

# 高梯度磁分离器方程解法的研究

## STUDY OF SOLUTION METHODS FOR SEPARATOR EQUATIONS OF HIGH GRADIENT MAGNETIC SEPARATION

谭 彦 毅      余 仲 明  
Tan Yanyi      Yu Zhongming

(电气工程系)

**摘 要** 本文讨论了高梯度磁分离器分离方程的解析解、初始保持的近似解、稳态解和数值解,对稳态解提出了反向波法予以修正,对数值解法提出了 Treanor 一四阶 Taylor 法并与实验结果进行了比较。

**关键词** 高梯度磁分离器;磁分离方程;速率方程;穿透曲线

**ABSTRACT** In this paper, an analytical solution, approximate solution of initial retention, steady-state solution and numerical solution of separator equations of high gradient magnetic separation are discussed. A backward-wave method used to improve the steady-state solution and Treanor-four order Taylor numerical method are suggested for magnetic separator equations and are compared with experimental results.

**KEY WORDS** HGMS, magnetic separator equation, rate equation, break through curve

### 一、引 言

高梯度磁分离技术自七十年代以来已用于陶土工业、矿物精选和废水处理等领域,有着极大的优越性。但对磁分离的理论研究,多是对单线模型的机理和分离性能的实验研究,并有大量文章发表,而对磁分离器过滤特性系统的理论研究还远不如前者,虽有一些模型研究提出了磁分离方程,用以描述分离器内部悬浮液浓度及保持量的变化规律,但对方程的解却很少研究,本文提出的数值解法,计算时间短、精度高,易于在微机上实现,是一种有效的方法,可以计算穿透特性,对高梯度磁分离器的设计有一定的指导作用。

本文于1988年5月6日收到

## 二、磁分离器方程及辅助方程

磁分离器方程也称磁分离方程，它由物质平衡方程和速率方程构成。图1表明了磁分离器中典型的悬浮液浓度分布曲线。

### 1. 物质平衡方程

由磁分离器内某一均匀单元内的物质平衡，即：

$$\text{粒子滞留增量} = \text{流进粒子量} - \text{流出粒子量}$$

可推导出物质平衡方程如下：

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} + V_0 \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

式中：  $N$  ——磁分离器单位体积所吸附的粒子量。

$R$  ——单位体积携带液中所含粒子的量。

$V_0$  ——磁分离器入口处的流速。

$\tau$  ——位移时间。定义如下：

$$\tau = t - \frac{\epsilon_0 x}{V_0}$$

$t$  ——时间。

$\epsilon_0 = 1 - \text{钢毛占空率}$ ，为钢毛无载时的空隙率。

$N$ 、 $R$ 分别以相对单位值表示为 $N_m$ 和 $R_m$ ， $N$ 的基值取单位体积的最大保持量 $N_T$ ， $R$ 的基值取为入口浓度 $R_0$ ，则物质平衡方程的标么值表达式为：

$$\frac{\partial N_m}{\partial \tau} + \frac{V_0 R_0}{N_T} \frac{\partial R_m}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

### 2. 速率方程

速率方程是磁分离器过滤腔中磁性钢毛吸附粒子的快慢，其表达式如下：

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{V_0}{L_0} G(N) R \quad (3)$$

式中  $L_0 = \pi a / 2\sigma(1 - \epsilon_0) R_{c0}$  称为特征捕获长度。

$G(N) = 1 - (N/N_T)^r$  或  $G(N) = \left(1 - \frac{N}{N_T}\right)^r$  称损失函数。

$R_{c0}$  为粒子的临界捕获半径。

$\sigma$  为反映钢毛排列方向的系数，一般取为  $\frac{2}{3}$ 。

$a$  为钢毛半径°

$r$  为常数，一般取1，2的整数或特定值如1.5等

$$\text{如用标么值形式为：} \quad \frac{\partial N_m}{\partial \tau} = \frac{V_0 R_0}{L_0 N_T} G(N) R_m \quad (4)$$

