DOI: 10.11835/j.issn.2096-6717.2024.115
开放科学(资源服务)标识码OSID:

考虑时效损伤的变系数非定分数阶岩石卸荷蠕变模型

王平[1],杨锦[1],王敬勇[2],吉锋[3]
(1.浙江华东岩土勘察设计研究院有限公司,杭州 310030;2.中国电建集团华东勘测设计研究院有限公司,杭州 310014;3.成都理工大学 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室,成都 610059)

摘　要:传统蠕变模型较难表征岩石的完整蠕变行为,为揭示花岗岩卸荷蠕变力学特性,以某抽水蓄能电站高钾钙碱性Ⅰ型花岗岩为研究对象,取样开展恒轴压卸围压应力路径下的三轴卸荷蠕变试验,分析卸荷过程中花岗岩蠕变的应变特征及岩石损伤演化规律,基于分数阶微积分理论构建精确描述花岗岩蠕变全过程的变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤模型,并扩展到三维应力状态。结果表明:在三轴卸荷蠕变试验中,随着围压的减小,试样每一级的轴向蠕变总量不断增大,轴向总应变以瞬时弹性应变为主,岩石呈应变软化特性,破坏时为脆性破坏;利用变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤模型对三轴卸荷蠕变试验数据进行参数辨识和拟合,拟合结果表明,该模型能较好地描述燕山期高钾钙碱性Ⅰ型花岗岩的蠕变损伤演化特性。

关键词:花岗岩;时效损伤;变系数非定分数阶;卸荷蠕变模型;参数辨识
中图分类号:TU452　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**2096-6717(2026)04-0071-09

Variable coefficient non-integer order rock unloading creep model considering time-dependent damage

WANG Ping[1], YANG Jin[1], WANG Jingyong[2], JI Feng[3]
(1. Zhejiang Huadong Geotechnical Investigation & Design Institute Company Limited, Hangzhou 310030, P. R. China; 2. Power China Huadong Engineering Corporation Limited, Hangzhou 310014, P. R. China; 3. State Key Laboratory of Geohazard Prevention and Geoenvironment Protection, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, P. R. China)

Abstract: Traditional creep models are difficult to characterize the complete creep behavior of rock. In order to reveal the unloading creep mechanical properties of granite, the high-potassium calc-alkaline I-type granite of a pumped storage power station was taken as the research object, and the triaxial unloading creep test under the constant axial pressure and unloading confining pressure stress path was carried out. The creep strain characteristics and rock damage evolution pattern of granite during the unloading process were analyzed. Based on the fractional calculus theory, a variable coefficient non-integer order unloading creep damage model which can accurately describe the whole process of granite creep was constructed and extended to the three-dimensional stress state. The results show that in the triaxial unloading creep test, with the decrease of

收稿日期:2024-05-22
基金项目:国家自然科学基金(41977237)
作者简介:王平(1979-),男,正高级工程师,主要从事水利水电、岩土工程地质勘查研究,E-mail:wang_p2@hdec.com。
Received: 2024-05-22
Foundation item: National Natural Science Foundation of China (No.41977237)
Author brief: WANG Ping (1979-), senior engineer, main research interests: water conservancy and hydropower, geotechnical engineering geological exploration, E-mail: wang_p2@hdec.com.

confining pressure, the total axial creep strain of each stage of the sample increases continuously, and the total axial strain is dominated by instantaneous elastic strain. The rock exhibits strain softening characteristics and presents brittle failure. The parameter identification and fitting of the triaxial unloading creep test data were carried out by using the variable coefficient non-integer order unloading creep damage model. The fitting results show that the model can better describe the creep damage evolution characteristics of the high-potassium calc-alkaline I-type granite in the Yanshan period.

Keywords: granite; aging damage; variable coefficient non-integer order; unloading creep model; parameter identification

随着众多抽水蓄能电站工程的建设,深埋地下的洞室围岩长期稳定性问题不可忽视[1]。围岩的变形失稳破坏与时间因素关系密切[2]。某抽水蓄能电站所在区域位于秦岭-大别造山带附近,沿该造山带形成了一系列受大陆深俯冲影响的岩石带[3],岩性为燕山期高钾钙碱性Ⅰ型花岗岩,该区域构造复杂,花岗岩体沿着断裂带产出,局部切穿断裂带[4]。水电站地下厂房岩体节理及断层较为发育,由于建设过程中开挖临空面的形成,岩体性质劣化,边墙、拱顶出现了多处局部块体的剪切滑移破坏及楔形体破坏,岩石蠕变行为随着时间的推移不断发展,可能导致更大范围的破坏。因此,研究这类花岗岩的卸荷蠕变力学演化性质对于该地区深埋地下洞室围岩的长期稳定性及相关支护设计意义重大。

关于非线性蠕变本构模型的构建主要有两种方法[5-6]:一是通过构建新的非线性元件与传统元件串并联组合或直接替换传统元件,如Zhao等[7]提出了反映二辉橄榄岩黏弹塑性流变行为的非线性流变模型;二是通过引入损伤理论,将经典蠕变模型中的蠕变参数非定常化,如宋勇军等[8]通过蠕变试验得到描述碳质板岩蠕变特性的非线性损伤流变模型,Li等[9]建立了用于描述砂岩在冻融循环作用下非线性蠕变特性的蠕变损伤模型。

近年来,部分学者开始将分数阶微积分理论引入岩土材料理论模型研究中[10]。分数阶微积分阶数可为有理分数、无理数甚至复数,该理论物理意义清晰,形式简练,能较好地描述岩石应变的非线性演化,已应用于实际工程问题中,如Riemann-Liouville(R-L)积分常被用于岩土材料蠕变本构模型构建。Zhou等[11]在Abel黏壶的基础上、在分数阶导数的阶数上引入统计损伤变量D,构造非线性损伤黏壶来描述花岗岩的蠕变行为;Wei等[12]通过分数阶微积分理论建立岩石非线性黏弹塑性蠕变模型,并对试验结果进行了拟合比较;Deng等[13]利用分数阶导数定义,建立了考虑温度-应力-时间耦合损伤的单轴和三轴分数阶蠕变模型;Li等[14]基于Riemann-Liouville型积分函数,借鉴经典建模思想,建立了考虑低温-损伤-应力耦合的5元非线性蠕变损伤本构方程,并进行了模型验证。综上,学者基于分数阶微积分理论,提出了不同岩石的蠕变损伤本构模型,用于岩石蠕变过程的预测。

