

DOI: 10.11835/j.issn.2096-6717.2024.088



开放科学(资源服务)标识码 OSID:



考虑渗流过程记忆效应的饱和土体一维固结特性

曾涛^{1a,1b}, 冯韬^{1a}, 陈亚博^{1a}, 于永堂², 姚尧^{1a,3}

(1. 西安建筑科技大学 a. 土木工程学院; b. 陕西省岩土与地下空间工程重点实验室, 西安 710055;
2. 中联西北工程设计研究院有限公司, 西安 710077; 3. 西安工业大学交叉创新研究院, 西安 710021)

摘要:饱和土体长时间渗流特性的研究具有重要意义。引入 Riemann-Liouville (R-L) 分数阶导数对达西定律进行修正(以下称修正渗流模型),以描述长时间渗流过程中土体渗透率的演化。文献数据拟合结果表明:修正渗流模型能更好地描述流体速度随时间的非线性变化,且由修正渗流模型反演出的反常渗透系数数值也在合理范围内。将修正渗流模型代入一维 Biot 固结方程组,推导 R-L 分数阶扩散方程;采用显(时间域)-隐(空间域)差分格式对上述方程的数值计算过程进行推导;通过两个算例验证程序的正确性。在此基础上,探讨修正渗流模型参数对饱和土体一维固结过程的影响。结果表明:分数阶阶次 β 体现了土体渗透率的衰减程度,阶次越高,渗透率越低,固结速度越慢。此外,在渗透系数 k 和 k_β 中, k 对土体固结速度的影响占主导地位,因此,为了简化拟合过程而假定 k 为零不合理。

关键词:饱和土体;固结;分数阶导数;达西定律;有限差分法

中图分类号:TU411.4 **文献标志码:**A **文章编号:**2096-6717(2026)04-0023-11

One-dimensional consolidation characteristics of saturated soils considering memory effect of seepage process

ZENG Tao^{1a,1b}, FENG Tao^{1a}, CHEN Yabo^{1a}, YU Yongtang², YAO Yao^{1a,3}

(1a. School of Civil Engineering; 1b. Shaanxi Key Laboratory of Geotechnical and Underground Space Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, P. R. China; 2. China United Northwest Institute for Engineering Design & Research Co., Ltd., Xi'an 710077, P. R. China; 3. Institute for Interdisciplinary and Innovation Research, Xi'an Technological University, Xi'an 710021, P. R. China)

Abstract: The long-term seepage characteristics of fluid flow in saturated soils are of great importance. The Riemann-Liouville (R-L) fractional derivative was adopted to modify classical Darcy's law (hereinafter referred to as modified seepage model) to describe the evolution of soil permeability during the long-term seepage process. Data fitting of experimental results given in published literature shows that the modified seepage model could more accurately describe the nonlinear evolution of fluid velocity with time. Moreover, the anomalous permeability coefficient value obtained with the modified seepage model is found to be reasonable. The R-L

收稿日期:2024-06-24

基金项目:国家自然科学基金(12272284);陕西省教育厅科学研究计划重点项目(重点实验室项目)(23JS033)

作者简介:曾涛(1984-),男,博士,副教授,主要从事脆性材料宏观本构以及深地工程中多场耦合问题研究, E-mail: taozeng@xauat.edu.cn.

Received: 2024-06-24

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (No. 12272284); Education Department of Shaanxi Provincial Government (No. 23JS033)

Author brief: ZENG Tao (1984-), PhD, associate professor, main research interests: macro- and micro-constitutive model of brittle materials and multi-field coupling problems in deep earth engineering, E-mail: taozeng@xauat.edu.cn.

fractional diffusion equation was derived by integrating the modified seepage model into the one-dimensional Biot consolidation model. The explicit (time domain)-implicit (space domain) difference method was employed to discretize the above equation, and the correctness of the algorithm was verified through two numerical examples. On this basis, the influence of the modified seepage model parameters on the one-dimensional consolidation process of saturated soils was investigated. The results show that the fractional order β reflects the degree of soil permeability decay. The higher the fractional order, the lower the soil permeability, which leads to a further decrease in the consolidation rate; additionally, the permeability coefficient k plays a more dominant role than k_β . Thus, k should not be assumed to be zero to simplify the fitting process.

Keywords: saturated soils; consolidation; fractional derivative; Darcy's law; finite difference method

达西定律是太沙基建立经典固结理论的基础,其描述了饱和土体中流体速度与压力梯度或水力梯度之间的线性关系,比例系数(即渗透系数)取决于介质和流体的物理性质。然而,许多渗流试验表明,饱和土体的渗透性会随着其结构的改变而变化^[1-2],导致线性Darcy定律不再适用。

为了描述流体流动的非线性现象(尤其是低速段),学者们开展了大量研究。Hansbo^[3]最先采用分段幂函数描述黏土介质中的流体流动,但由于采用了分段函数,模型参数较多。Swartzendruber^[4]则采用负指数函数修正达西定律,建立了低速段和高速段通用的渗流公式。Bear^[5]提出了更为简洁的分段线性函数数学模型,但该模型仅适用于水力梯度较大的场景。

学者们还进一步研究了非线性渗流对固结的影响。李传勋等^[6]基于Swartzendruber^[4]指数渗流模型研究了内部竖向附加应力随深度线性变化的土体固结机制。在此基础上,结合统一硬化本构模型,刘忠玉等^[7]建立了饱和黏土一维流变固结理论。依据考虑起始水力坡降的分段渗流模型,李全军等^[8]建立了饱和土固结理论,并对逐级加载工况下饱和土固结模型进行了分析。通过引入Hansbo分段渗流模型和对数压缩渗透模型,胡闯等^[9]和李兆帅等^[10]分别推导了变荷载软土一维非线性固结理论和软土一维大应变固结理论。

以上非线性渗流模型及相关固结模型均基于整数阶微积分理论。近年来,分数阶微积分的应用日益广泛。作为一种数学工具,分数阶微积分在处理复杂系统时展现出独特优势:能够捕捉到系统的历史依赖性和长程相互作用,使相应数学模型在描述具有记忆效应和非局部特性的物理过程时更加准确。因此,考虑渗流过程中土体孔隙结构时间和空间非局部特性的分数阶渗流模型逐渐被开发出来,主要分为3类。第1类:利用时间分数阶导数对渗透系数进行修正,以体现渗流过程中的时间非局部性。Caputo^[11]提出此类分数阶达西定律来描述砂

