

DOI: 10.11835/j.issn.2096-6717.2024.031



开放科学(资源服务)标识码 OSID:



针对极端事件估计的高斯主动学习算法

杨海婷^{1a}, 尹炜浩^{1a}, 黄滢雯^{1a}, 杨成^{1b}, 胡瑞青²

(1. 西南交通大学 a. 土木工程学院; b. 陆地交通地质灾害防治技术国家工程研究中心, 成都 610031; 2. 中铁第一勘察设计院集团有限公司, 西安 710043)

摘要: 一些重大关键结构在服役期间会面临极端事件, 由于极端事件发生的概率极低而可能被忽视, 但如果发生将会导致严重损失。为了准确估计复杂结构的极小失效概率, 提出一个能平衡极端事件发生概率计算精度和成本的方法。通过基于高斯代理模型的主动学习策略, 构建能将训练点有效集中在单侧尾部的搜索函数, 该函数更善于寻找分布函数加权后的误差最大区域, 并重新投入新增训练点。为了验证算法的有效性, 以结构开裂非线性分析为算例, 将算法结果与 MCS 进行比较, 估计的随机变量均值相对误差在 10% 左右, 表明该方法能得到可接受的统计量结果; 与 AL-GP 的结果进行对比, 估计的随机变量误差期望降低了 20%, 表明在尾部的不确定性能更快降低。通过算例证明了算法对尾部的敏感性更高, 适用于有潜在尾部风险的分布计算。

关键词: 高斯代理模型; 可靠性; 主动学习; 极端事件

中图分类号: TU311.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 2096-6717(2025)04-0148-09

Gaussian active learning algorithm for extreme event estimation

YANG Haiting^{1a}, YIN Weihao^{1a}, HUANG Yanwen^{1a}, YANG Cheng^{1b}, HU Ruiqing²

(1a. School of Civil Engineering; 1b. Land Traffic Geological Disaster Prevention Technology National Engineering Research Center, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P. R. China; 2. China Railway First Survey and Design Institute Group Co., Ltd., Xi'an 710043, P. R. China)

Abstract: Some major key structures will face extreme events during their service life, which may be ignored due to their extremely low probability, but will result in serious losses if they occur. In order to accurately estimate the minimum probability of failure of complex structures, this paper presents a method that can balance the accuracy and cost of calculating the probability of extreme events. Using an active learning strategy based on a Gaussian surrogate metamodel, a search function is constructed that can effectively concentrate the training points on one side of the tail, and the function is better at finding the maximum error region weighted by the distribution function and re-investing the new training points. To verify the effectiveness of the algorithm, the nonlinear analysis of a structural crack is taken as an example. The relative error of the proposed algorithm is

收稿日期: 2024-03-07

基金项目: 国家重点研发计划(2019YFD1101005, 2019YFD1101001, 2021YFB2600501); 四川省自然科学基金(2022NSFSC0458); 中铁第一勘察设计院集团有限公司科研开发项目(院科 20-53、院科 20-21、CR2321718)

作者简介: 杨海婷(2000-), 女, 主要从事工程结构可靠度研究, E-mail: 1304173992@qq.com。

杨成(通信作者), 男, 副教授, 博士生导师, E-mail: yangcheng@swjtu.edu.cn。

Received: 2024-03-07

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (Nos. 2019YFD1101005, 2019YFD1101001, 2021YFB2600501); Sichuan Natural Science Foundation (No. 2022NSFSC0458); Research and Development Project of China Railway First Survey and Design Institute Group Co., Ltd. (Nos. Academy 20-53, Academy 20-21, CR2321718)

Author brief: YANG Haiting (2000-), main research interest: reliability of engineering structure, E-mail: 1304173992@qq.com.

YANG Cheng (corresponding author), associate professor, doctoral supervisor, E-mail: yangcheng@swjtu.edu.cn.

about 10% compared to MCS. The mean relative error of the estimated random variables is about 10%, indicating that this method can obtain acceptable statistical results. Compared to the results of AL-GP, the error expectation of the estimated random variables is reduced by 20%, indicating that the uncertainty in the tail can be reduced faster. The example proves that the algorithm is more sensitive to the tail and is suitable for the distribution calculation with potential tail risk.

Keywords: Gaussian surrogate model; reliability; active learning; extreme events

大型、复杂、关键的工程结构往往需要具备较高的可靠性,虽然这些结构都经历了规范可靠性设计,结构失效概率已经被控制在较小范围内,但在全寿命服役期内,仍然可能遭遇极为罕见的外部环境影响,例如,远超最大设计重现期的地震、极端气候灾害、非法超载或意外撞击、爆炸等^[1-3]。这些极端外部环境导致的小概率危险事件,可能产生巨大的直接或间接损失,对大型基础设施的运营往往影响深远^[4-5]。对于大型复杂基础设施系统中的关键组件,破坏可能影响其他相关组件的功能,进而产生灾害或故障的级联效应,显著增大后续损失的系统风险^[6];大型城市的能源、卫生、交通枢纽破坏可能导致更多的人员损失或基础设施功能损失。因此,有必要充分估计这类发生概率较小的意外事故引发的工程风险,而能否准确测度极端事件发生的极小概率是解决问题的关键。目前常用的计算方法有:蒙特卡罗模拟(Monte Carlo Simulation, MCS)、一阶可靠性方法(FORM)和二阶可靠性方法(SORM)等分析方法。但大型工程结构往往因构件数量较多,结构行为的非线性演化特征更为复杂,其随机响应具有高维特征。遭遇复杂结构的深度非线性计算时,MCS高昂的计算成本导致其工程应用有限;而对非线性较弱问题来说,FORM和SORM在其渐近区域可能是求解的有效方法,但对于强非线性问题,效果差强人意^[7]。因此,有必要提出一种既能降低计算成本,又能适用于强非线性问题的分析方法。

基于代理模型的随机模拟法日益受到关注^[8]。通常将近似原始模型但又更为简单的模型称为代理模型。其在降低计算成本的同时,在计算高度非线性结构随机响应方面也呈现出良好的效果^[9]。常见的代理模型有:多项式响应面^[10]、神经网络^[11-12]、支持向量机^[13-14]、高斯过程(Gaussian Process, GP)^[15]等。由于适用于小样本学习,又能对观测值插值和预测局部方差做准确性判断,近年来,GP得到了广泛应用。Lindgren^[16]应用概率方法深入研究了多维高斯过程在可靠性分析中的应用,为后续高斯过程在可靠性领域的应用奠定了坚实的基础。