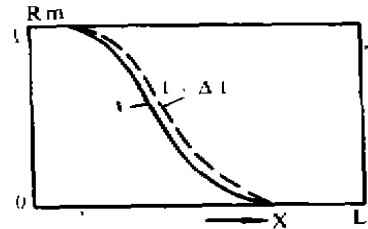


图1

### 3. 辅助方程

磁分离器方程能唯一地确定磁分离器中的  $R$  和  $N$ , 但在磁分离器方程的求解过程中, 有些解法要依赖于另一个方程才能解出, 这里称它为辅助方程, 写出如下:

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{1}{L_0} G(N)N \quad (5)$$

这个辅助方程是由物质平衡式

$$\text{粒子流进量} = \text{流出量} + \text{滞留量}$$

得到的, 实际上这是一个积分式, 经过简化假设及数学分析得出[4]。

## 三、磁分离方程的解

### 1. 解析解

对式(5)取积分得:

$$\int \frac{dN}{NG(N)} = -\frac{1}{L_0} x + C(\tau) \quad (6)$$

$C(\tau)$ 可由入口( $x=0$ )处的  $N_i$ 确定,  $N_i$ 可由速率方程得出:

$$\frac{dN_i}{d\tau} = k'_0 G(N_i)R_0 \quad (7)$$

式中:  $k'_0 = \frac{V_0}{L_0}$ ,  $R_0$ 为入口处的悬浮液浓度。

对式(6)积分得:

$$N_i = F_2(k'_0 R_0 \tau) \quad (8)$$

首先, 求  $\gamma = 1$  时的解, 则  $G(N) = 1 - N/N_T$ , 将式(8)代入式(7), 有:

$$\ln(1 - N_i/N_T) = -\frac{R_0 k'_0}{N_T} \tau + C_1(\tau)$$

积分常数由条件  $\tau \rightarrow \infty$  时,  $N_i \rightarrow N_T$  定出:  $C_1(\tau) = 0$

$$\text{故} \quad N_i/N_T = 1 - e^{-\frac{R_0 k'_0}{N_T} \tau} \quad (9)$$

将  $G(N) = 1 - N/N_T$  代入式(6), 并积分得:

$$\ln N - \ln(1 - N/N_T) = -\frac{k'_0}{v_0} x + c(\tau) \quad (10)$$

令式(10)的  $x=0$ , 则  $N = N_i$ , (10)式变为:

$$c(\tau) = \ln N_i(1 - N_i/N_T) \quad (11)$$

代式(9)入式(11)后, 并代回式(10), 整理并令  $k_0 = \frac{V_0 R_0}{L_0 N_T}$

$$\text{得} \quad \begin{cases} N_m = \frac{1 - e^{-k_0 \tau}}{1 + e^{(x/L_0 - k_0 \tau)} - e^{-k_0 \tau}} & (12a) \\ R_m = \frac{1}{-e^{-k_0 \tau} + e^{(x/L_0 - k_0 \tau)} + 1} & (12b) \end{cases}$$

当  $r = 2$  时,  $G(N) = 1 - (N/N_T)^2$ , 其解析解为 (此处省略推导):

$$\begin{cases} N_m = [1 + (F^2 - 1) \exp(2x/L_0)]^{-1/2} & (13a) \\ R_m = F \left[ 1 + (F^2 + 1) \exp\left(\frac{2x}{L_0}\right) \right]^{-1/2} & (13b) \end{cases}$$

• 式中:

$$F = \frac{1 + \exp(2k_0' R_0 \tau)}{\exp(2k_0' R_0 \tau) + 1} \quad (13c)$$

## 2. 初始保持时的近似解

为了保持高梯度磁分离器工作的有效性,特别是在分离非铁磁物质时,一般一个工作周期结束时,钢毛远远没有饱和。因此,总是希望找到磁分离“初始保持”时的近似解,由磁分离方程(2)和(4)可得保持方程如下:

$$\frac{\partial N_m}{\partial \tau} + L_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial N_m}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (14)$$

经过变换得:

$$\frac{\partial N_m}{\partial \tau} \left[ 1 + L_0 \frac{\partial(G^{-1})}{\partial x} \right] - \frac{L_0}{G} \frac{\partial^2 N_m}{\partial \tau \partial x} = 0 \quad (15)$$