在应用分数阶微积分时,损伤主要考虑在流变参数(如黏性系数和弹性模量等)的非定常化,而分数阶阶数也随时间和应力的变化而变化[15]。笔者基于分数阶微积分理论得到分数阶Burgers模型,同时考虑蠕变过程中流变参数和分数阶阶数的非定常化,构建了燕山期高钾钙碱性Ⅰ型花岗岩的非定常分数阶卸荷蠕变损伤力学模型,并对该模型进行参数辨识及拟合验证。

1 花岗岩三轴卸荷蠕变试验

1.1 卸荷蠕变试验设备

试验设备为YSJ-01-00型岩石三轴蠕变试验机,见图1。

图1 试验加载系统

Fig. 1 Test loading system

1.2 试样制备及试验方案

试验的高钾钙碱性Ⅰ型花岗岩试样取自某抽水蓄能电站地下厂房内,在室内取芯制作成试验所需标准圆柱样,如图2所示。

抽蓄电站地下厂房所在区域的最大主应力约10.0 MPa,且以自重应力为主。为研究该区域真实地应力条件下高钾钙碱性Ⅰ型花岗岩的蠕变力学特性,首先分别进行2.5、5.0、7.5、10.0 MPa围压下的常规三轴压缩试验,得到花岗岩三轴压缩峰值强度。考虑实际区域主应力大小、设备使用状态、试验耗时,将试验围压设计为5.0、7.5 MPa,进行后

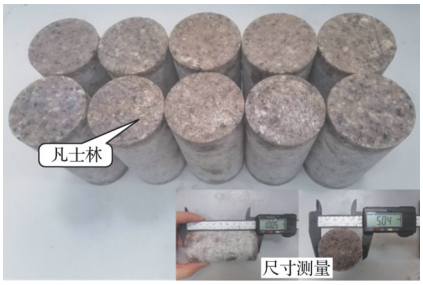


图 2　三轴卸荷蠕变标准试样

Fig. 2　Standard specimens for triaxial unloading creep test

续三轴卸荷蠕变试验。

试验采用恒轴压分级卸围压的方式进行，恒定轴压分别取地下厂房花岗岩在围压 5.0、7.5 MPa 条件下常规三轴压缩峰值强度的 70%，分别为 138.0、155.0 MPa。试验采用荷载控制加载速率的方式，首先在静态水压条件下以应力控制方式将轴压、围压逐渐施加至预设值(5.0、7.5 MPa)，然后保持围压恒定，同样以应力控制方式施加轴压至预设值(138.0、155.0 MPa)，最后保持轴压不变，根据图 3 所示应力路径开始逐级卸围压。按照该方案进行蠕变试验，直至试样破坏。

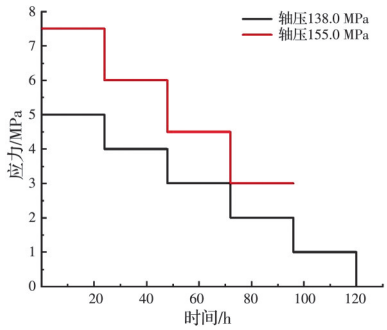


图 3　三轴卸荷蠕变试验的应力路径

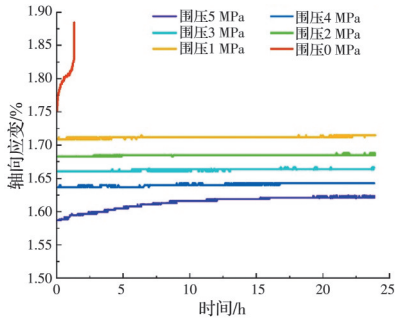
Fig. 3　Stress path of triaxial unloading creep test

试验通过应力方式控制，轴压加载速率为 5.0 MPa/min，围压卸载速率与加载速率一致，均为 1.0 MPa/min，每一级荷载的持续时间均为 24 h，直到试样破坏，整个试验过程中保持轴压恒定不变。设计围压的卸载水平为 6 级，不同轴压下每级的卸载水平相同，其中轴压 155 MPa 条件下第 4 级卸载时即产生破坏。

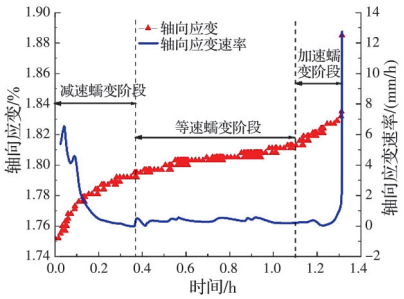
1.3　试验结果分析

图 4 和图 5 分别为轴压 138.0、155.0 MPa 下花岗岩试样的三轴卸荷蠕变时程曲线，表 1 为花岗岩试样的卸荷蠕变试验数据。

由图 4(b)可知，当轴向荷载为 138.0 MPa、围压为 0 MPa 时，岩石试样出现了典型的蠕变三阶段，蠕变应变速率先减小后增大。当 t=1.11 h 时，