单纯的GP模型可能没有考虑到试验误差、固定噪声等不确定性,与主动学习相结合能够有效改

善这些不确定性带来的影响^[17]。Cohn等^[18]将主动学习融入高斯过程选择训练数据,很大程度上减少了用于学习的样本数量。杜蓓^[19]通过主动学习结合高斯过程构建了一种非试验标记样本挑选算法。这些研究为后续使用主动学习和高斯过程解决可靠性分析问题奠定了重要基础。

基于主动学习的高斯主动过程算法(active learning-based Gaussian process, AL-GP)不仅能同时估计累积或互补累积分布函数(cumulative or complementary cumulative distribution function, CDF/CCDF),而且对分布全局有更高的求解效率和精度^[20]。但AL-GP无法针对性地在概率分布的单侧尾部区域投放训练点,而在工程中极端事件导致结构失效往往发生在单侧尾部区域。AL-GP虽能求解灾难风险的分布,但求解单侧尾部的精度与效率仍待提高。笔者提出一套仅对单侧尾部求解的方法TS-GL(tail-sensitive global learning, TS-GL),通过基于主动学习的高斯过程元建模策略,构建能将训练点有效集中在单侧尾部的搜索函数,该函数更善于主动寻找分布函数误差最大区域,并在此投入新增训练点。

1 算法介绍

将结构的最大裂缝宽度作为输出指标,估计对应分布的CDF/CCDF后,使用TS-GL算法对小概率事件进行精确估计。因适用于训练不同的数据分布、进行不确定性估计等优点,高斯过程代理模型成为常用的模型之一。

1.1 CDF/CCDF的计算

Y 的累计分布函数(CDF)可以按式(1)计算。

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(G(x) \leq y) \quad (1)$$

式中: $P(\cdot)$ 表示概率。 $F_Y(y)$ 可简化为积分

$$F_Y(y) = \int_{G(x) \leq y} f_x(x) dx \quad (2)$$

式中: $f_x(x)$ 是关于 x 的联合概率分布函数; Y 的互补累计分布函数(CCDF)可以用 $1 - F_Y(y)$ 表示。

1.2 高斯代理模型

高维高斯过程参数优化前后的示意图如图1所示。高斯代理模型经过训练集的训练后可预测候

选集的响应量为 $\hat{M}(x)$, 其中 $\hat{M}(x_i) \sim N(\mu(x_i), \sigma(x_i))$, $i=1, 2, \dots, n$, 预测代理模型可通过式(3)得到。

$$\hat{M}(x|k) = \mu_{\hat{M}}(x) + k\sigma_{\hat{M}}(x) \quad (3)$$

式中: k 为设置置信水平, $k=0=\Phi^{-1}(50\%)$, $k=2=\Phi^{-1}(97.72\%)$, 分别对应预测模型 $\hat{M}^+(x|k)$ 、 $\hat{M}^0(x|k)$ 和 $\hat{M}^-(x|k)$, 其中, $k=-2=\Phi^{-1}(2.28\%)$, 比如: $\hat{M}^+(x|k)$ 使用 $\mu_{\hat{M}}(x) + 2\sigma_{\hat{M}}(x)$ 替代候选集 x^* 中的实值 Y , 以此类推。