土渗透率随时间变化的现象;基于此类形式,Hossain等^[12]也提出了描述油藏开发过程中流体流动特性的分数阶渗流模型,不同之处在于该模型并不包含反常渗透系数。第2类:对传统渗流模型的微分项(速度 q 对水力梯度 i 的微分)进行修正,以更好地描述土中流体的非线性流动现象。杨帅^[13]应用分数阶导数对达西定律的微分形式进行修正,相比Izbash模型,其具有量纲平衡等优点。Tu等^[14]利用分数达西模型对Forchheimer和Izbash方程进行修正,以表征承压完整井的非达西行为。第3类:应用分数阶导数对Darcy定律中的压力梯度进行修正(压力 p 对空间位置 x 的分数阶导数),以描述土体渗流过程中的空间非局部性。王睿等^[15-16]提出了分数阶理查兹方程,其研究结果表明模型能较好地描述非饱和土中的流体流动过程。

然而,不合理的分数阶模型不仅使试验数据的拟合变得更加困难,还影响对渗流行为的合理解释。在长时间的定水头试验中,受限于测试条件,土体内部压力梯度的变化未知。因此,目前的研究大多假定压力梯度为常数。此时,若采用Caputo及Caputo-Fabrizio分数阶导数,拟合试验数据时就需要结合经验公式。此为上述两类分数阶导数对常数的导数为零所致。另外,Conformable分数阶导数是一种局部性质的导数,缺乏记忆效应,无法反映土体渗透性与其历史状态相关的性质。Riesz分数阶导数则定义在Sobolev等特定的函数空间。

为进一步丰富非线性渗流模型,笔者利用R-L分数阶导数算子对Caputo等^[11]提出的分数阶达西定律进行修正,并依据文献数据验证模型的合理性。为探究R-L分数阶渗流模型对固结过程的影响,结合一维Biot固结方程组,推导R-L型分数阶扩散方程并给出详细的数值实现方案。在此基础上,依据不同边界条件,分析分数阶阶次和反常渗透系数对土体固结过程的影响,并进一步讨论分数阶阶次在固结理论中的物理意义。

1 R-L 分数阶导数渗流模型

1.1 R-L 分数阶微积分的基本概念

分数阶微积分的 β 阶卷积核 $\gamma(\beta)$ 为^[17]

$$Y(\beta) = \frac{t_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \quad (1)$$

式中: β 为大于 0 的非整数; Γ 为伽马函数。

$$t_+^{\beta-1} = \begin{cases} t^{\beta-1}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

在可积区间 $(0, t)$ 上, 分数阶阶次为 β 的 R-L 微积分定义为

$$D_{0,t}^{-\beta} f(t) = Y(\beta) \cdot f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \quad (3)$$

则相应的 β 阶 R-L 分数阶导数为

$$D_{0,t}^{\beta} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} D_{0,t}^{-(m-\beta)} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} (\gamma(\beta) \cdot f(t)) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta-m+1}} \quad (4)$$

式中: m 为大于 β 的最小正整数(本文默认 $0 \leq \beta < 1$,

则 $m=1$); $\gamma(\beta) = Y(1-\beta) = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}$, 通常也

被称作分数阶导数的记忆函数^[18]。R-L 分数阶导数通过 $\gamma(\beta)$ 与 $f(t)$ 卷积, 描述了包含从初始时刻 0 到当前时刻 t 内历史时刻 τ 的函数值变化对分数阶导数结果的影响, 这种影响在时间上非局部。因此, R-L 分数阶导数具有记忆效应, 即物理量 $D_{0,t}^{\beta} f(t)$ 的当前状态与 $f(t)$ 的历史状态有关。

1.2 分数阶导数修正的渗流模型

一般而言, 饱和土体中流体的速度 q 和压力梯度 ∇p 满足线性达西定律

$$q = -\frac{k}{\gamma_f} \nabla p \quad (5)$$

式中: q 为流体的速度, m/s; k 为渗透系数, m/s; γ_f 为液体的重度, N/m³。

长时间渗流作用会改变土体渗透率, 而渗透率的变化又与先前土体内水力梯度场的状态有关^[18], 使渗流在时间上呈现出非局部特性, 即记忆效应。基于此, 利用 R-L 分数阶导数对上述线性达西定律进行修正。

$$f_{\beta} = m_1 + m_2 \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \quad (6)$$

$$q(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left[f_{\beta}(t) \cdot \frac{k}{\gamma_f} \nabla p(x, t) \right] =$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^t \frac{k}{\gamma_f} \nabla p(x, \tau) \cdot \left[m_1 + m_2 \frac{(t-\tau)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \right] d\tau \right\} = -\frac{k}{\gamma_f} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t m_1 \nabla p(x, \tau) d\tau \right) - \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{k_{\beta}}{\gamma_f} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t m_2 (t-\tau)^{-\beta} \nabla p(x, \tau) d\tau \right] \quad (7)$$

令 $m_1 = m_2 = 1$, 整理式(7), 得到可用于描述反常扩散过程中的压力-通量关系式

$$\gamma_f q = -(k + k_{\beta} D_{0,t}^{\beta}) \nabla p \quad (8)$$

式中: k_{β} 为反常渗透系数, m/s^{1- β} , 体现了记忆效应对渗流的非线性影响; $D_{0,t}^{\beta}(\cdot)$ 为由式(4)定义的 R-L 分数阶导数。

2 分数阶导数修正渗流模型的验证

目前, 研究人员大多倾向于使用 Caputo 分数阶导数来描述非线性渗流现象, 主要原因是 Caputo 分数阶导数易于求解^[19]。然而, 相比 Caputo 分数阶导数, R-L 分数阶导数有其独特优势。