(a) 各级围压下的轴向应变与时间曲线



(b) 最后一级轴向应变及蠕变速率曲线

图 4　轴压 138.0 MPa 时三轴卸荷蠕变试验曲线

Fig. 4　Triaxial unloading creep test curves under axial pressure of 138.0 MPa

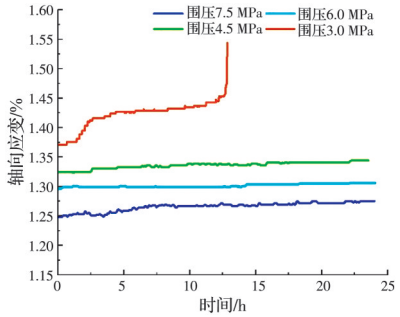


图 5　轴压 155.0 MPa 时三轴卸荷蠕变试验曲线

Fig. 5　Triaxial unloading creep test curves under axial pressure of 155.0 MPa

试样进入加速蠕变阶段(即轴向应变量 ε_a)，直至试样最终发生破坏。整个加速蠕变阶段持续时间较短，仅占最后一级加载总时长的 14.6%，表明花岗岩试样的卸荷蠕变破坏为脆性破坏。

表 1 数据显示，在轴向压力一致的情况下，瞬时轴向应变增量随围压的减小而增大，表明花岗岩试样具有应变软化特性；在不同轴压条件下，第 1 级围压下的瞬时弹性应变增量远大于其他围压级别，这是由于岩石试样内部本身存在孔隙及裂缝，在第 1 次施加轴压及围压的作用下，大部分被压密，导致变形量较大；在各级围压作用下，试样的轴向蠕变总量基本上随着围压的减小呈增大趋势，但与瞬时弹性应变的比值低于 15%，表明花岗岩试样在低围压状态下蠕变现象更为明显，但蠕变全过程中的总

应变仍以瞬时弹性应变为主。

表 1 花岗岩试样三轴卸荷蠕变实验数据

Table 1 Triaxial unloading creep test data of granite specimens

轴压/MPa	围压/MPa	偏应力/MPa	瞬时弹性应变 ε_0/%	瞬时弹性应变增量 $\Delta\varepsilon_0$/%	轴向蠕变总量 ε_c/%	$(\varepsilon_c/\varepsilon_0)$/%
138.0	5.0	133.0	1.587	1.587	0.034	2.14
138.0	4.0	134.0	1.637	0.016	0.003	0.18
138.0	3.0	135.0	1.661	0.021	0.004	0.24
138.0	2.0	136.0	1.683	0.018	0.006	0.35
138.0	1.0	137.0	1.709	0.020	0.013	0.76
138.0	0.0	138.0	1.752	0.030	0.133	7.59
155.0	7.5	147.5	1.248	1.248	0.031	2.48
155.0	6.0	149.0	1.296	0.017	0.010	0.77
155.0	4.5	150.5	1.325	0.019	0.019	1.43
155.0	3.0	152.0	1.371	0.027	0.173	12.62

注:瞬时弹性应变增量=瞬时弹性应变-上一级瞬时弹性应变-上一级轴向蠕变总量

2 变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤本构模型构建

2.1 常系数Abel黏壶元件

分数阶微积分通常采用Riemann-Liouville理论进行定义[16]。在该理论中,关于时间 t 的连续函数 $f(t)$ 的 θ 阶积分定义为

$$\frac{\mathrm{d}^{-\theta}f(t)}{\mathrm{d}t^{-\theta}}=t_0D_t^{-\theta}f(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)}f(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (1)$$

连续函数 $f(t)$ 的 θ 阶微分定义为

$$\frac{\mathrm{d}^{-\theta}f(t)}{\mathrm{d}t^{-\theta}}=t_0D_t^{-\theta}f(t)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[t_0D_t^{-(n-\theta)}f(t)\right] \quad (2)$$

式中:θ 为连续函数 $f(t)$ 的阶数,是大于零的正实数;$\Gamma(\theta)$ 为 Gamma 函数,定义为 $\Gamma(\theta)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{\theta-1}$,$\mathrm{Re}(\theta)>0$,其中 $\mathrm{Re}(\theta)$ 表示取 θ 的实部。

岩石材料普遍具有黏弹性特性,传统蠕变本构模型大多通过将基本元件串、并联组合来实现对岩石黏弹性特性的描述,殷德顺等[17]提出了一种可以直接描述岩土材料黏弹性特性的元件,如图 6 所示。

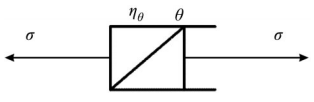


图 6 常系数Abel黏壶元件

Fig. 6 Constant-coefficient Abel dashpot element

其应力-应变关系满足式(3)所示方程。

$$\sigma(t)=\frac{\eta\mathrm{d}^{\theta}\left[\varepsilon(t)\right]}{\mathrm{d}t^{\theta}},0\leqslant\theta\leqslant1 \quad (3)$$

式中:η 为黏滞系数;θ 为阶数。

从式(3)可以看出,当阶数 θ 取两端极值时,该软体元件会分别退化成理想弹性体和理想流体。因此,当阶数 θ 取(0,1)之间任意数时,该软体元件可以描述岩土材料的非线性变化过程。

当应力 $\sigma(t)$ 保持不变时,对式(3)两端进行积分,可得到该元件的蠕变特性。

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma}{\eta}\cdot\frac{t^{\theta}}{\Gamma(1+\theta)},0\leqslant\theta\leqslant1 \quad (4)$$

2.2 变系数非定阶Abel黏壶元件

经典蠕变模型中的关键蠕变参数均为定值,对岩石实际加速蠕变阶段不适用,其原因在于,岩石在长期荷载作用下蠕变时会发生损伤,岩石性能劣化[18];这种劣化的定量表现为弹性模量 E、黏性系数 η 等蠕变模型参数的改变,引用损伤变量 D 来描述劣化程度。

考虑损伤导致的黏性系数 η_θ 和分数阶阶数 θ 的变化,构建一个变系数非定阶的 Abel 黏壶元件,如图 7 所示。

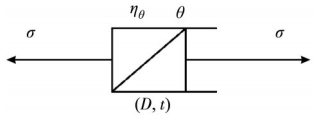


图 7 变系数非定阶Abel黏壶元件

Fig. 7 Variable-coefficient non-fixed order Abel dashpot element

图 7 中的变系数非定阶 Abel 黏壶元件实质上是基于损伤累积的 Abel 黏壶体,该变系数非定阶黏壶元件的本构关系为

$$\sigma(t)=\eta_\theta(D,t)\frac{\mathrm{d}^{\theta(D,t)}\left[\varepsilon(t)\right]}{\mathrm{d}t^{\theta(D,t)}},0\leqslant\theta(D,t)\leqslant1 \quad (5)$$