2 全局 TS-GL 算法

计算单侧尾部概率的算法流程图如图 2 所示,

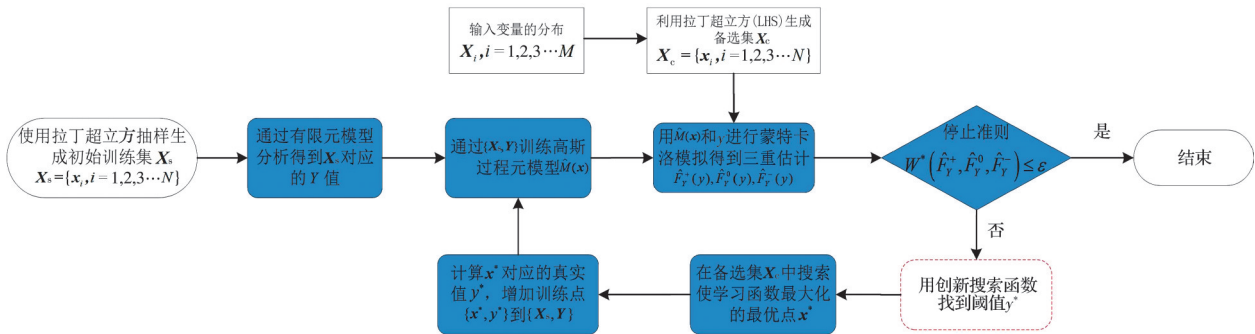


图 2 TS-GL 算法流程图

Fig. 2 TS-GL algorithm flow chart

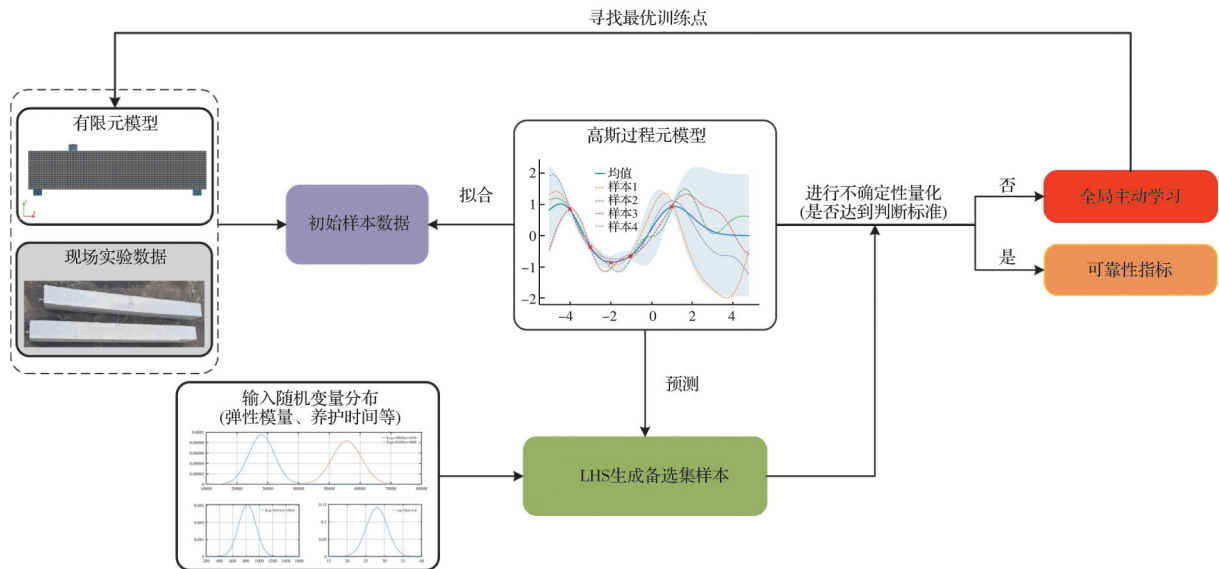
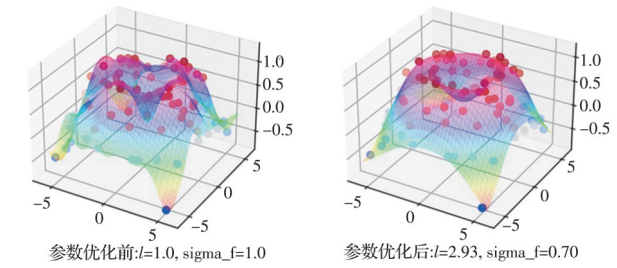


图 3 基于 TS-GL 算法的综合分析平台框架

Fig. 3 Comprehensive analysis platform framework based on TS-GL algorithm

AL-GP 算法虽然能在单侧某区域集中增加训练点。但在实际工程中, 由于极端事件极小的发生概率, 对 CDF 或 CCDF 的估计精度要求很高, 而 AL-GP 无法满足这种要求。因此需要针对性地改进, 使该算法对尾部的敏感性更高, 适用于有潜在尾部风险的分布计算, 也就是说, 对由罕见外部环



注: 圆点为初始数据, 网状为拟合函数。

图 1 高斯过程示意图

Fig. 1 Diagram of a high-dimensional Gaussian process

境影响导致的极端事件概率有更准确的估计。为此增加权重函数, 改造搜索函数, 构建了 TS-GL 算法, 步骤如下:

框架图如图 3 所示。该框架使用了高斯代理模型, 在估计 CDF/CCDF 的同时, 也提高了对单侧尾部估计的效率和精度。

1) 生成初始训练集 $\{X_s, Y\}$ 。 X_s 是由混凝土弹性模量、钢筋弹性模量、钢筋极限强度和养护时间生成的初始训练集, Y 是通过有限元模拟精确计算

出的对应输出变量,本文为裂缝宽度。

2)使用 $\{X_s, Y\}$ 训练高斯代理模型,其中核函数选用高斯核函数。

3)生成备选集 X_c ,计算对应的三重估计 $\hat{F}_Y^+(y)$ 、 $\hat{F}_Y^0(y)$ 和 $\hat{F}_Y^-(y)$ 。

4)计算损失函数 $W^*(\hat{F}_Y^+(y), \hat{F}_Y^0(y), \hat{F}_Y^-(y))$,若满足停止准则,则结束算法,否则进入步骤5)。

5)利用新颖的搜索函数,找到误差最大的 y'_* 。

6)在 X_c 中搜索并找到学习函数最大的样本 x^* ,并计算出其对应的真实值 y_* ,形成新增训练点 $\{x^*, y^*\}$ 。

7)将新增训练点 $\{x^*, y^*\}$ 添加到初始训练集 $\{X_s, Y\}$ 。

8)返回至第2步。

X_s, X_c 均由拉丁超立方抽样生成,数量级分别为 $10^1, 10^5$ 。

2.1 生成初始训练集

初始训练集 X_s 由拉丁超立方抽样得到。最少初始样本数量可定义为一个二次多项式的最少数量 $[(n+1)(n+2)/2]$, n 为输入变量个数,算例中变量数量为4,因算例非线性关系较强,取初始训练集为50个(n 个变量的二次多项式具有 $[(n+1)(n+2)/2]$ 个系数,而样本数量需要大于系数数量)。

为保证估计的失效概率 $P_f \geq 10^{-3}$,变异系数始终小于5%,候选样本集 X_c 依据变量的概率密度函数(probability density function, PDF),使用直接抽样法得到,样本规模为 10^5 。

2.2 $\hat{F}_Y^a(y)$ 的三重估计

对结构响应 Y 进行三重估计是为了得到预测结果的置信区间,通过置信区间为判断代理模型是否需要优化提供相应的依据。失效概率可以简化为积分

$$p_f = \int_{\{h(x) \leq 0\}} f_x(x) dx \quad (4)$$

式中: $f_x(x)$ 为向量 x 的联合概率密度函数, $\{h(x) \leq 0\}$ 表示失效区域。

因为 $f_x(x)$ 在有限元模型中很难定义,所以式(4)中的积分通常难以求得解析解。假设有一个足够大的样本集 $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,使用MCS可以估计失效概率为

$$\hat{P}_Y(y) = \frac{n_f}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{G(x_i) \geq y_0} \quad (5)$$

式中: n_f 为失效样本的数量; $n = |S|$ 为总样本量。 $I_{G(x_i) \geq y_0}$ 为失效的指示函数,其中, $G(x_i) \geq y_0$ 时, $I = 1$,否则 $I = 0$ 。

根据式(4)和式(5), Y 的CDF三重估计为

$$\hat{F}_Y^a(y) = \frac{n_f}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\hat{M}^a(x_i|k) \geq y} \quad (6)$$

