  $V$ ,由有限元分析计算得出,其中, $E(t)=(1-rt)E_0$ , $r=0.005$ 为退化系数; $s_0$ 为  $s(P, A, E(t))$ 的阈值,取0.105 m。

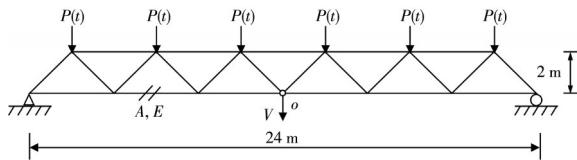


图7 桁架结构

Fig. 7 The truss structure

表5 桁架结构的分布信息

Table 5 Distribution information of the truss structure

变量	分布	均值	标准差
$P(t)/N$	高斯过程	$5 \times 10^4$	$7.5 \times 10^3$
$A/m^2$	对数正态	$2 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-4}$
$E_0/Pa$	对数正态	$2.1 \times 10^{11}$	$2.1 \times 10^{10}$

表6、图8和图9中给出了各方法的计算结果。由于PHI2+会出现相对误差 $>100\%$ 的情况,图表中仅列出了PHI2、PHI2-和K-PHI2方法的计算结果。结果表明,K-PHI2方法仅需调用5 016次功能函数就能达到与PHI2相当的精度,相较于其他各方法效率更高。尽管此算例的功能函数为隐式函数且其响应涉及有限元求解,但计算结果表明,K-PHI2方法仍然具有较好的计算性能,反映了其处理实际工程问题的适用性。

表6 算例3的可靠指标计算结果

Table 6 Computed reliability index results for example 3

方法	N	$P_f/10^{-2}$	$\beta$
PHI2	9 315	1.910	2.079 2
PHI2-	7 064	1.880	2.071 7
K-PHI2	5 016	1.910	2.079 2

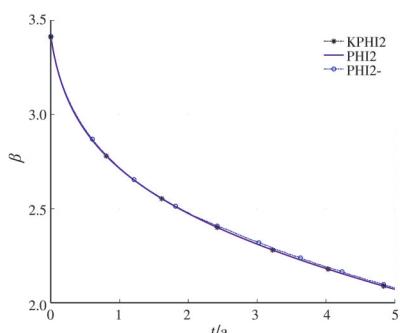


图8 算例3的时变可靠指标

Fig. 8 Time-varying reliability index for example 3

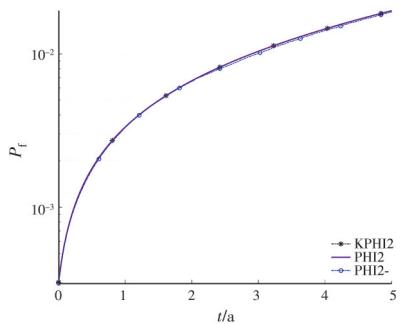


图9 算例3的时变失效概率

Fig. 9 Time-varying failure probability for example 3

## 4 结论

从3个方面改善各时刻跨越率的计算效率,从而形成一种高效的时变可靠度分析方法(K-PHI2方法),得到如下结论:

1) PHI2-方法能在一定程度上提高PHI2方法的效率,即不引入Cholesky分解将随机变量  $\underline{Y}_k^{(1)}$ 与  $\underline{Y}_k^{(2)}$ 独立化,能避免  $\tau+\Delta\tau$ 时刻随机变量数目的增多,从而在一定程度上提高时变可靠度分析效率。

2) 引入AK-FORM方法计算  $\tau$  和  $\tau+\Delta\tau$  时刻的可靠指标  $\beta(\tau)$ 、 $\beta(\tau+\Delta\tau)$  和灵敏度系数  $\alpha(\tau)$ 、 $\alpha(\tau+\Delta\tau)$ , 明显减少了这一过程中功能函数的调用次数;此外,引入降维方法将  $\Phi_2[\beta(\tau), -\beta(\tau+\Delta\tau), \rho_G(\tau, \tau+\Delta\tau)]$  的求解简化为一维积分问题,进一步提高了时变可靠度分析效率。

3) 算例结果表明,提出的K-PHI2方法同时适用于数值算例和工程算例,在保证精确度的情况下,其效率明显高于PHI2方法、PHI2-方法和PHI2+方法。

## 参考文献

- [1] YANG M D, ZHANG D Q, HAN X. New efficient and robust method for structural reliability analysis and its application in reliability-based design optimization [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 366: 113018.
- [2] 范文亮, 刘丞, 李正良. 基于HLRF法与修正对称秩1方法的改进可靠度方法[J]. 工程力学, 2022, 39(9): 1-9. FAN W L, LIU C, LI Z L. Improved reliability method based on HLRF and modified symmetric rank 1 method [J]. Engineering Mechanics, 2022, 39(9): 1-9. (in Chinese)
- [3] JIANG C, WEI X P, WU B, et al. An improved TRPD method for time-variant reliability analysis [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018, 58(5): 1935-1946.
- [4] ZAFAR T, WANG Z L. An efficient method for time-dependent reliability prediction using domain adaptation [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 62(5): 2323-2340.
- [5] JIANG C, HU Z, LIU Y X, et al. A sequential calibration