式中:$\sigma(t)$ 和 $\varepsilon(t)$ 分别为变系数非定阶 Abel 黏壶元件的应力和应变;$\eta_\theta(D,t)$ 为变系数非定阶 Abel 黏壶的黏性系数;$\theta(D,t)$ 为变系数非定阶 Abel 黏壶的阶数。

考虑荷载长期作用对黏性系数和分数阶阶数的影响,可得

$$\eta^{\theta(D,t)}(D,t)=\eta^{\theta(D,t)}\times(1-D_1) \quad (6)$$

$$\theta(D,t)=\theta\times(1-D_2) \quad (7)$$

式中:η_1 为变系数非定阶 Abel 黏壶元件的初始黏性系数;D_1 和 D_2 为损伤变量,$0\leqslant D_1(D_2)<1$。

损伤变量与时间的函数关系为[19-20]

$$D=1-\mathrm{e}^{-\alpha t} \quad (8)$$

式中:α 为与花岗岩材料性质相关的系数;t 为时间。

将式(8)带入式(6)、式(7)中,可得到变系数非定阶 Abel 黏壶元件的黏性系数及分数阶阶数与时间的关系为

$$\eta_\theta(D,t)=\eta_\theta \mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{9}$$

$$\theta(D,t)=\theta \mathrm{e}^{-\alpha_\theta t} \tag{10}$$

联立式(9)、式(10)和式(5)，积分后可得到变系数非定阶Abel黏壶元件的一维本构方程为

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{\eta_\theta \mathrm{e}^{-\alpha t}} t^{\theta \mathrm{e}^{-\alpha_\theta t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{\Gamma\left[1+k+\theta(-\alpha_\theta t)\right]}, 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \tag{11}$$

在实际试验过程中，岩石试验依次经历了减速、匀速以及加速蠕变阶段，学者认为岩石在衰减和稳定蠕变阶段只产生可恢复的黏弹性变形。对于在哪个阶段考虑岩石损伤也有两种看法，一种认为岩石加速蠕变发生前，岩石损伤可以忽略，岩石损伤主要发生在加速蠕变阶段，只考虑加速蠕变阶段的损伤量；另一种认为黏塑性变形的增长是岩石发生蠕变破坏的关键，且只有当应力水平达到某一水平值时，岩石内部才会发生损伤[21]。

经典蠕变模型的缺陷仅在于不能准确描述岩石的加速蠕变过程。笔者认为，蠕变应变达到某一值之后，应变速率陡增，岩石出现加速蠕变的变形趋势，此时需要考虑损伤程度。加速蠕变过程中的损伤会发生迅速累积，在此阶段，岩石的黏性系数η和分数阶阶数才会发生改变。

构建的非线性蠕变本构模型将试验过程中岩石应变的变化作为黏塑性变形出现的条件，即将稳态蠕变阶段与加速蠕变阶段交点处对应的应变值ε_a作为变系数非定阶Abel黏壶元件的启动条件。当总应变$\varepsilon<\varepsilon_a$时，该黏壶元件可视为理想固体，不发生变形；当总应变$\varepsilon\geqslant\varepsilon_a$时，该黏壶元件正常启用。该黏壶元件的蠕变方程为

$$\begin{cases} \varepsilon=0, \varepsilon<\varepsilon_a \\ \varepsilon=\dfrac{\sigma}{\eta_\theta \mathrm{e}^{-\alpha t}} t^{\theta \mathrm{e}^{-\alpha_\theta t}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{\Gamma\left[1+k+\theta(-\alpha_\theta t)\right]}, \varepsilon \geqslant \varepsilon_a \end{cases} \tag{12}$$

式中：ε为变系数非定阶Abel黏壶元件的应变值；ε_a为加速蠕变阶段的起始临界应变值，可根据室内三轴卸荷蠕变试验曲线确定。

2.3　变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤模型的构建

基于传统Burgers模型，使用Abel黏壶元件得到分数阶Burgers模型，用于描述岩石的衰减蠕变阶段弹塑性变形；同时引入一个考虑损伤的变系数非定阶Abel黏壶元件，用于描述加速蠕变阶段的黏塑性变形。构建考虑时效损伤的变系数非定分数阶卸荷蠕变模型(图8)，其中弹性元件的应变为ε_1，Abel黏壶元件的应变为ε_2，分数阶黏弹性元件的应变为ε_3，变系数非定阶Abel黏壶元件的黏塑性应变为ε_4，该模型的总应变ε为

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4 \tag{13}$$

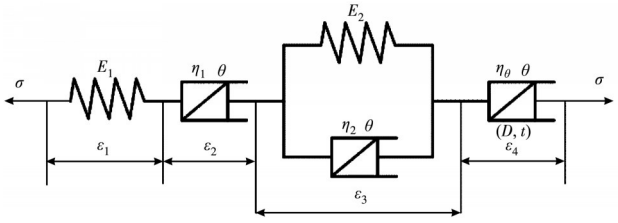


图8　变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤模型

Fig. 8　Variable-coefficient non-integer order unloading creep damage model

模型中各元件的应力-应变关系为

1)弹性元件

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma}{E_1} \tag{14}$$

式中：E_1为弹性元件的弹性模量。

2)Abel黏壶元件

$$\varepsilon_2=\frac{\sigma}{\eta_1}\cdot\frac{t^\theta}{\Gamma(1+\theta)}, 0\leqslant\theta\leqslant1 \tag{15}$$

式中：η_1为Abel黏性元件的黏滞系数；θ为阶数。

3)分数阶黏弹性元件

由元件串、并联组合模型理论可知

$$\begin{cases} \varepsilon_3=\varepsilon_{\mathrm{A}}+\varepsilon_{\mathrm{H}} \\ \sigma=\dfrac{\eta_2 \mathrm{d}^\theta\left[\varepsilon_3\right]}{\mathrm{d}t^\theta}+E_2\varepsilon_3 \end{cases} \tag{16}$$