在长时间的定水头渗流试验中, 由于测试条件的限制, 无法得知渗流土体内部每一时刻的压力梯度, 因此往往假定压力梯度为常数。在 Caputo 分数阶导数的定义下, 常数的导数为 0。上述假定增加了试验数据拟合的复杂性, 往往需要借助经验公式来解决。在 R-L 分数阶导数定义下, 常数的导数为与时间相关的幂函数, 有助于试验数据的拟合。

利用修正渗流模型(式(8))对 Iaffaldano 等^[20]和胡宇轩等^[21]的数据进行拟合。需要指出的是, Iaffaldano 等^[20]采用 Caputo 分数阶导数对达西定律进行修正, 拟合长时间定水头渗流试验得到的数据, 在拟合过程中使用了经验公式。而且, 为了简化拟合过程, Iaffaldano 等^[20]还进一步假定 $k=0$ 。

2.1 基于 Levenberg-Marquardt 方法的参数拟合

假定水头渗流试验中的压力梯度为常数, 基于 R-L 分数阶导数的性质, 其渗流模型可表示为

$$q(t) = \left(\frac{k}{\gamma_f} \nabla p + \frac{k_{\beta}}{\gamma_f} \frac{t^{-\beta} \nabla p}{\Gamma(1-\beta)} \right) \quad (9)$$

式中: 参数 k, k_{β} 和 β 可通过 Levenberg-Marquardt 非线性拟合方法得到。根据式(9)和试验数据, 任意时刻计算流速 ($q(t_i)$) 和实际流速 q_i 的误差(以下简称残差)为

$$e_i = q(t_i) - q_i = \left(\frac{k}{\gamma_f} \nabla p + \frac{k_{\beta}}{\gamma_f} \frac{t_i^{-\beta} \nabla p}{\Gamma(1-\beta)} \right) - q_i \quad (10)$$

参数向量 $z = (k, k_{\beta}, \beta)^T$ 的残差向量以及残差向量的雅克比矩阵为

$$e(z, t_i) = \begin{bmatrix} \left(\frac{k}{\gamma_i} \nabla p + \frac{k_\beta}{\gamma_i} \frac{t_1^{-\beta} \nabla p}{\Gamma(1-\beta)} \right) - q_1 \\ \left(\frac{k}{\gamma_i} \nabla p + \frac{k_\beta}{\gamma_i} \frac{t_2^{-\beta} \nabla p}{\Gamma(1-\beta)} \right) - q_2 \\ \dots \\ \left(\frac{k}{\gamma_i} \nabla p + \frac{k_\beta}{\gamma_i} \frac{t_T^{-\beta} \nabla p}{\Gamma(1-\beta)} \right) - q_T \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$J(z) = \begin{bmatrix} \frac{\nabla p}{\gamma_i} & \frac{t_1^{-\beta} \nabla p}{\gamma_i \Gamma(1-\beta)} & \frac{k_\beta \nabla p t_1^{-\beta}}{\gamma_i} \left(\frac{\psi(1-\beta) - \ln t_1}{\Gamma(1-\beta)} \right) \\ \frac{\nabla p}{\gamma_i} & \frac{t_2^{-\beta} \nabla p}{\gamma_i \Gamma(1-\beta)} & \frac{k_\beta \nabla p t_2^{-\beta}}{\gamma_i} \left(\frac{\psi(1-\beta) - \ln t_2}{\Gamma(1-\beta)} \right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\nabla p}{\gamma_i} & \frac{t_T^{-\beta} \nabla p}{\gamma_i \Gamma(1-\beta)} & \frac{k_\beta \nabla p t_T^{-\beta}}{\gamma_i} \left(\frac{\psi(1-\beta) - \ln t_T}{\Gamma(1-\beta)} \right) \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中： ψ 为 Digamma 函数。Levenberg-Marquardt 非线性拟合程序实现流程如图 1 所示。

图 1 中 I 为单位矩阵, λ 为阻尼因子, 初始值为 1。

2.2 结果分析

图 2 分别给出了由 R-L 和 Caputo 分数阶导数修

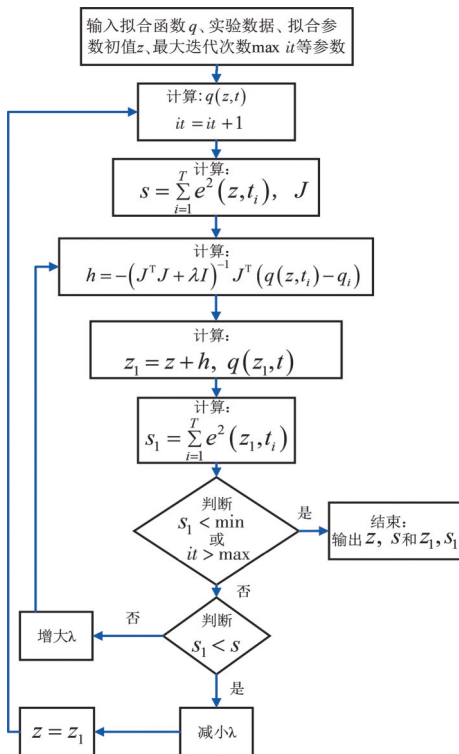
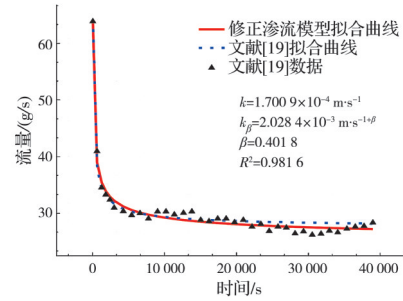
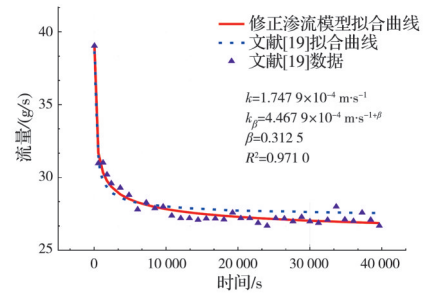


图 1 Levenberg-Marquardt 非线性拟合程序流程图
Fig. 1 Schematic diagram of Levenberg-Marquardt nonlinear fitting program