式中: $a = -, 0, +$ 分别对应较低、平均、较高预测值,意味着对失效概率的保守、中间、激进预测。这是选择高斯过程模型作为代理模型的优势,不仅能给出失效概率的值,还能给出置信区间。用于计算 $\hat{F}_Y^+(y)$ 、 $\hat{F}_Y^0(y)$ 和 $\hat{F}_Y^-(y)$ 的备选集 X_c 需保持一致,以确保 $\hat{F}_Y^+(y) \geq \hat{F}_Y^0(y) \geq \hat{F}_Y^-(y)$ 。

2.3 误差函数

置信区间虽然能在一定程度上反映模型的不确定性,但置信范围波动较大,可能会影响预测的准确性。因此对置信范围做积分,判断是否需要优化模型。

$$W^*(\hat{F}_Y^+, \hat{F}_Y^0, \hat{F}_Y^-) = \int_{-\infty}^{+\infty} w^*(y) dy \quad (7)$$

式中

$$w^*(y) = \frac{|\hat{F}_Y^+(y) - \hat{F}_Y^-(y)|}{\min[\hat{F}_Y^0(y), 1 - \hat{F}_Y^0(y)]} \quad (8)$$

为了避免式(8)中的分母为0,将积分范围由原始范围 $[-\infty, +\infty]$ 变换为 $[y_{\text{lower}}, y_{\text{upper}}]$ 。感兴趣的概率区域为 $\min(\hat{M}^0(x)) \leq y_{\text{lower}} < y_{\text{upper}} \leq \max(\hat{M}^0(x))$ 。

算法停止准则为

$$W^*(\hat{F}_Y^+, \hat{F}_Y^0, \hat{F}_Y^-) \leq \epsilon \quad (9)$$

阈值 ϵ 可设置为

$$\epsilon = \bar{\epsilon}(y_{\text{upper}} - y_{\text{lower}}) \quad (10)$$

式中: $\bar{\epsilon}$ 为指定容差,一般设为0.1,式(8)应平均地小于 $\bar{\epsilon}$ 。

2.4 学习函数

当误差函数不满足停止准则时,则需要对代理模型进行优化。使用学习函数的目的是找到最优的训练点,不断训练高斯代理模型,以减少尾部误差,从而优化高斯过程模型,其定义为

$$Q(x|y') = \Phi \left[\frac{|y' - \hat{M}^0(x)|}{\sigma_{\hat{M}}(x)} \right] \quad (11)$$

式中: $\Phi[\cdot]$ 为标准高斯分布的CDF; $Q(x|y')$ 可理解为误分类概率; $\hat{M}^0(x)$ 为新增训练样本的中心预测值。

式(11)的目的是找到误分类概率最高的地方并投入训练点。但在AL-GP算法中,由于阈值 y' 不固定,不能直接使用学习函数。因此,如何找到一个最优的 y' 就成为需要解决的问题。为了准确估计风险尾部概率,使用带激活函数的搜索函数来寻找 y' 。

2.5 带激活函数的搜索函数

为了更加关注单侧尾部即极端事件的发生,需

要更加关注最大误差 y' , 对学习函数进行改造, 使新增训练点尽可能地集中在单侧尾部并尽量覆盖整个区域, 以保证对小概率尾部极端事件的估计精度, 即将式(8)分母 $\min[\hat{F}_Y^0(y), 1 - \hat{F}_Y^0(y)]$ 改为 $\hat{F}_Y^0(y)$ 或 $1 - \hat{F}_Y^0(y)$ 即可实现对左尾或右尾的估计。由于结构响应的风险函数通常是单调的, 因此将单调激活函数作为加权, 形成新的搜索函数。

根据式(7), 最直接的办法是找到最大化误差函数 $W^*(y)$ 中的 y' , 这意味着代理模型的误差在 y' 处最大。同时, 利用核函数实现局部化误差的测量, 最关键的是使用激活函数来强调感兴趣的区域。

$$W_L^*(y') = \alpha(y') \int_{-\infty}^{+\infty} w^*(y) \phi(y|y', \omega) dy \quad (12)$$

式中: $\phi(y|y', \omega)$ 为以 y' 为中心、以 ω 为参数的高斯核函数; $\alpha(y')$ 为激活函数。

激活函数是为了能更好地估计极端事件导致灾害发生的概率, 从而对损失函数再次加权, 但由于风险与变量间为非线性关系, 因此需要根据响应量风险的分布选择最优的激活函数形式。sigmoid、tanh 和 relu 三种常用的激活函数如图 4 所示, 其形式是递增的, 意味着关注程度随响应量的增加而增加, 即搜索函数对分布的右尾敏感。

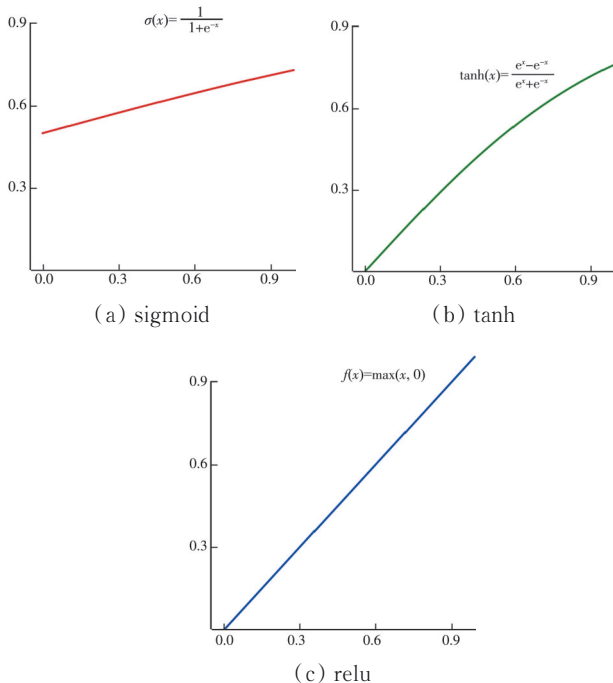


图 4 3 种激活函数

Fig. 4 Three activation functions

1) sigmoid 激活函数

激活函数 $\sigma(y) = \text{sigmoid}(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}$, 式

(12) 展开为

$$W_L^*(y') = \frac{1}{1 + e^{-y_n}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(y)}} \int_{y_{\text{lower}}}^{y_{\text{upper}}} w^*(y) e^{-\frac{(y-y')^2}{2\sigma^2(y')}} dy \quad (13)$$