式中：ε_{A}、ε_{H}分别为Abel黏性元件和弹性元件的应变；η_2为分数阶黏弹性元件的黏滞系数；E_2为弹性元件的弹性模量。

根据式(16)中的应力表达式变化可得

$$\frac{\sigma}{\eta_2}=\frac{\mathrm{d}^\theta\left[\varepsilon_3\right]}{\mathrm{d}t^\theta}+\frac{E_1}{\eta_2}\varepsilon_3 \tag{17}$$

由分数阶微积分理论可知，Riemann-Liouville分数阶导数与Caputo分数阶导数的关系为

$$\frac{\mathrm{d}^\theta\left[\varepsilon(t)\right]}{\mathrm{d}t^\theta}=\frac{{}^{\mathrm{C}}\mathrm{d}^\theta\left[\varepsilon(t)\right]}{\mathrm{d}t^\theta}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\theta}\varepsilon^k(0)}{\Gamma(k-\theta+1)} \tag{18}$$

式中：$\dfrac{\mathrm{d}^\theta\left[\varepsilon(t)\right]}{\mathrm{d}t^\theta}$为R-L分数阶导数；$\dfrac{{}^{\mathrm{C}}\mathrm{d}^\theta\left[\varepsilon(t)\right]}{\mathrm{d}t^\theta}$为Caputo分数阶导数。

蠕变损伤模型的应变初始值$\varepsilon(0)=0$，将其代入式(18)可得

$$\frac{\mathrm{d}^\theta\left[\varepsilon(t)\right]}{\mathrm{d}t^\theta}=\frac{{}^{\mathrm{C}}\mathrm{d}^\theta\left[\varepsilon(t)\right]}{\mathrm{d}t^\theta} \tag{19}$$

Laplace变换具有以下性质

$$\begin{cases} L\left[af(t)\right]=aF(s) \\ L\left[\dfrac{\mathrm{d}^\theta\left[f(t)\right]}{\mathrm{d}t^\theta}\right]=s^\theta F(s)-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{k-1}(0) \end{cases} \tag{20}$$

式(17)可以看作$\varepsilon(t)$的微分方程，根据式(20)中的Laplace变换形式，结合式(17)和式(19)，可得

到式(17)的拉普拉斯变化式

$$\frac{\sigma}{\eta_2 s}=s^{\theta}F(s)+\frac{E_1}{\eta_2}F(s) \tag{21}$$

式中:$F(s)$为$\varepsilon(t)$的拉氏变换;s为拉氏变换空间的复变量。对式(21)求解可得

$$F(s)=\frac{\sigma}{\eta_2 s\left(s^{\theta}+\dfrac{E_1}{\eta_2}\right)} \tag{22}$$

对式(22)进行Laplace逆变换,得出应变表达式

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma}{\eta_2}\int_0^t(t-s)^{\theta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k\theta+\theta)}\left[-\frac{E_1}{\eta_2}(t-s)^{\theta}\right]\mathrm{d}s \tag{23}$$

对式(23)求解可得

$$\varepsilon_3=\frac{\sigma}{\eta_2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\dfrac{E_1}{\eta_2}\right)^k t^{(k\theta+\theta)}}{\theta(1+k)\Gamma(k\theta+\theta)} \tag{24}$$

4)变系数非定阶Abel黏壶元件

变系数非定阶Abel黏壶元件的本构方程为

$$\begin{cases}\varepsilon_4=0,\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}\\ \varepsilon_4=\dfrac{\sigma}{\eta_\theta \mathrm{e}^{-\alpha t}}t^{\theta\mathrm{e}^{-\alpha_\theta t}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{\Gamma\left[1+k+\theta(-\alpha_\theta t)\right]},\varepsilon\geqslant\varepsilon_{\mathrm{a}}\end{cases} \tag{25}$$

根据元件模型的串并联组合关系,并结合以上元件的本构方程,可得到该蠕变损伤模型的蠕变方程,如式(26)所示。

$$\begin{cases}\varepsilon=\dfrac{\sigma}{E_1}+\dfrac{\sigma}{\eta_1}\cdot\dfrac{t^{\theta}}{\Gamma(1+\theta)}+\dfrac{\sigma}{\eta_2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-E_1/\eta_2\right)^k t^{(k\theta+\theta)}}{\theta(1+k)\Gamma(k\theta+\theta)},\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}\\ \varepsilon=\dfrac{\sigma}{E_0}+\dfrac{\sigma}{\eta_1}\cdot\dfrac{t^{\theta}}{\Gamma(1+\theta)}+\dfrac{\sigma}{\eta_2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-E_1/\eta_2\right)^k t^{(k\theta+\theta)}}{\theta(1+k)\Gamma(k\theta+\theta)}+\dfrac{\sigma}{\eta_\theta \mathrm{e}^{-\alpha t}}t^{\theta\mathrm{e}^{-\alpha_\theta t}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{\Gamma\left[1+k+\theta(-\alpha_\theta t)\right]},\varepsilon\geqslant\varepsilon_{\mathrm{a}}\end{cases} \tag{26}$$

2.4 变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤模型的三维推导

式(26)为该蠕变损伤模型在一维应力状态下的蠕变方程,仅适用于岩石仅受轴向应力作用的情况,需将其扩展到三维应力状态来描述实际应力环境中岩石的蠕变过程。采用恒轴压卸围压的方式进行试验,试样经历由弹性阶段到塑性阶段的转变,屈服面与应力状态之间的关系呈动态变化,在三维应力空间中表现为应力状态随着围压的降低逐渐靠近至超过屈服面。在屈服面内,Abel黏壶主要描述黏弹性变形,其应变随着时间缓慢累积且可以部分恢复;当应力状态超出屈服面时,Abel黏壶的变形即转变为不可恢复的黏塑性变形。