初始保持时,捕获半径基本不变,故  $L_0 \frac{\partial(G^{-1})}{\partial x} \ll 1$ , 对  $G = 1 - (N/N_T)$  时,初始保持时解的表达式(1):

$$N_m = (1 - G(0, \tau))^{\frac{1}{2}} \exp[-(G(0, \tau)/L_0)x] \quad (16)$$

可以证明, (16)式在  $N_m \ll (\gamma + 1)^{-\frac{1}{2}}$  时是保持方程(14)很好的近似解。

对  $G = (1 - N/N_T)$  时, 可得:

$$N_m = (1 - G(0, \tau))^{\frac{1}{\gamma}} \exp[-(G(0, \tau)/L_0)x] \quad (17)$$

同理可以证明(17)式在  $N_m \ll (\gamma + 1)^{-1}$  时是接近精确解的近似解。

要应用(16)或(17)式必须首先求出  $G(0, \tau)$ , 对  $G(N) = 1 - (N/N_T)$ , 给出下列式:

$$\text{若 } \gamma = 1, \text{ 则 } G(0, \tau) = \exp(-\tau/\tau_0) \quad (18a)$$

$$\text{若 } \gamma = \frac{1}{m}, \text{ 则 } (-m) \left[ \ln G + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{1}{k} (G^k - 1) \right] = \frac{\tau}{\tau_0} \quad (18b)$$

$$\text{若 } \gamma = 2, \text{ 则 } G = \cosh^{-2}(\tau/\tau_0) \quad (18c)$$

式(18a, b, c)在区域  $1 \gg G \gg 0$  (对  $0 \leq \tau/\tau_0 \leq m$ ) 时, 成立。

对  $G(N) = (1 - N/N_T)^\gamma$  可求出如下  $G(0, \tau)$  值:

$$\text{若 } \gamma = 1, \text{ 则 } G(0, \tau) = \exp(-\tau/\tau_0) \quad (19a)$$

$$\text{若 } \gamma > 1, \text{ 则 } G(0, \tau) = [(\gamma - 1)^{\frac{\tau}{\tau_0}} + 1]^{1-\gamma} \quad (19b)$$

$$(1 \geq G(0, \tau) \geq 0, 0 \leq \tau/\tau_0 \leq \infty)$$

若  $\gamma < 1$ , 则:

$$G(0, \tau) = \begin{cases} [(\gamma - 1)^{\frac{\tau}{\tau_0}} + 1]^{1-\gamma} & 0 \leq \tau/\tau_0 \leq \frac{1}{1-\gamma} \\ 0 & \frac{1}{1-\gamma} \leq \tau/\tau_0 \leq \infty \end{cases} \quad (19c)$$

### 3. 稳态解

假定磁分离器的过滤长度为无限长, 保持粒子波面由  $-\infty$  远处向  $x$  正向推进。此时磁分离器已进入稳态, 从而可得:

$$N(x, t) = N(\xi), \quad R(x, t) = R(\xi) \quad (20a)$$

$$\xi = x - v_s \tau = (1 + v_s/v_0)x - v_s t = (1 + R_0/N_T)x - v_s t \quad (20b)$$

$$\text{式中 } v_s = v_0 R_0/N_T \quad (20c)$$

用式(20a, b, c), 物质平衡方程式(2)变为:

$$\frac{dN_m}{d\xi} = \frac{dR_m}{d\xi}$$

两边积分得:

$$N_m(\xi) = R_m(\xi) \quad (21)$$

因为  $t \rightarrow \infty$  时  $N/N_T = R/R_0$ , 所以积分常数为零。

再把式(21), (20a), (20b)和速率方程(4)结合起来, (4)式变为:

$$\frac{dN_m}{d\xi} = -\frac{1}{L_0} N_m G(N_m) = -\alpha_0 N_m G(N_m) \quad (22)$$

$$\text{式中: } \alpha_0 = \frac{1}{L_0}$$

对式(22)直接积分可得出稳态解, 在  $G = 1 - (N/N_T)^\gamma$  时, 积分后得出稳态解(2):

$$N_m(\xi) = R_m(\xi) = [1 + A(\gamma) \exp(\gamma \alpha_0 \xi)]^{-1/\gamma} \quad (23)$$