式中: $y_n = 0.35 \times \left(\frac{y' - y_{\text{lower}}}{y_{\text{upper}} - y_{\text{lower}}} - 0.5 \right)$; $\sigma(y)$ 的定义域为 $[-0.175, 0.175]$ 。

2) tanh 激活函数

激活函数 $\tanh(y) = \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$, 式

(12) 展开为

$$W_L^*(y') = \frac{e^{y_n} - e^{-y_n}}{e^{y_n} + e^{-y_n}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(y)}} \int_{y_{\text{lower}}}^{y_{\text{upper}}} w^*(y) e^{-\frac{(y-y')^2}{2\sigma^2(y')}} dy \quad (14)$$

式中: $y_n = 1.0 \times \frac{y' - y_{\text{lower}}}{y_{\text{upper}} - y_{\text{lower}}}$; $\sigma(y)$ 的定义域为 $[0, 1]$ 。

3) relu 激活函数

激活函数 $\text{relu}(y) = \max(y, 0)$, 式(12)展开为

$$W_L^*(y') = \max(y', 0) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(y')}} \int_{y_{\text{lower}}}^{y_{\text{upper}}} w^*(y) e^{-\frac{(y-y')^2}{2\sigma^2(y')}} dy \quad (15)$$

式中: $y_n = 0.5 \times \max\left(\frac{y'}{y_{\text{upper}}}, 0\right)$; $\sigma(y)$ 的定义域为 $[0, 0.5]$ 。

形式上, 求解搜索函数等价于完成一个优化问题, 如式(16)所示。得到的最优点记为 y^* 。

$$y^* = \underset{y'}{\operatorname{argmax}} \left\{ \frac{1}{Z} \alpha(y') \int_{y_{\text{lower}}}^{y_{\text{upper}}} w^*(y) e^{-\frac{(y-y')^2}{2\sigma^2(y')}} dy \right\} \quad (16)$$

式中: 高斯核区域被 $y' \in [y_{\text{low}}, y_{\text{upper}}]$ 截断。因此, 归一化常数 Z 设置为

$$Z = \sqrt{2\pi} \sigma(y') \left(\Phi\left(\frac{y_{\text{upper}} - y'}{\sigma(y')}\right) - \Phi\left(\frac{y_{\text{lower}} - y'}{\sigma(y')}\right) \right) \quad (17)$$

$\sigma(y')$ 由式(18)得到, 是 AL-GP 的简化方法。基本原理是在备选集 X_c 中找到 y' 的最近点, 用最近点的 σ 代替想要的精确 σ 。

$$\sigma(y') = \left\{ \sigma_{\hat{M}}(x') \mid x' = \underset{x \in X_c}{\operatorname{argmin}} |y' - \hat{M}^0(x)| \right\} \quad (18)$$

根据学习函数, 新增训练点为

$$x^* = \underset{x \in X_c}{\operatorname{argmax}} Q(x|y') \quad (19)$$

3 算例

3.1 试验设置

为了建立关于裂缝宽度的有限元模型,在杨文瑞^[21]、Zhang 等^[22]进行实验的基础上,对蒸养 GFRP 筋混凝土预制构件进行模拟。混凝土梁尺寸为 1 100 mm×178 mm×178 mm。钢筋放置于底部纵向,直径为 19 mm,保护层厚度为 25 mm。荷载施加位置与支座距离 210 mm,以位移控制方式进行加载。有 4 个输入变量,分别为混凝土弹性模量、钢筋弹性模量、钢筋极限强度和养护时间。其中养护时间与混凝土抗压和抗拉强度的非线性关系如图 5 所示,结构带裂缝云图如图 6 所示。

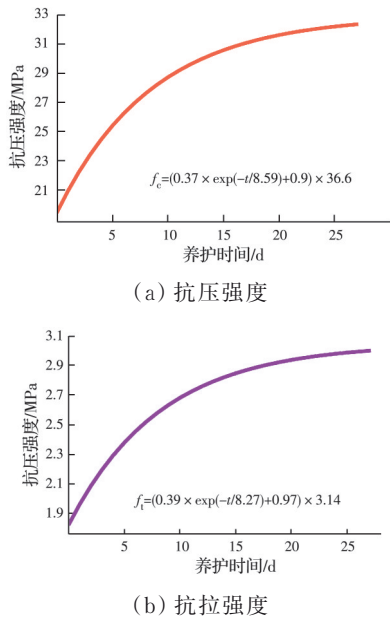


图 5 养护时间与混凝土强度之间的非线性关系
Fig. 5 Nonlinear relationship between curing time and concrete strength

3.2 输入变量的分布

结构随机变量及其分布形式统计量如表 1 所示。

3.3 新增训练点的分布

裂缝宽度是混凝土结构设计和评价中最具实

表 1 输入变量参数表
Table1 Input variable parameters

变量	分布	均值	标准差	参考文献
混凝土弹性模量 E_c	Normal	28 060 MPa	4 213 MPa	[23]
钢筋弹性模量 E_s	Normal	55 710 MPa	4 820 MPa	[24]
钢筋极限强度 f_u	Normal	819.8 N/mm ²	130.8 N/mm ²	[24]
龄期 t	Normal	28 d	2.8 d	[25]

际意义的参数之一。因此,与其他分布区间相比,更需关注裂缝宽度分布函数的右尾,即将式(8)分母 $\min[\hat{F}_Y^0(y), 1 - \hat{F}_Y^0(y)]$ 改为 $1 - \hat{F}_Y^0(y)$ 。

图 7 为各方法新增训练点的频数分布图。从图 7 中可以看出,与 AL-GP 相比,TS-GL 算法能够更有效地将训练集投放在单侧尾部,实现对敏感尾部的关注。不同的激活函数会导致样本点分布不同,与 sigmoid 和 relu 函数相比,tanh 函数会在极端区域投入更多的训练点,说明 tanh 函数更适合估计极小概率的结构响应。