- and validation framework for model uncertainty quantification and reduction [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 368: 113172.
- [6] WU J H, ZHANG D Q, JIANG C, et al. On reliability analysis method through rotational sparse grid nodes [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 147: 107106.
- [7] HAWCHAR L, EL SOUEIDY C P, SCHOEFS F. Principal component analysis and polynomial chaos expansion for time-variant reliability problems [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2017, 167: 406-416.
- [8] YU S, ZHANG Y W, LI Y, et al. Time-variant reliability analysis via approximation of the first-crossing PDF [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 62(5): 2653-2667.
- [9] 唐和生, 郭雪媛, 薛松涛. 基于广义子集模拟和自适应 Kriging 模型的非线性随机动力系统的时变可靠性分析 [J]. 振动与冲击, 2021, 40(21): 47-54.  
TANG H S, GUO X Y, XUE S T. Time-varying reliability analysis of nonlinear stochastic dynamic systems based on generalized subset simulation and adaptive Kriging model [J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40 (21): 47-54. (in Chinese)
- [10] HU Z, DU X P. A sampling approach to extreme value distribution for time-dependent reliability analysis [J]. Journal of Mechanical Design, 2013, 135(7): 071003.
- [11] LI X W, ZHAO Y G, ZHANG X Y, et al. Explicit model of outcrossing rate for time-variant reliability [J]. ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering, 2022, 8(1): 04021087.
- [12] 罗立胜, 陈志华. 锈蚀钢构件时变可靠度的重要抽样法研究[J]. 工业建筑, 2019, 49(8): 1-5, 107.  
LUO L S, CHEN Z H. Time-dependent reliability analysis of corroded steel members based on the important sampling method [J]. Industrial Construction, 2019, 49 (8): 1-5, 107. (in Chinese)
- [13] WANG D P, QIU H B, GAO L, et al. A single-loop Kriging coupled with subset simulation for time-dependent reliability analysis [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2021, 216: 107931.
- [14] 王思文, 王宪杰, 胡彪, 等. 基于概率密度演化理论的 LRB 隔震支座时变可靠度研究[J]. 计算力学学报, 2020, 37(6): 776-782.  
WANG S W, WANG X J, HU B, et al. Study on time-varying reliability of LRB isolated bearings based on probability density evolution method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2020, 37(6): 776-782. (in Chinese)
- [15] WANG Y J, PAN H, SHI Y N, et al. A new active-learning estimation method for the failure probability of structural reliability based on Kriging model and simple penalty function [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 410: 116035.
- [16] HONG L X, SHANG B, LI S Z, et al. Portfolio alloca-
- tion strategy for active learning Kriging-based structural reliability analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 412: 116066.
- [17] 刘丞, 范文亮, 余书君, 等. 基于主动学习 Kriging 模型的改进一次可靠度方法 [J]. 工程力学, 2024, 41(2): 35-42.
- LIU C, FAN W L, YU S J, et al. Improved first order reliability method based on adaptive kriging model online first [J]. Engineering Mechanics, 2024, 41(2): 35-42. (in Chinese)
- [18] RICE S O. Mathematical analysis of random noise [J]. The Bell System Technical Journal, 1944, 23(3): 282-332.
- [19] ANDRIEU-RENAUD C, SUDRET B, LEMAIRE M. The PHL<sub>2</sub> method: A way to compute time-variant reliability [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 84(1): 75-86.
- [20] SUDRET B. Analytical derivation of the outcrossing rate in time-variant reliability problems [J]. Structure and Infrastructure Engineering, 2008, 4(5): 353-362.
- [21] SHINOZUKA M. Probability of structural failure under random loading [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1964, 90(5): 147-170.
- [22] 范文亮, 杨朋超, 李正良. 基于 Mehler 公式的等效相关系数求解技术[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2016, 44(6): 838-844.  
FAN W L, YANG P C, LI Z L. A technique for solution of equivalent correlation coefficients based on the Mehler's formula [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2016, 44(6): 838-844. (in Chinese)
- [23] 贡金鑫, 赵国藩. 二维正态分布函数值的一个近似算法 [J]. 计算结构力学及其应用, 1996, 13(4): 494-499.  
GONG J X, ZHAO G F. An approximate algorithm for bivariate normal integral [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1996, 13(4): 494-499. (in Chinese)
- [24] FENG Y S. A method for computing structural system reliability with high accuracy [J]. Computers & Structures, 1989, 33(1): 1-5.
- [25] 董聪, 鄢正能. 结构系统可靠性精确计算理论[J]. 强度与环境, 1995, 22(3): 46-51.  
DONG C, LI Z N. An exact evaluation theory of structural system reliability [J]. Structure & Environment Engineering, 1995, 22(3): 46-51. (in Chinese)
- [26] 姚继涛, 赵国藩, 浦聿修. 二维标准正态联合概率的计算 [J]. 建筑结构学报, 1996, 17(4): 10-19.  
YAO J T, ZHAO G F, PU Y X. Calculation of joint probability of two-dimensional standard normal [J]. Journal of Building Structures, 1996, 17(4): 10-19. (in Chinese)
- [27] SUN Z L, WANG J, LI R, et al. LIF: A new Kriging based learning function and its application to structural reliability analysis [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2017, 157: 152-165.