假设弹性元件、Abel黏性元件、分数阶黏弹性元件及变系数非定阶Abel黏性元件的应变量分别为$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^1$、$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2$、$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^3$、$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^4$。则模型的总应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^1+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^3+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^4 \tag{27}$$

根据弹塑性理论,应力-应变表达式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}_{ij}=\boldsymbol{S}_{ij}+\boldsymbol{\delta}_{ij}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\boldsymbol{e}_{ij}+\boldsymbol{\delta}_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}}\end{cases} \tag{28}$$

式中:$\boldsymbol{S}_{ij}$为应力偏张量;$\boldsymbol{\delta}_{ij}$为标量型张量,$i=j$时$\boldsymbol{\delta}_{ij}=1$,$i\neq j$时$\boldsymbol{\delta}_{ij}=0$;$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}$为平均正应力;$\boldsymbol{e}_{ij}$为应变偏张量;$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}}$为平均正应变。

1)弹性元件

根据式(28),可将瞬时弹性元件的应力张量和应变张量分解为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}_{ij}^1=\boldsymbol{S}_{ij}^1+\boldsymbol{\delta}_{ij}^1\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^1=\boldsymbol{e}_{ij}^1+\boldsymbol{\delta}_{ij}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}}\end{cases} \tag{29}$$

由广义Hooke定律可得瞬时弹性元件的三维本构关系

$$\begin{cases}\sigma_{\mathrm{m}}=3K_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{m}}\\ \boldsymbol{S}_{ij}^1=2G_0\cdot\boldsymbol{e}_{ij}^1\end{cases} \tag{30}$$

式中:K_0为体积模量;G_0为剪切模量。

将式(30)代入式(29)中,可得弹性元件的三维应力-应变关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^1=\frac{\boldsymbol{S}_{ij}^1}{2G_0}+\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}}{3K_0}\boldsymbol{\delta}_{ij}^1 \tag{31}$$

2)Abel黏性元件

在黏性变形过程中,应力球张量可以忽略不计[22]。因此,可以只考虑应力偏张量对岩石蠕变应变的影响,即$\sigma_{ij}^3=S_{ij}^3$。则Abel黏性元件在三维应力状态下的蠕变方程为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2=\frac{\boldsymbol{S}_{ij}^2}{\eta_1}\cdot\frac{t^{\theta}}{\Gamma(1+\theta)} \tag{32}$$

3)分数阶黏弹性元件

分数阶黏弹性体的三维本构关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^3=\frac{1}{2G_2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-G_2/\eta_2\right)^k t^{(k\theta+\theta)}}{\theta(1+k)\Gamma(k\theta+\theta)}\right]\boldsymbol{S}_{ij}^3 \tag{33}$$

4)变系数非定阶Abel黏壶元件

变系数非定阶Abel黏壶元件本质上仍是分数阶黏性元件,因此,参考常系数Abel黏性元件的本

构方程可得变系数非定阶 Abel 黏壶元件在三维应力状态下的蠕变方程

$$\varepsilon_{ij}^{4}=\frac{\boldsymbol{S}_{ij}^{4}}{\eta_{\theta}\mathrm{e}^{-\alpha t}}t^{\theta\mathrm{e}^{-\alpha_{\theta}t}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^{k}}{\Gamma\left[1+k+\theta(-\alpha_{\theta}t)\right]} \tag{34}$$

室内岩石三轴压缩蠕变试验一般为假三轴试验，即 $\sigma_1>\sigma_2=\sigma_3$。令 $i=j=1$，则有

$$\begin{cases}\sigma_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{3}(\sigma_1+2\sigma_3)\\ \boldsymbol{S}_{ij}=\sigma_1-\sigma_{\mathrm{m}}=\dfrac{2}{3}(\sigma_1-\sigma_3)\end{cases} \tag{35}$$

将式(31)～式(35)代入式(27)，可得式(36)所示的非线性蠕变损伤模型在三维应力状态下的蠕变本构方程。

$$\begin{cases}\varepsilon_{ij}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{3G_1}+\dfrac{\sigma_1+2\sigma_3}{9K_1}+\dfrac{2(\sigma_1-\sigma_3)}{3\eta_1}\cdot\dfrac{t^{\theta}}{\Gamma(1+\theta)}+\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{3\eta_2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-G_2/\eta_2\right)^{k}t^{(k\theta+\theta)}}{\theta(1+k)\Gamma(k\theta+\theta)},\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}\\ \varepsilon_{ij}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{3G_1}+\dfrac{\sigma_1+2\sigma_3}{9K_1}+\dfrac{2(\sigma_1-\sigma_3)}{3\eta_1}\cdot\dfrac{t^{\theta}}{\Gamma(1+\theta)}+\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{3\eta_2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-G_2/\eta_2\right)^{k}t^{(k\theta+\theta)}}{\theta(1+k)\Gamma(k\theta+\theta)}+\\ \qquad\dfrac{2(\sigma_1-\sigma_3)}{3\eta_{\theta}\mathrm{e}^{-\alpha t}}t^{\theta\mathrm{e}^{-\alpha_{\theta}t}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^{k}}{\Gamma\left[1+k+\theta(-\alpha_{\theta}t)\right]},\varepsilon\geqslant\varepsilon_{\mathrm{a}}\end{cases} \tag{36}$$

式(36)中共有 9 个参数：K_1、G_1、η_1、η_2、G_2、θ、η_{θ}、α 和 α_{θ}。根据弹性模量 E 和泊松比 ν 计算得到体积模量 K_1 和剪切模量 G_1。

$$\begin{cases}K_1=\dfrac{E}{3(1-2\nu)}\\ G_1=\dfrac{E}{2(1+\nu)}\end{cases} \tag{37}$$