3.4 新增训练点

图 8 为 AL-GP 和 TS-GL 的迭代图。每个样本均为四维向量,有 3 个指标与输出变量高度相关。即混凝土弹性模量与钢筋极限强度及钢筋弹性模量,因此用这 3 个指标绘制散点图。图中浅灰色区域为候选样本,蓝色未填充圆圈为初始训练集,蓝色填充圆圈为新增训练点。比较图 8(a)、(b)可以发现,图 8(b)中蓝色填充圆圈更集中在左下侧区域,表明新增输入样本中 3 个指标的均值更低,意味着迭代过程中选择了更极端的新增输入变量,与图 7 的结果相一致。图 7 表明,与 AL-GP 相比,TS-GL 学习的新增训练点(裂缝值)极端大,所以图 8 对应的 3 个指标才会极端小。

由于没有对误差积分范围细化,3 种激活函数的表现近似,这里仅对比 AL-GP 和采用 tanh 激活函数的 TS-GL 算法的结果。

3.5 分布统计信息

各方法的均值、标准差和相对误差统计数据见表 2。可以观察到,TS-GL 与 MCS 在对均值的估计

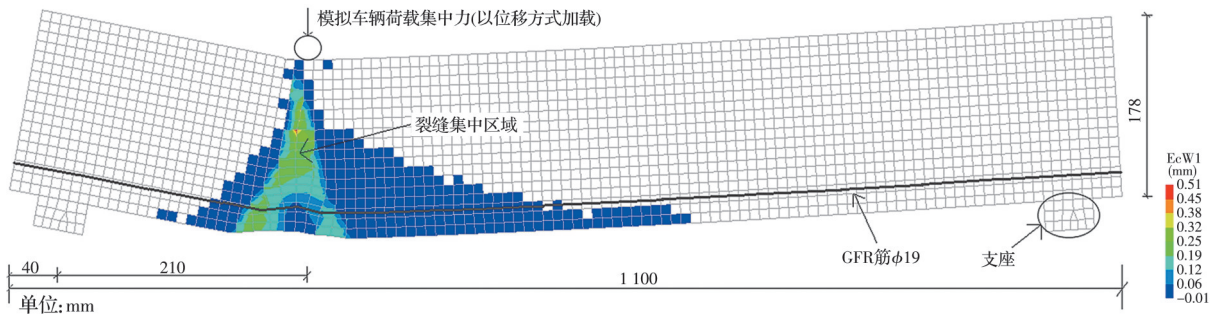


图 6 结构带裂缝云图
Fig. 6 Fracture cloud image of structural belt

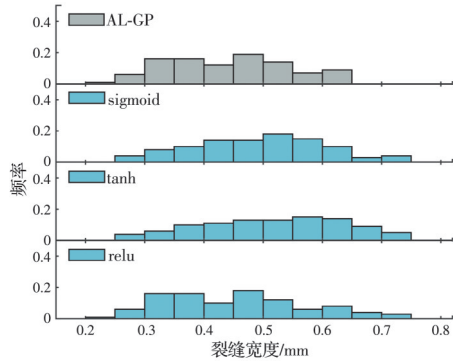


图 7 新增训练点分布图

Fig. 7 Added training point distribution map

上几乎相同,相对误差在 10% 以下。此外,TS-GL 的抽样规模明显小于 MCS 方法,从而显著降低了时间成本。尽管二者效果略有差异,但差距不大,可以认为 TS-GL 能得到基本满意的统计量结果。

表 2 各方法的统计量对比

Table 2 Statistical comparison of each method

方法	样本数量	均值	相对误差	标准差	相对误差
MCS	10^4	0.326 1		0.061 0	
tanh	10^5	0.304 0	0.067 8	0.080 8	0.324 6

注:相对误差=|Method-MCS|/MCS。

3.6 算法效率对比

对多次运行后计算误差的统计量(表 3)进行观察,避免仅计算一次可能存在的偶然性。TS-GL 算

法在误差期望上比 AL-GP 算法降低了约 20%,说明高斯代理模型在右侧尾部区域的不确定性降低更快,能更精确地估计小概率事件概率。显而易见,在处理复杂结构的尾部概率估计时,tanh 激活函数的 TS-GL 算法更具有优势。

表 3 分布函数的误差统计量

Table 3 Error statistics of the distribution function

方法	裂缝宽度/mm	
	$E[\epsilon_e]$	$\sigma(\epsilon_e)$
AL-GP	0.219	0.049
Tanh	0.172	0.078

注:表 3 为算法 50 次独立运行后,对误差和运行次数分布函数的统计量。 $E[\epsilon_e]$ 为误差的期望; $\sigma(\epsilon_e)$ 为误差的标准差。

表 3 中,误差定义 ϵ_e 为

$$\epsilon_e = \frac{1}{y_{\text{low}} - y_{\text{upper}}} \int_{y_{\text{low}}}^{y_{\text{upper}}} \frac{|\hat{F}_Y(y) - F_Y(y)|}{\min[F_Y(y), 1 - F_Y(y)]} dy \quad (20)$$

设置裂缝宽度 $[y_{\text{lower}}, y_{\text{upper}}]$ 为 $\left[0.6 \times \max(\hat{M}^0(x)) + 0.4 \times \min(\hat{M}^0(x)), \max(\hat{M}^0(x))\right]$