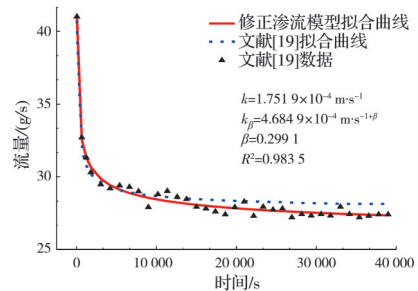
正的渗流模型所拟合的试验曲线。由图 2 可见, 当渗透系数非零时, 即 $k \neq 0$ 时, 前者与试验数据更为吻合, 并且拟合得到的反常渗透系数处于砂土渗透系数范围内。



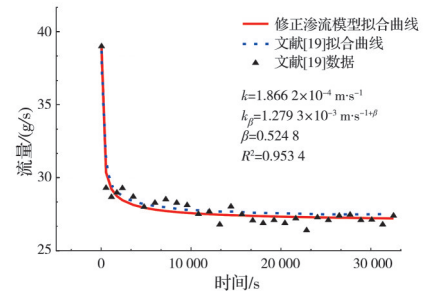
(a) 试验 5



(b) 试验 2



(c) 试验 3

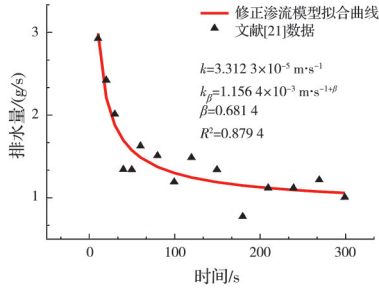


(d) 试验 4

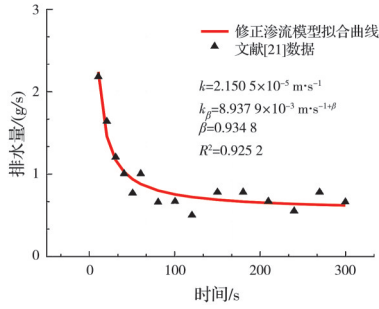
图 2 拟合曲线对比图

Fig. 2 Comparison of the fitting curves for different models

为进一步验证修正渗流模型的适用性, 对胡宇轩等^[21]所做中等砂性土负压排水试验数据进行拟合, 结果如图 3 所示。可以观察到, 修正渗流模型能较好地描述试验现象, 并且拟合得到的渗透系数的量级与原文献一致 (4.42×10^{-5} m/s)。



(a) 第 1 次渗流试验



(b) 第 2 次渗流试验

图 3 负压排水试验数据拟合图

Fig. 3 Fitting curves of negative pressure drainage test data

3 一维分数阶固结方程及数值求解

3.1 一维分数阶固结方程

将修正渗流模型式(8)代入一维 Biot 固结方程组中^[22],得到

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

$$S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla q + \alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

式中: u 为骨架位移; p 为孔隙压力; $M=\lambda+2G$, λ 和 G 为拉梅常数; α 为 Biot 固结系数; $S=n/K_w+(\alpha-n)/K_s$,为介质的总储水系数, n 为孔隙率, K_w 为液体的体积模量, K_s 为固体颗粒的体积模量; ϵ 为体积应变,一维情况下满足关系式 $\epsilon=\epsilon_{xx}=\partial u/\partial x$ 。式(8)、式(13)、式(14)构成了饱和土体一维分数阶固结方程组。

将式(13)对 x 积分再对 t 求偏导,代入式(14)得

$$\left(\frac{\alpha^2}{M} + S\right) \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla q \quad (15)$$

将式(8)代入式(15),得到 R-L 分数阶扩散方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c \nabla^2 p + c_\beta D_{0,t}^{1-r} (\nabla^2 p) \quad (16)$$

式中: $c=k/(\gamma_i \alpha^2/M + \gamma_i S)$; $c_\beta=k_\beta/(\gamma_i \alpha^2/M + \gamma_i S)$ 。

3.2 一维固结方程有限差分解

将 R-L 分数阶扩散方程改写为式(17)所示一般形式,其中 $f(x,t)$ 可视为源项。

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = c \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \left[c_\beta D_{0,t}^{1-r} \left(\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \right) \right] + f(x,t), 0 < x < L, 0 < t \leq T \quad (17)$$

为了推导 R-L 分数阶扩散方程的有限差分格式,在 (x,t) 平面上定义一系列差分网格点。令 M 和 N 为两个正整数,分别代表空间域和时间域划分的网格数,则 $dx=L/M$, $dt=T/N$,代表空间和时间方向上的网格间距,网格节点 $x_i=idx(1 \leq i \leq M-1)$, $t_n=ndt(1 \leq n \leq N)$,如图 4 所示。其中 L 和 T 分别为有限域和时间域的长度。

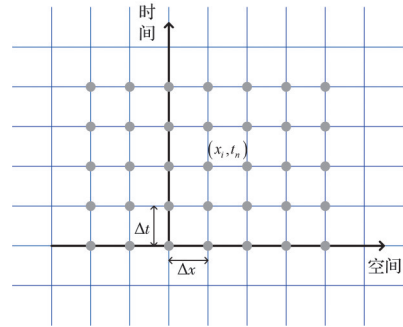


图 4 一维问题有限差分网格示意图

Fig. 4 Schematic diagram of finite difference grid for the one-dimensional problem

以两边透水边界条件为例推导式(17)的有限差分离散格式。

为简化后续表达式,定义算符

$$\delta_x^2 p_i^n = \frac{1}{dx^2} (p_{i-1}^n - 2p_i^n + p_{i+1}^n)$$

$$\delta_x^2 p_i^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\delta_x^2 p_i^n + \delta_x^2 p_i^{n-1})$$

$$\delta_t p_i^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{dt} (p_i^n - p_i^{n-1})$$

在 R-L 分数阶定义下,可以得到近似关系式^[23]

$$\left[D_{0,t}^{1-r} \left(\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} \right) \right] = \frac{dt^{r-1}}{\Gamma(1+r)} \cdot$$

$$\left[-\sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1} - a_{n-k}) \delta_x^2 p_i^k - a_{n-1} \delta_x^2 p_i^0 + \delta_x^2 u_i^n \right] + \frac{t_n^{r-1}}{\Gamma(r)} \delta_x^2 p_i^0 \quad (18)$$