由胡克定律可知

$$E=\frac{\sigma_1-2\nu\sigma_3}{\varepsilon} \tag{38}$$

根据式(37)和式(38)可求出各级偏应力作用下的体积模量 K_1 和剪切模量 G_1。

2.5　模型拟合验证

利用 1-Stopt 软件将各级偏应力作用下的体积模量 K_1 和剪切模量 G_1 代入模型的三维蠕变方程(式(36))，进行逐次线性迭代求解，当计算结果收敛时，即可拟合得到剩余未求解的流变力学参数，拟合精度由 R^2 来表征。

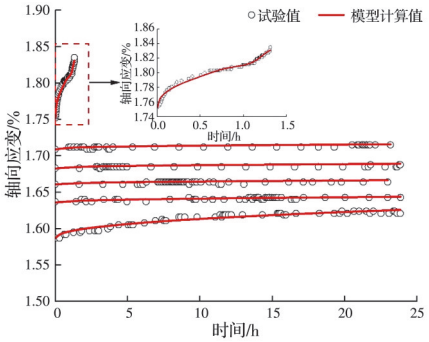
参数辨识结果见表 2。由表 2 可以看出，η_1、η_2 随着围压的减小呈现出减小的趋势。这是因为在较高围压下，岩石内部的裂隙和孔隙被压缩，变形受到限制，因此黏滞系数较高；随着围压的减小，孔隙和裂隙逐渐张开，岩石材料的流动性增加，黏滞系数减小。分数阶阶数 θ 同样随围压的减小而减小，当围压较大时，岩石表现出更稳定的黏弹性特性，分数阶阶数较高；当围压降低时，岩石内部结构更不稳定，使得蠕变过程的时间依赖性变化增大，非线性黏弹性效应更显著，分数阶阶数减小。剪切模量 G_2 也随围压的减小而减小，在高围压条件下，岩石颗粒之间紧密接触，增强了整体结构的刚性；随着围压的降低，岩石颗粒之间的咬合和摩擦力减弱，岩石对剪切变形的抵抗能力下降。

为验证该模型的合理性，将计算出的流变力学参数代入模型的蠕变方程，得到模型理论曲线，与基于试验数据绘制的曲线进行对比，如图 9 所示。

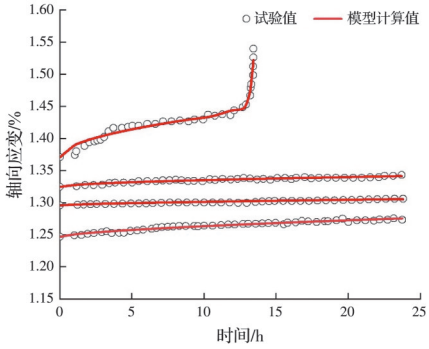
表 2　考虑时效损伤的变系数非定分数阶卸荷蠕变模型参数辨识结果

Table 2　Parameter identification results of variable-coefficient non-integer order unloading creep model considering aging damage

σ_1/MPa	σ_3/MPa	ε/%	K_1/GPa	G_1/GPa	η_1/(GPa·h)	η_2/(GPa·h)	G_2/GPa	θ	η_{θ}/(GPa·h)	α	α_{θ}	R^2
138.0	5.0	$\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}$	50.93	35.07	153.65	107.73	110.42	0.442				0.935 0
138.0	4.0	$\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}$	49.54	34.11	89.59	92.35	84.67	0.437				0.962 5
138.0	3.0	$\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}$	48.98	33.72	70.00	75.76	79.65	0.430				0.943 0
138.0	2.0	$\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}$	48.49	33.38	56.40	55.73	60.54	0.418				0.922 0
138.0	1.0	$\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}$	47.91	32.98	44.09	39.30	40.28	0.350				0.936 6
138.0	0.0	$\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}$	46.88	32.28	24.01	27.91	28.73	0.214				0.959 1
138.0	0.0	$\varepsilon\geqslant\varepsilon_{\mathrm{a}}$	46.88	32.28	24.01	27.91	28.73	0.214	93.727	0.689	16.454	0.986 6
155.0	7.5	$\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}$	72.35	49.82	169.21	237.07	242.05	0.638 7				0.965 3
155.0	6.0	$\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}$	69.98	48.18	143.05	223.37	211.61	0.603 1				0.940 9
155.0	4.5	$\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}$	68.74	47.33	119.30	186.25	188.36	0.559 1				0.927 9
155.0	3.0	$\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{a}}$	66.72	45.94	6.04	141.97	166.40	0.516 2				0.961 7
155.0	3.0	$\varepsilon\geqslant\varepsilon_{\mathrm{a}}$	66.72	45.94	6.04	141.97	166.40	0.516 2	5 320.67	0.082	1.091	0.973 9



(a) 138.0 MPa轴压下试验值与变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤模型理论计算值的对比



(b) 155.0 MPa轴压下试验值与变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤模型理论计算值的对比

图9 试验曲线与变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤模型理论曲线的对比

Fig. 9 Comparison between test curves and theoretical curves of variable-coefficient non-integer order unloading creep damage model

由图9可知,构建的考虑时效损伤的变系数非定阶分数阶卸荷蠕变损伤模型理论曲线与试验值吻合度较好,能较精确地描述高钾钙碱性Ⅰ型花岗岩的蠕变过程,在138.0、155.0 MPa轴压下,岩石加速蠕变阶段曲线的拟合相关性系数为0.986 6和0.973 9。

3 结论

以某抽水蓄能电站所在区域内燕山期高钾钙碱性Ⅰ型花岗岩为研究对象,基于分数阶微积分理论及损伤演化理论,构建变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤力学模型,并利用三轴卸荷蠕变试验数据进行模型参数辨识与拟合验证,得到以下结论:

1)三轴卸荷蠕变试验表明,花岗岩试样的轴向应变多为瞬时弹性应变,试样轴向蠕变总量随围压的减小而增加,岩石呈应变软化特性,蠕变破坏呈脆性破坏特征。

2)基于分数阶微积分理论和传统Burgers模型,构建分数阶Burgers模型。同时,引入能准确描述岩石加速蠕变阶段的变系数非定阶Abel黏壶元件,借鉴元件组合模型原理,构建变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤模型。