3.7 CCDF 的迭代

TS-GL 虽能更精确地估计小概率事件概率,但还需验证经过主动学习后的高斯代理模型是否能得到与真实复杂有限元模型一致的结构响应量分

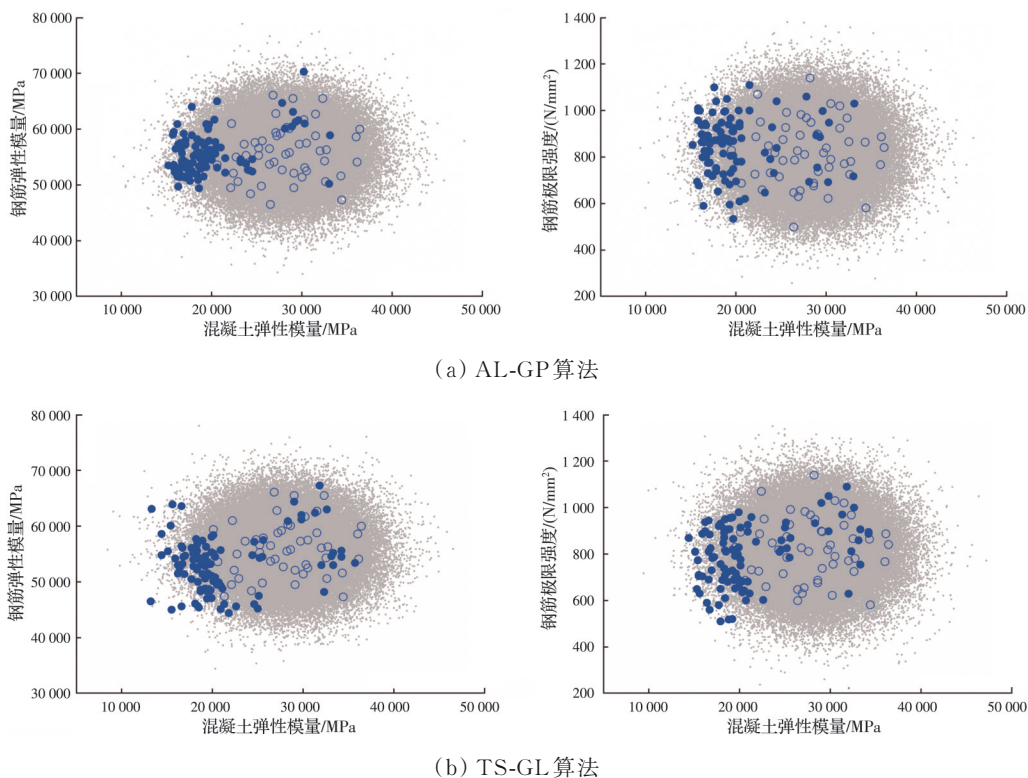


图 8 混凝土弹性模量新增训练点散点图

Fig. 8 Concrete elastic modulus added training point scatter diagram

布函数。选择CCDF^[26]以更好地可视化结构响应量右尾区域。图9(a)、(b)分别展示了CCDF在AL-GP和TS-GP算法框架下的迭代过程,比较可得,TS-GP用更低的迭代次数得到了最终结果。图9(b)中红线代表的TS-GP与蓝线代表的MCS曲线重合度较高,表明代理模型与真实复杂结构模型得到的随机响应非常接近,验证了高斯代理模型的正

确性。蓝线之所以相对红线较短,是因为MCS的样本数量为 10^4 ,所得结果只在 $CCDF \geq 10^{-2}$ 范围内有效。比较图9(b)左图与右图可以发现,灰色区域逐渐缩小,表明TS-GP算法训练的高斯代理模型不确定性在迭代过程中不断降低。由此可见,该算法适用于实际结构工程,有利于小概率极端事件的风险评估。

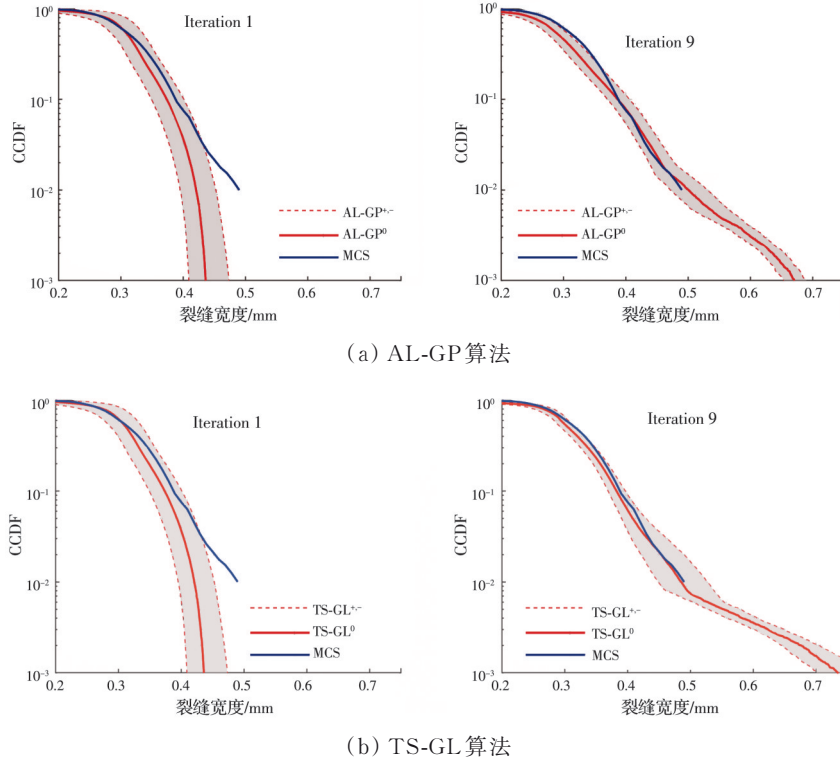


图9 裂缝宽度的CCDF图(迭代均为最终结果)

Fig. 9 CCDF diagram of crack width (Iterations are final result)

4 结论

提出的TS-GP算法使用了基于主动学习的高斯过程元建模策略,并将其与非线性分析有限元软件相结合,形成了估计结构极小失效概率的分析平台。通过实际工程算例验证了算法的工程适用性,得出了以下结论:

1)TS-GP算法能对单侧尾部施加更大关注,更主动寻找极端事件,以实现代理模型的优化。多次比较TS-GP算法与AL-GP的迭代误差,误差期望降低了20%,表明TS-GP进行结构响应在单尾上有更快的估计效率。

2)将TS-GP算法与商业有限元软件结合,验证了其对于非侵入性结构模拟计算的适用性。通过与商业有限元比较,证明了TS-GP算法能够有效地进行结构模拟计算,具有良好的适应性。