考虑到式(18)中的累加项,在构造式(17)的有限差分格式时, $n=1$ 和 $n>1$ 需分开讨论。

当 $n=1$ 时:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial p_i^1}{\partial t} + \frac{\partial p_i^0}{\partial t} \right] = c_\beta D_{0,t}^{1-r} \left(\frac{\partial^2 p_i^1}{\partial x^2} \right) +$$

$$f_i^1 + \frac{c}{2} \left[\frac{p_{i+1}^1 - 2p_i^1 + p_{i-1}^1}{dx^2} + \frac{p_{i+1}^0 - 2p_i^0 + p_{i-1}^0}{dx^2} \right] \quad (19)$$

整理后化简为

算例 1^[24]:

$$p(0,t)=0, p(1,t)=0, p(x,0)=0 \quad (33)$$

当 $f(x,t)=(1+4t\pi^2)\sin(2\pi x)$, $c_\beta=0$, $c=1$ 时,式(32)退化为经典一维扩散方程,相应初边值条件下的解为 $p(x,t)=\sin(2\pi x)t$ 。

算例 2^[23]:

$$\begin{aligned} p(0,t) &= t^{3+r} + 1 \\ p(1,t) &= e(t^{3+r} + 1), 0 < t \leq 0.5 \quad (34) \\ p(x,0) &= e^x, 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{当 } f(x,t) = e^x \left[(3+r)t^{2+r} - \frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)} - \frac{\Gamma(4+r)}{\Gamma(3+2r)} \right.$$

$\left. t^{2+2r} \right], c_\beta=1, c=0$ 时,式(32)为经典一维分数阶扩散方程,相应初边值条件下的解为 $p(x,t)=e^x(t^{3+r} + 1)$ 。

图 5 给出了两个算例数值解与解析解的对比。由图 5 可知,数值解与解析解一致,验证了计算程序的可靠性。

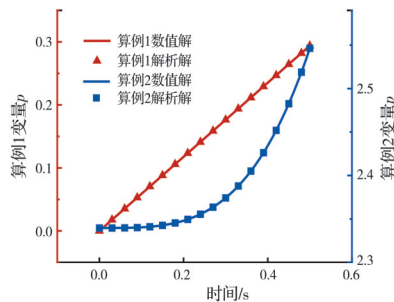


图 5 有限差分程序验证图

Fig. 5 Verification of finite difference procedure

4 一维分数阶固结模型结果与讨论

4.1 数值模型及初边值条件

假定有一个高度为 h 的饱和土柱,以土柱底面为坐标原点, x 轴向上为正方向,土柱顶面受压力 F

作用,如图 6 所示。

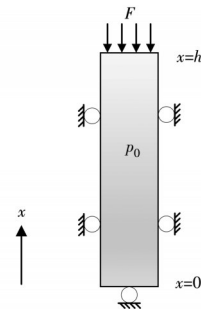


图 6 一维固结模型示意图

Fig. 6 Schematic diagram of a one-dimensional consolidation model

初始条件:

$$u(x,0)=0, p(x,0)=p_0=F \quad (35)$$

边界条件:

工况 1(单面透水)

$$\begin{cases} M \frac{\partial u(h,t)}{\partial x} = -F \\ u(0,t) = 0 \end{cases}, \begin{cases} p(h,t) = 0 \\ \frac{\partial p(0,t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

工况 2(双面透水)

$$\begin{cases} M \frac{\partial u(h,t)}{\partial x} = -F \\ u(0,t) = 0 \end{cases}, \begin{cases} p(h,t) = 0 \\ p(0,t) = 0 \end{cases} \quad (37)$$

在求得超孔隙水压力 p 后,不同时刻土柱的平均固结度按式(38)计算。

$$U_p = 1 - \frac{dx}{p_0 h} \sum_{i=1}^{M-1} p_i^n \quad (38)$$

为了减少曲线拟合过程中所需参数,Alaimo 等^[25]假定数值模型中的渗透系数 $k=0$ 。然而,通过拟合所得反常渗透系数的值远超砂土渗透系数的正常范围。因此,假定 $k \neq 0$ 。

数值模型参数见表 1。

表 1 土柱固结计算参数

Table 1 Calculation parameters for soil column consolidation

柱体高度 h/m	孔隙率 n	比奥系数 α	弹性模量 E/Pa	顶部均布荷载 F/Pa	初始孔压 p_0/Pa	土体体积模量 K_s/Pa	水的体积模量 K_l/Pa	渗透系数 $k/(m/s)$	反常渗透系数 $k_\beta/(m/s^{1-\beta})$	水的密度 $\rho/(kg/m^3)$
1	0.2	1	6.0×10^5	1.0×10^5	1.0×10^5	4×10^{10}	5×10^9	1×10^{-6}	1×10^{-6}	1 000

4.2 固结模型的网格选取

在有限差分数值计算中,空间和时间网格的选取对于数值结果的精确性和计算效率至关重要。

为了确定适当的网格大小,在时间和空间上分别将网格细化,将获得的结果作为基准,然后逐步增大网格,观察网格大小对结果的影响。这种逐步放大网格的方法有助于评估有限差分方法的稳定

性,并为找到最优的计算效率和精确度平衡点提供参考^[26]。

采用的数值模型边界条件与工况 2 一致,同时,将分数阶阶次 β 固定为 0.5,其余参数见表 1。图 7、图 8 纵坐标为 $x/h=0.5$ 时的孔隙水压力差值 $\Delta p/p_0(p/p_0|_{dx} - p/p_0|_{dx_{\text{基准}}}$ 和 $p/p_0|_{dx} - p/p_0|_{dx_{\text{基准}}}$)。

在时间网格统一固定为 2 的情况下,将空间网

格为 0.001 的结果作为标准。空间网格分别为 0.1、0.05、0.02、0.01 时的结果与标准结果的差异如图 7 所示。可以观察到最大误差在 0.008 以内,表明随着空间网格密度的变化,模拟结果的偏差相对较小。此外,当空间网格小于等于 0.05 时,误差曲线波动明显减小。