3)利用变系数非定分数阶卸荷蠕变损伤模型对三轴卸荷蠕变试验数据进行参数辨识和拟合,结果表明,该模型能较好地描述燕山期高钾钙碱性Ⅰ型花岗岩的蠕变损伤演化特性。

参考文献

[1] 唐志强, 吉锋, 许汉华, 等. 豫南燕山期花岗岩蠕变特性及非线性蠕变损伤模型[J]. 科学技术与工程, 2022, 22(16): 6421-6429.
Tang Z Q, Ji F, Xu H H, et al. Creep characteristics and nonlinear creep damage model of yanshanian granite in southern Henan[J]. Science Technology and Engineering, 2022, 22(16): 6421-6429. (in Chinese)

[2] Jing W, Liu S X, Yang R S, et al. Mechanism of aging deformation zoning of surrounding rock in deep high stress soft rock roadway based on rock creep characteristics[J]. Journal of Applied Geophysics, 2022, 202: 104632.

[3] 李曙光. 大陆俯冲化学地球动力学[J]. 地学前缘, 1998, 5(4): 211-230.
Li S G. Chemical geodynamics of continental subduction [J]. Earth Science Frontiers, 1998, 5(4): 211-230. (in Chinese)

[4] 肖本万, 谷浩, 何孝良. 河南信阳鸡公山一带早白垩世花岗岩地球化学特征及成因[J]. 现代矿业, 2011, 27(3): 62-65.
Xiao B W, Gu H, He X L. Geochemical characteristics and genesis of Early Cretaceous granite in Jigongshan area, Xinyang, Henan Province[J]. Modern Mining, 2011, 27(3): 62-65. (in Chinese)

[5] Ping C, Wen Y D, Wang Y X, et al. Study on nonlinear damage creep constitutive model for high-stress soft rock [J]. Environmental Earth Sciences, 2016, 75(10): 900.

[6] Ma Y K, Yao Q C, Wang J H, et al. Time-dependent creep constitutive model of roadway surrounding rock based on creep parameters[J]. Geofluids, 2022, 2022: 7981192.

[7] Zhao Y L, Wang Y X, Wang W J, et al. Modeling of non-linear rheological behavior of hard rock using triaxial rheological experiment[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2017, 93: 66-75.

[8] 宋勇军, 雷胜友. 干燥和饱水炭质板岩流变力学特性与模型研究[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2016, 48(1): 95-100.
Song Y J, Lei S Y. Study on rheological mechanical properties and model of carbonaceous slates under dry and saturated states[J]. Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition),

2016, 48(1): 95-100. (in Chinese)

[9] Li J L, Zhu L Y, Zhou K P, et al. Non-linear creep damage model of sandstone under freeze-thaw cycle[J]. Journal of Central South University, 2021, 28(3): 954-967.

[10] Feng Y Y, Yang X J, Liu J G, et al. A new fractional Nishihara-type model with creep damage considering thermal effect[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2021, 242: 107451.

[11] Zhou H W, Jia W H, Xie S L, et al. A statistical damage-based fractional creep model for Beishan granite[J]. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2023, 27(1): 163-183.

[12] Wei E J, Hu B, Li J, et al. Nonlinear viscoelastic-plastic creep model of rock based on fractional calculus [J]. Advances in Civil Engineering, 2022, 2022(1): 3063972,.

[13] Deng H L, Zhou H W, Li L F. Fractional creep model of temperature-stress-time coupled damage for deep coal based on temperature-equivalent stress[J]. Results in Physics, 2022, 39: 105765.

[14] Li Z Y, Yang G S, Wei Y. Construction of frozen sandstone creep damage model and analysis of influencing factors based on fractional-order theory[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2021, 46(11): 11373-11385.

[15] 刘文博，张树光，陈雷. 基于非定常分数阶的岩石时效性蠕变模型[J]. 采矿与安全工程学报，2021, 38(2): 388-395.
Liu W B, Zhang S G, Chen L. Time-dependent creep model of rock based on unsteady fractional order[J]. Journal of Mining & Safety Engineering, 2021, 38(2): 388-395. (in Chinese)

[16] 王小东. Riemann-Liouville分数阶微积分及其性质证明[D]. 太原：太原理工大学，2008.
Wang X D. Riemann-Liouville fractional calculus and its property proof[D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2008. (in Chinese)

[17] 殷德顺，任俊娟，和成亮，等. 一种新的岩土流变模型元件[J]. 岩石力学与工程学报，2007, 26(9): 1899-1903.
Yin D S, Ren J J, He C L, et al. A new rheological model element for geomaterials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(9): 1899-1903. (in Chinese)

[18] 孙钧. 岩土材料流变及其工程应用[M]. 北京：中国建筑工业出版社，1999.
Sun J. Rheology of geotechnical materials and its engineering application[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1999. (in Chinese)

[19] 周宏伟，王春萍，段志强，等. 基于分数阶导数的盐岩流变本构模型[J]. 中国科学：物理学 力学 天文学，2012, 42(3): 310-318.
Zhou H W, Wang C P, Duan Z Q, et al. Time-based fractional derivative approach to creep constitutive model of salt rock[J]. Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica), 2012, 42(3): 310-318. (in Chinese)

[20] Shukla S K, Gupta S K, Sivakugan N. Active earth pressure on retaining wall for c-ϕ soil backfill under seismic loading condition[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2009, 135(5): 690-696.

[21] 宋勇军，张磊涛，任建喜，等. 冻融环境下红砂岩三轴蠕变特性及其模型研究[J]. 岩土工程学报，2021, 43(5): 841-849.
Song Y J, Zhang L T, Ren J X, et al. Triaxial creep properties and model of red sandstone under freeze-thaw environment[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, 43(5): 841-849. (in Chinese)

[22] 王晓波. 岩石材料的蠕变实验及本构模型研究[D]. 重庆：重庆大学，2016.
Wang X B. Creep experiment and constitutive model of rock materials[D]. Chongqing: Chongqing University, 2016. (in Chinese)

（编辑　胡英奎）