式中  $A(\gamma)$  为积分常数, 可由下式决定:

$$\int_0^\infty N_m dx = \int_0^1 x d(N_m) = v_s t \quad (24)$$

对不同的  $\gamma$  有不同的  $A(\gamma)$  值, 下面是一部分  $A(\gamma)$  之值 ( $n \neq 0$  为整数):

$$A(4) = 8 \exp(\pi/2), \quad A(3) = \sqrt{27} \exp(\pi/2\sqrt{3}), \quad A(2) = 4,$$

$$A(1) = 1, \quad A(1/n) = \exp[-(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1})] \quad (25)$$

当  $G(N) = (1 - N/N_T)^\gamma$  时, 仅在  $\gamma$  为某些特殊值时, 才可能求出其解析表达式, 下面给出一些例子:

$$\alpha_0 \xi = \ln(N_m - 1) - \sum_{k=1}^{\gamma-1} (\gamma - k)^{-1} [1 - N_m]^{k-\gamma} + B(\gamma), \quad (\gamma = \text{整数}) \quad (26a)$$

$$\alpha_0 \xi = -2 + \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - N_m}}{1 - \sqrt{1 - N_m}} \right], \quad (\gamma = \frac{1}{2}) \quad (26b)$$

$$\alpha_0 \xi = 2 + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - N_m}}{1 - \sqrt{1 - N_m}} = \dots, \quad (\gamma = \frac{3}{2}) \quad (26c)$$

式(26a)中的 $B(\gamma)$ 可由式(24)定出,由于 $\gamma \geq 2$ 时不会出现稳态,所以此时不能求出 $B(\gamma)$ 之值。

#### 4. 反向波解法

磁分离方程的稳态解象一个前向推进的正向波,稳态解所满足的边界条件是:

$x = 0$  时, (23)式变为:

$$N_m(t) = R_m(t) = [1 + A(\gamma) \exp(-\gamma \alpha_0 v_s t)]^{-1/\gamma} \quad (27)$$

$t = 0$  时, (23)式变为:

$$N_m(x) = R_m(x) = [1 + A(\gamma) \exp(-\gamma \alpha_0 (1 + (v_s/v_0)(x)))]^{-1/\gamma} \quad (28)$$

从式(27)和(28)可看出,在实际情况中,是很难满足上述边界条件的。为了满足通常的边界条件 $x = 0$ 时 $N_m(t) = 0, R_m(t) = 1$ ;  $t = 0$ 时,  $N_m(x) = 0, R_m(x) = 1$ , 必然有一个暂态分量,使得解满足该边界条件。由于是非线性偏微分方程组,这个暂态分量一般来说是无穷多项之和。为了找到一个磁分离方程组的一个近似暂态分量,引入一个反向波。反向波将由在初始时刻的某一值逐步衰减到零,解就恢复到稳态值。

假定

$$\begin{cases} \xi_- = (1 + R_0/N_T)x + v_s t = x + v_s \tau' \\ N_m(x, t) = N_m(\xi_-), R_m(x, t) = R_m(\xi_-), \tau' = t + \frac{x}{v_0} \end{cases} \quad (29)$$

利用(29)式,物质平衡方程(2)变为:

$$- \frac{dN_m}{d\xi_-} + \frac{dR_m}{d\xi_-} = 0 \quad (30)$$

积分(30)式得:

$$R_m(\xi_-) = -N_m(\xi_-) \quad (31)$$

假设反向波和正向波具有一样性质,  $N/N_T = R/R_0$  ( $t \rightarrow \infty$  时), 积分常数为零。由式(31)和(29),速率方程(1)变为:

$$- \frac{dN_m(\xi_-)}{d\xi_-} = - \frac{1}{L_0} G N_m = - \alpha_0 G N_m \quad (32)$$

对式(32)积分,可得:

$$-N_m(\xi_-) = R_m(\xi_-) = [1 + A(\gamma) \exp(\gamma \alpha_0 \xi_-)]^{-1/\gamma} \quad (33)$$