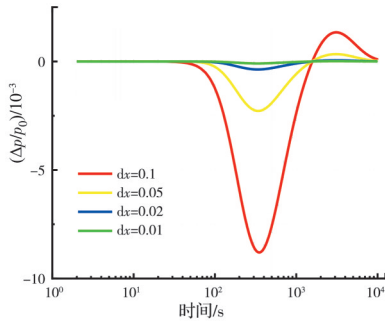


图 7 空间网格误差图
Fig. 7 Error curves due to spatial grids

将空间网格统一固定为 0.05,将时间网格为 0.1 时的结果作为标准。不同时间网格(5.0、3.0、1.0、0.5)所得结果与标准结果的差异如图 8 所示。观察到最大误差在 0.000 5 以内,该值小于空间网格变化引起的误差。表明空间网格的变化对模拟结果的影响相比时间网格更明显。

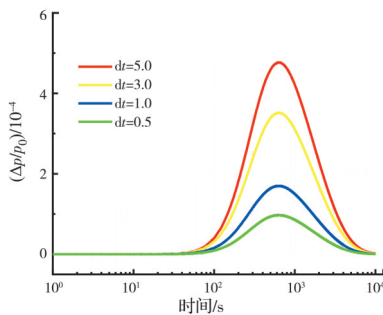


图 8 时间网格误差图
Fig. 8 Error curves due to time grids

因此,对于空间长度 $h = 1\text{ m}$ 和时间跨度 $T = 50\ 000\text{ s}$ 的固结模型,综合考虑计算效率和结果精度两个因素,选取 $dx = 0.02\text{ m}$ 和 $dt = 1\text{ s}$ 作为后续计算中的网格大小。

4.3 参数分析

4.3.1 分数阶阶次 β 对固结过程的影响

图 9 和图 10 分别给出了不同分数阶阶次下土柱内部 $x/h = 0.5$ 时超孔隙水压力消散的过程(当分数阶阶次 $\beta = 0$ 时,式(8)退化为经典达西定律)。两种工况下的结果表明:分数阶固结模型使土柱超孔隙水压力的消散速率明显降低,且分数阶阶次越高,消散速率越低。

图 11 和图 12 分别为不同分数阶阶次下土柱固

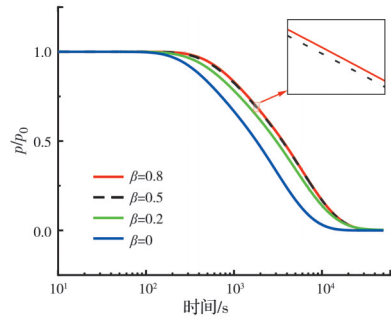


图 9 工况 1 中孔压随时间的变化
Fig. 9 Time evolution of pore pressure under Case 1

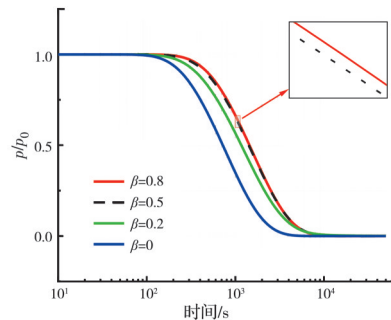


图 10 工况 2 中孔压随时间的变化
Fig. 10 Time evolution of pore pressure under Case 2

结度随时间的变化曲线。可以看出,土柱固结的规律和超孔隙水压力消散曲线的变化趋势一致,即相

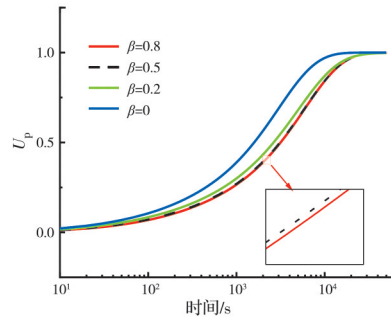


图 11 工况 1 中固结度随时间的变化
Fig. 11 Time evolution of consolidation degree under Case 1

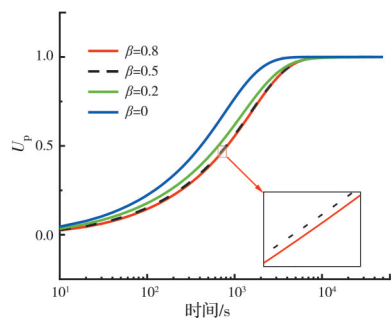


图 12 工况 2 中固结度随时间的变化
Fig. 12 Time evolution of consolidation degree under Case 2

同条件下分数阶固结模型的固结速率低于普通固结模型,且分数阶阶次越高,速率越低。因此,忽略

固结过程中的非线性渗流现象,土体的固结速率会被高估。

此外,两种工况的结果表明,当 $k_\beta = k$ 且 β 为 $0 \sim 0.5$ 时,分数阶阶次变化对曲线的影响较明显,当阶次超过 0.5 后,阶次变化对固结结果的影响几乎可以忽略不计。

4.3.2 反常渗透系数 k_β 对固结过程的影响

以工况 1 为例讨论 k_β 对土体固结过程的影响。图 13 给出了 β 为 0.2 , k_β 分别为 1×10^{-5} 、 8×10^{-6} 、 5×10^{-6} 、 3×10^{-6} 、 1×10^{-6} 和 1×10^{-7} 时土体固结度随时间的变化曲线(其余参数与表 1 一致)。可以看出, k_β/k 值越大,初期固结度越高,随着时间的推移,差异愈发明显。此外, k_β 的增大虽加快了土体固结速率,但总体固结时间十分接近,说明在两个渗透系数中 k 是影响土体固结过程的主要因素。因此,为了简化拟合过程而将修正渗流模型中的渗透系数 k 假定为零不合理。