3)将TS-GP算法的输出结果与MCS进行比较,结果显示,与MCS相比,TS-GP算法的输出变量

均值误差小于10%,表明TS-GP算法在保持较高精度的同时,能够显著降低计算成本,提高计算效率。

参考文献

- [1] ZHANG G J, LIU Y J, LIU J, et al. Causes and statistical characteristics of bridge failures: A review [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition), 2022, 9(3): 388-406.
- [2] SINHA A, CHORZEPA M G, YANG J J, et al. Cognitive approaches to hyperbolic discounting of high-impact low-probability bridge overload events and live-load factors [J]. Journal of Performance of Constructed Facilities, 2022, 36(2): 04022009.
- [3] CHANG H, FRANCZYK J. Climate change, land-use change, and floods: Toward an integrated assessment [J]. Geography Compass, 2008, 2(5): 1549-1579.
- [4] SANTELLA N, STEINBERG L J, PARKS K. Decision making for extreme events: Modeling critical infrastructure interdependencies to aid mitigation and

- response planning [J]. *Review of Policy Research*, 2009, 26(4): 409-422.
- [5] MCPHILLIPS L E, CHANG H, CHESTER M V, et al. Defining extreme events: A cross-disciplinary review [J]. *Earth's Future*, 2018, 6(3): 441-455.
- [6] MISHRA V, SADHU A. Towards the effect of climate change in structural loads of urban infrastructure: A review [J]. *Sustainable Cities and Society*, 2023, 89: 104352.
- [7] SCHUËLLER G I, STIX R. A critical appraisal of methods to determine failure probabilities [J]. *Structural Safety*, 1987, 4(4): 293-309.
- [8] 雷永林, 王言, 于芹章, 等. 面向复杂仿真元建模的序贯近邻探索实验设计方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2021, 43(5): 1232-1239.
- LEI Y L, WANG Y, YU Q Z, et al. Design method of sequential neighbor exploratory experimental for complex simulation metamodeling [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2021, 43(5): 1232-1239. (in Chinese)
- [9] BAHRAMI P, SAHARI MOGHADDAM F, JAMES L A. A review of proxy modeling highlighting applications for reservoir engineering [J]. *Energies*, 2022, 15 (14): 5247.
- [10] 陶厚永, 曹伟. 多项式回归与响应面分析的原理及应用 [J]. *统计与决策*, 2020, 36(8): 36-40.
- TAO H Y, CAO W. Principle and application of polynomial regression and response surface analysis [J]. *Statistics & Decision*, 2020, 36(8): 36-40. (in Chinese)
- [11] KENNEDY M C, O'HAGAN A. Bayesian calibration of computer models [J]. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 2001, 63(3): 425-464.
- [12] 李少鹏, 李海, 李珂. 基于深度学习的钝体断面外形气动性能高效预测方法[J]. *土木与环境工程学报(中英文)*, 2024, 46(1): 122-129.
- LI S P, LI H, LI K. An efficient deep learning prediction method for aerodynamic performance based on the shape of the main beam [J]. *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 2024, 46(1): 122-129. (in Chinese)
- [13] 牛帅星, 李庶林, 刘胤池, 等. 基于小波变换的 GASVM-ARMA 模型在深基坑变形预测中的应用[J]. *土木与环境工程学报(中英文)*, 2023, 45(3): 16-23.
- NIU S X, LI S L, LIU Y C, et al. Application of GASVM-ARMA model based on wavelet transform in deformation prediction of deep foundation pit [J]. *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 2023, 45(3): 16-23. (in Chinese)
- [14] 田一梅, 吴迷芳, 王阳. 基于 SVR 的城市供水管网余氯预测分析[J]. *重庆建筑大学学报*, 2006, 28(2): 74-78.
- TIAN Y M, WU M F, WANG Y. Prediction and analyses of residual Chlorine based on Support Vector Regression in urban water distribution system [J]. *Journal of Chongqing Jianzhu University*, 2006, 28(2): 74-78. (in Chinese)
- [15] YUAN J, NIAN V, SU B, et al. A simultaneous calibration and parameter ranking method for building energy models [J]. *Applied Energy*, 2017, 206: 657-666.
- [16] LINDGREN G. Extreme values and crossings for the X 2-Process and other functions of multidimensional Gaussian processes, by reliability applications [J]. *Advances in Applied Probability*, 1980, 12(3): 746-774.
- [17] YUE X W, WEN Y C, HUNT J H, et al. Active learning for Gaussian process considering uncertainties with application to shape control of composite fuselage [J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2021, 18(1): 36-46.
- [18] COHN D A, GHAHRAMANI Z, JORDAN M I. Active learning with statistical models [J]. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 1996, 4: 129-145.
- [19] 杜蓓. 基于主动学习的非实验蛋白数据挖掘方法研究 [D]. 辽宁 大连: 大连理工大学, 2013.
- DU B. Research on non-experimental protein data mining with active learning [D]. Dalian, Liaoning: Dalian University of Technology, 2013. (in Chinese)
- [20] WANG Z Q, BROCCARDO M. A novel active learning-based Gaussian process metamodeling strategy for estimating the full probability distribution in forward UQ analysis [J]. *Structural Safety*, 2020, 84: 101937.
- [21] 杨文瑞. 高速铁路蒸养 GFRP 筋混凝土预制构件损伤研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2016.
- YANG W R. Damage research on steam-curing GFRP reinforced precast concrete components in high-speed railway [D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2016. (in Chinese)
- [22] ZHANG K, YANG W R, LI H Y, et al. Semi-reliability probability damage assessment of GFRP bars embedded in steam-curing concrete beams based on the multiple factors related moisture absorption model [J]. *Polymers*, 2021, 13(24): 4409.
- [23] KOU S C, POON C S, CHAN D. Properties of steam cured recycled aggregate fly ash concrete[C]//Proceedings of RILEM International Conference on the Use of Recycled Materials in Buildings and Structures, Barcelona, Spain. 2004: 590-599.
- [24] BENMOKRANE B, NAZAIR C, SEYNAVE X, et al. Comparison between ASTM D7205 and CSA S806 tensile-testing methods for glass fiber-reinforced polymer bars [J]. *Journal of Composites for Construction*, 2017, 21(5): 04017038.
- [25] KONG J S, ABABNEH A N, FRANGOPOL D M, et al. Reliability analysis of chloride penetration in saturated concrete [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2002, 17(3): 305-315.
- [26] HAQUE T U, HOSSEN S. PAPR reduction in OFDM system using clipping and filtering methods based on CCDF [J]. *International Journal of Computer Network and Information Security*, 2019, 11(10): 12-18.