上式中的积分常数 $A(\gamma)$ 和式(23)中的积分常数 $A(\gamma)$ 是一致的。

将稳态解求出的 $N_m(\xi_-)$ 和 $R_m(\xi_-)$ 作为正向波,并记为 $N_m(\xi_+)$ ,  $R_m(\xi_+)$ 则:

$$N_m(\xi_+) = R_m(\xi_+) = [1 + A(\gamma) \exp(\gamma \alpha_0 \xi_+)]^{-1/\gamma} \quad (34)$$

$$\text{和 } -N_m(\xi_-) = R_m(\xi_-) = [1 + A(\gamma) \exp(\gamma \alpha_0 \xi_-)]^{-1/\gamma} \quad (35)$$

为了使在  $\xi_+ = 0$ ,  $\xi_- = 0$  时,  $R_m(\xi_+)$  和  $R_m(\xi_-)$  都是  $\frac{1}{2}$ , 从而使

$$R_m(\xi_-)|_{\xi_- = 0} + R_m(\xi_+)|_{\xi_+ = 0} = 1 \quad (36)$$

$$\text{令式(34)左边 } R_m(\xi_+) = \frac{1}{2}, \text{ 得 } \xi_+ = \frac{1}{\gamma \alpha_0} \ln \frac{2^{-1} - 1}{A(\gamma)}.$$

$$\text{定义: } \xi_0 = \left( \frac{1}{\gamma \alpha_0} \ln \frac{2^{-1} - 1}{A(\gamma)} \right) e^{-1} \quad (37)$$

为了满足(36)式, (34)式和(35)式变为:

$$N_m(\xi_+) = R_m(\xi_+) = [1 + A(\gamma) \exp(\gamma \alpha_0 (\xi_+ + \xi_0))]^{+1/\gamma} \quad (38)$$

$$-N_m(\xi_-) = R_m(\xi_-) = [1 + A(\gamma) \exp(\gamma \alpha_0 (\xi_- + \xi_0))]^{-1/\gamma} \quad (39)$$

将(38)和(39)式加起来, 可得磁分离方程的反向波解, 即

$$\begin{aligned} N_m(x, t) &= N_m(\xi_+) - N_m(\xi_-), \\ R_m(x, t) &= R_m(\xi_+) + R_m(\xi_-) \end{aligned} \quad (40)$$

### 5. 数值解法

上面给出的各种解法都很大的局限性, 不是只能求初始时的近似值, 就是只能求出稳态时的近似值, 反向波法也只是对稳态解的一个修正, 其适用范围也较狭窄, 为了模拟在任意  $G(N)$  函数时, 全时-空域内高梯度磁分离器的过程, 必须用数值方法解磁分离方程组(2)和(4)或保持方程(14), 对保持方程(14)的解可用逐次超松弛法求出。对磁分离方程组(2)和(4)可用 Runge-Kutta-Euler 方法或 Treanor-Taylor 方法求解, 其步骤是一致的。Herzig 推导出了一类隐函数法, 即用数值方法求解式(7)和(6)推导出的隐函数方程, 即可求得  $N_m$  和  $R_m$ , 由于  $\gamma$  变化时, 其隐函数就要重新推导, 或解联立方程式, 并且一次计算只能算出  $R_m$  (或  $N_m$ ), 故必须进行两次同样过程的计算才能算出  $R_m$  和  $N_m$ , 计算量较大。本文仅介绍计算速度较快、精度高的 Treanor-四阶 Taylor 方法。

### 6. Treanor-四阶 Taylor 方法解磁分离方程的步骤如下:

第一步: 因为有边界条件,  $R_m(0, \tau) = 1$ , 就可以用 Treanor 方法解磁分离方程(4), 从而得到  $x = 0$  时的  $N_m(0, \tau)$ 。

第二步: 由上一步得到的  $N_m(0, \tau)$ , 由速率方程(4)可计算出在  $x = 0$  时不同  $\tau$  时刻的导数  $\frac{\partial N_m(0, \tau)}{\partial N}$ 。

第三步: 由质量平衡方程(2)和第二步求出的  $\frac{\partial N_m(0, \tau)}{\partial N}$  得到在  $x = 0$  时  $R_m$  对  $x$  的偏导数  $\frac{\partial R_m(0, \tau)}{\partial x}$ 。