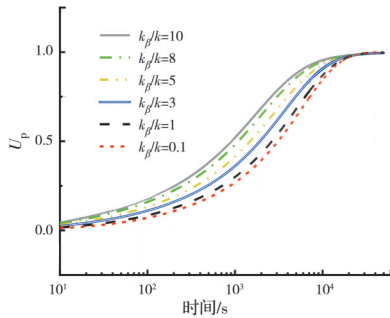


图 13 k_β 对土体固结度的影响

Fig. 13 Influence of k_β on consolidation degree

4.4 分数阶阶次的讨论

与具有明确解释的整数阶微积分相比,分数阶微积分迄今为止还没有一个统一的物理与几何意义。然而,在金融、物理等多个领域中,分数阶导数被认为是适合描述复杂系统的数学工具。记忆性是复杂系统中常见的特征,R-L 分数阶导数中的记忆函数 $\gamma(\beta)$ 展示了其记忆效应^[27]。由式(4)可知, $f(t)$ 的 R-L 分数阶导数可看作是对 $f(t)$ 加权积分后再求导的结果(权函数为 $\gamma(\beta)$);在加权积分中, $f(t)$ 的权值大小与分数阶阶次 β 相关。当 β 趋于 1 时, $\gamma(\beta)$ 退化为没有记忆效应的单位脉冲函数 $\delta(t)$;当 β 趋于 0 时, $\gamma(\beta)$ 变为具有理想记忆性的单位阶跃函数 $H(t)$,即对各个时刻 $f(t)$ 的记忆性完全相同。

提出修正渗流模型的目的是描述在长时间渗流作用下土体渗透率的演化现象。综合考虑分数阶阶次 β 与记忆效应的关系以及土体内压力梯度为

定值的假定,可认为分数阶阶次 β 是反映土体渗透率变化程度的一个变量。如图 14 所示,当 $\beta = 0$ 时(模型退化成达西定律),在长时间渗流作用下,土体渗透率并未发生改变,即土体具有理想记忆性,且压力梯度一定,流速为一定值。随着 $\beta \rightarrow 1$,土体渗透率在固结作用下减小(在固结过程中即表现为土体压密所导致的渗透率减小),即土体记忆性减小,导致流速降低。

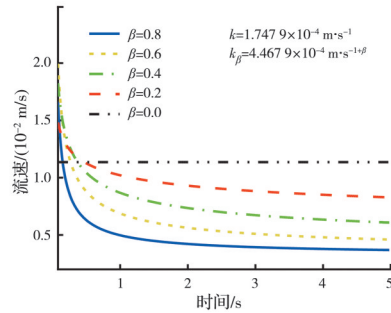


图 14 分数阶阶次对流速的影响

Fig. 14 Influence of fractional order on flow velocity

图 15 为不同分数阶阶次下流体加速度大小随时间的变化(负号表示加速度方向与速度方向相反)。可以看出,随着 β 的增大,流速衰减变快,即流体受到的阻力增大,进一步说明 β 是体现土体在长时间渗流作用下渗透率衰减程度的一个变量。 β 越大,土体记忆效应越弱,渗透率减小程度越大。

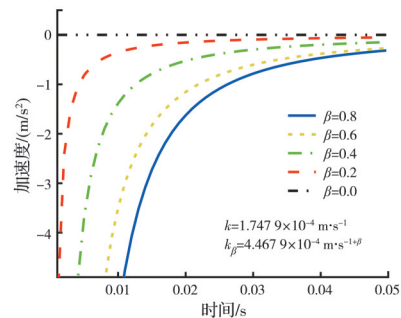


图 15 分数阶阶次对加速度的影响

Fig. 15 Influence of fractional order on flow acceleration

5 结论

采用 R-L 分数阶导数算子对线性达西定律进行修正,以反映长时间渗流过程中土体渗透率的演化规律,通过已有文献的试验数据验证了模型的合理性。根据推导的分数阶扩散方程编写相应的有限差分计算程序,并对固结模型进行参数分析,得到以下主要结论:

1) 提出的修正渗流模型能更好地描述试验现象。同时,在渗透系数 $k \neq 0$ 的情况下,反常扩散系数 k_β 的数值处于砂土渗透系数正常范围内。

2)相同条件下,分数阶固结模型比普通固结模型固结速率更慢。土体固结速率随着分数阶阶次 β 的增大而减缓,且 k_β/k 值越大,该现象越明显。因此,忽略固结过程中的非线性渗流现象会导致土体的固结速率被高估。

3)在两个渗透系数 k 与 k_β 中, k 对土体固结速率的影响占主导地位,为了简化拟合过程而将修正渗流模型中的渗透系数 k 假定为零不合理。

4)在修正渗流模型中,分数阶阶次 β 直接体现了土体渗透率的衰减程度。 β 为0时(模型退化成达西定律),土体呈现出理想记忆性,即渗透率不发生变化。随着 β 的增大,土体记忆效应减弱。 β 值越大,渗透率衰减程度越高,流速越低,固结速度越慢。