第四步: 由辅助方程及质量平衡方程可导出  $\frac{\partial^2 R_m(0, \tau)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^3 R_m(0, \tau)}{\partial x^3}$ ,  $\frac{\partial^4 R_m(0, \tau)}{\partial x^4}$ 。

第五步: 由 Taylor 公式

$$R_m(i+1) = R_{m_i} + \frac{\partial R_{m_i}}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R_{m_i}}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 R_{m_i}}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 R_{m_i}}{\partial x^4} \Delta x^4$$

求出下一步  $x = \Delta x$  处不同  $\tau$  时刻的  $R(\Delta x, \tau)$

第六步已知  $x = \Delta x$  的  $R_m(\Delta x, \tau)$ , 由速率方程求出  $x = \Delta x$  在不同  $\tau$  时刻的  $N_m(\Delta x, \tau)$ 。

从第一步到第六步经过多次循环即可求出全部区域钢毛单位体积吸附的粒子量  $N_m$  及出水浓度  $R_m, R_m(t)$  的曲线即穿透曲线, 其计算值与实验值的比较如图 2。

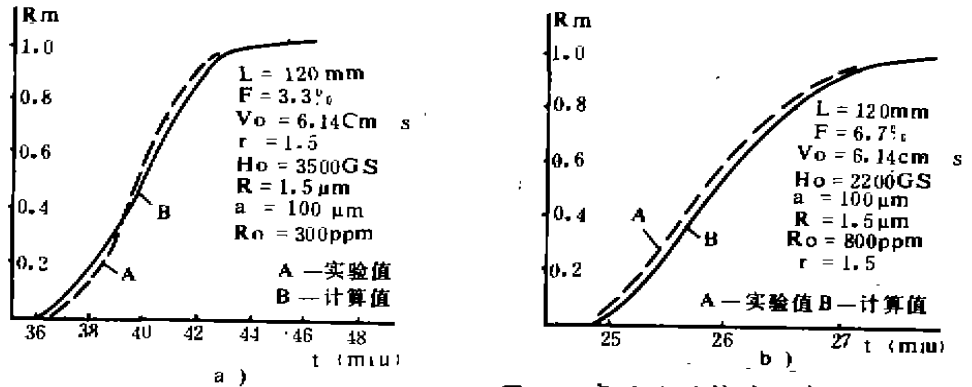


图 2 穿透曲线计算值与实验值比较

图中符号说明:

$L$ —分离器过筛长度

$F$ —钢毛填充率

$V_0$ —悬浮液入口速度

$H_0$ —无钢毛时过筛腔内的  
磁场强度

$a$ —钢毛半径

$R$ —粒子半径

$R_0$ —悬浮液入口浓度。

#### 四、结 论

1. 显然,磁分离器的数值解和解析解可不受时空域的限制,即可应用于磁分离器的初始时刻又可应用于稳态时刻。
2. 解析解的缺点是它只能在  $\nu$  为某些特殊解时才可使用,而数值解的缺点是为了求某一点的  $N$  或  $R$  必须求出这个点以前所有网格的解,计算时间长,还需要编写计算程序,借助计算机。
3. 三种近似解法只能分别应用于不同的情况,初始保持时的近似解只能用来求初始保持时的解,即使用它来求初始悬浮浓度都是很困难的。
4. 稳态解在  $L/L_0 \gg 1$  ( $L$  为磁分离器长度), 才能用来求解穿透曲线。反向波法解能较准



确地求出穿透曲线。这些近似式的优点是能迅速地估计磁分离器的性能。

### 参 考 文 献

- (1) R.Gerber and M.H. Watmough, "Magnetic Separator Equations" IEEE Trans. Vol MAG-18, No.6, p1671, 1982
- (2) S.Uchiyama, S.kurinobu, "Steady-state solution of filter equations of high gradient magnetic separation" IEEE Catalog No. 78 CH1447-2, Proceeding of an International Conference of Industrial appl of magn. separation, p166, 1979.
- (3) J.H.P.Watson, "Approximate solutions of the magnetic separator equations," IEEE Trans, Vol MAG-14, No4, July 1978
- (4) 谭言毅: 高梯度磁分离器的粒子捕获机理及磁分离方程理论的研究, 重庆大学硕士学位论文, 1988。