参考文献

- [1] 胡浩, 周建, 张晓, 等. 软土渗透各向异性特性及其微观机理研究[J]. 低温建筑技术, 2021, 43(6): 101-105.
Hu H, Zhou J, Zhang X, et al. Study on the permeability anisotropy and microscopic mechanism of soft soil[J]. Low Temperature Architecture Technology, 2021, 43(6): 101-105. (in Chinese)
- [2] 陈信升, 丁选明, 蒋春勇, 等. 吹填珊瑚岛礁钙质软泥的渗透特性试验研究[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2021, 43(4): 58-66.
Chen X S, Ding X M, Jiang C Y, et al. Experimental study on permeability characteristics of hydraulic reclamation calcareous clay in coral reef island[J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2021, 43(4): 58-66. (in Chinese)
- [3] Hansbo S. Consolidation of clay, with special reference to influence of vertical sand drains[C]//Swedish Geotechnical Institute Proceeding. Stockholm: Swedish Geotechnical Institute, 1960: 45-50.
- [4] Swartzendruber D. Modification of Darcy's law for the flow of water in soils[J]. Soil Science, 1962, 93(1): 22-29.
- [5] Bear J. Dynamics of fluids in porous media[M]. New York: American Elsevier Pub. Co, 1972.
- [6] 李传勋, 谢康和, 卢萌盟, 等. 基于非牛顿指数描述的非达西渗流一维固结分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(1): 281-287.
Li C X, Xie K H, Lu M M, et al. Analysis of one-dimensional consolidation with non-Darcy flow described by non-Newtonian index[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(1): 281-287. (in Chinese)
- [7] 刘忠玉, 黄家涛, 夏洋洋, 等. 基于非牛顿指数渗流的饱和黏土一维流变固结分析[J]. 土木工程与管理学报, 2020, 37(3): 1-7.
Liu Z Y, Huang J T, Xia Y Y, et al. One-dimensional rheological consolidation analysis of saturated clay with non-darcian flow based on non-Newtonian index[J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2020, 37(3): 1-7. (in Chinese)
- [8] 李全军, 陈余, 金丹丹, 等. 变荷载下考虑起始水力坡降与连续排水边界的固结解[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2023, 45(1): 122-134.
Li Q J, Chen Y, Jin D D, et al. Analytical solution of consolidation considering initial hydraulic gradient and continuous drainage boundary under variable load[J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2023, 45(1): 122-134. (in Chinese)
- [9] 胡闯, 曹文贵, 崔鹏陆, 等. 考虑变荷载与非达西渗流的软土一维非线性固结分析[J]. 长江科学院院报, 2024, 41(2): 151-158.
Hu M, Cao W G, Cui P L, et al. One-dimensional non-linear consolidation analysis of soft soil considering variable load and non-Darcy seepage[J]. Journal of Changjiang River Scientific Research Institute, 2024, 41(2): 151-158. (in Chinese)
- [10] 李兆帅, 曹文贵, 崔鹏陆, 等. 考虑双对数模型下非达西渗流的软土一维大应变固结分析[J]. 长江科学院院报, 2024, 41(3): 102-109.
Li Z S, Cao W G, Cui P L, et al. One-dimensional large strain consolidation analysis of soft soil considering non-Darcy flow under bilogarithmic model[J]. Journal of Changjiang River Scientific Research Institute, 2024, 41(3): 102-109. (in Chinese)
- [11] Caputo M. Models of flux in porous media with memory [J]. Water Resources Research, 2000, 36(3): 693-705.
- [12] Hossain M E, Mousavizadegan S H, Ketata C, et al. A novel memory based stress strain model for reservoir characterization[J]. Journal of Nature Science and Sustainable Technology, 2007, 1(4): 1-29.
- [13] 杨帅. 非达西渗流和溶质输运的分数阶导数建模研究[D]. 北京: 中国矿业大学(北京), 2019.
Yang S. Study on fractional derivative modeling of non-Darcy seepage and solute transport[D]. Beijing: China University of Mining & Technology, Beijing, 2019. (in Chinese)
- [14] Tu K, Wu Q, Zhang H W, et al. A fractional Darcian model-based analytical solution for non-Darcian flow toward a fully penetrating well in a confined aquifer[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2024, 48(11): 2745-2761.
- [15] 王睿, 周宏伟, 卓壮. 基于分数阶导数的非饱和渗流问题研究[J]. 矿业科学学报, 2019, 4(1): 17-22.
Wang R, Zhou H W, Zhuo Z. Research on unsaturated seepage problems based on fractional order derivative[J]. Journal of Mining Science and Technology, 2019, 4(1):

- 17-22. (in Chinese)
- [16] 王睿,周宏伟,卓壮,等.非饱和土空间分数阶渗流模型的有限差分方法研究[J].岩土工程学报,2020,42(9):1759-1764.
Wang R, Zhou H W, Zhuo Z, et al. Finite difference method for space-fractional seepage process in unsaturated soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 42(9): 1759-1764. (in Chinese)
- [17] 孙志忠,高广花.分数阶微分方程的有限差分方法[M].2版.北京:科学出版社,2021.
Sun Z Z, Gao G H. Finite difference method for fractional differential equations[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2021. (in Chinese)
- [18] Caputo M, Plastino W. Diffusion in porous layers with memory[J]. Geophysical Journal International, 2004, 158(1): 385-396.
- [19] 王学彬.拉普拉斯变换方法解分数阶微分方程[J].西南师范大学学报(自然科学版),2016,41(7):7-12.
Wang X B. On Laplace transform method for solving fractional differential equations[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition), 2016, 41(7): 7-12. (in Chinese)
- [20] Iaffaldano G, Caputo M, Martino S. Experimental and theoretical memory diffusion of water in sand[J]. Hydrology and Earth System Sciences, 2006, 10(1): 93-100.
- [21] 胡宇轩,孙红月,帅飞翔,等.滑坡负压排水方法的试验研究[J].自然灾害学报,2020,29(2):111-117.
Hu Y X, Sun H Y, Shuai F X, et al. Experimental study on negative pressure drainage of landslide[J]. Journal of Natural Disasters, 2020, 29(2): 111-117. (in Chinese)
- [22] 白冰.岩土颗粒介质非等温一维热固结特性研究[J].工程力学,2005,22(5):186-191.
Bai B. One-dimensional thermal consolidation characteristics of geotechnical media under non-isothermal condition[J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(5): 186-191. (in Chinese)
- [23] Zhang Y N, Sun Z Z, Wu H W. Error estimates of Crank-Nicolson-Type difference schemes for the subdiffusion equation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2011, 49(6): 2302-2322.
- [24] 陆金甫,关治.偏微分方程数值解法[M].3版.北京:清华大学出版社,2016.
Lu J F, Guan Z. Numerical solution of partial differential equation[M]. 3rd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2016. (in Chinese)
- [25] Alaimo G, Piccolo V, Cutolo A, et al. A fractional order theory of poroelasticity[J]. Mechanics Research Communications, 2019, 100: 103395.
- [26] 黄建平,刘英辉,李伟,等.深层地热花岗岩体地震波数值模拟及传播机制[J].中国石油大学学报(自然科学版),2024,48(1):63-69.
Huang J P, Liu Y H, Li W, et al. Numerical simulation of seismic wave in deep geothermal rock mass[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2024, 48(1): 63-69. (in Chinese)
- [27] Tarasov V E. Generalized memory: fractional calculus approach[J]. Fractal and Fractional, 2018, 2(4): 23.

(编辑 王秀玲)