

十字簧片支承转动中心的运动轨迹分析

A STUDY OF MOVEMENT LOCUS OF THE INSTANTANEOUS
CENTR OF CROSS-SPRING PIVOT

先 武 董大伟 罗 达 立
Xian Wu Dong Dawei Luo Dali

(光电精密仪器系)

摘 要 本文对十字弹簧支承的转动中心进行了分析研究。指出十字弹簧支承在摆动工作时存在截然不同的三个中心(定心、动心和转动中心),并推得三个中心间的相互关系,其中研究得出的动心变化规律与 S.Hildebrand 教授所作的实验曲线基本符合。

关键词 十字弹簧; 支承; 转动中心; 轨迹

ABSTRACT The instantaneous center of the cross-spring pivot is studied in this paper. It is also pointed out in this paper that three different kinds of center(the static geometric center the moving geometric center and the instantaneous center) exist when the cross-spring pivot is deflected. Their relationship is calculated, the variation character of the moving geometric center almost coincides with the curve of S.Hildebrand's experiments.

KEY WORDS Cross-spring; pivot; instantaneous center; locus

一、引 言

当弹性支承有规律地摆动时,支承的结构参数决定了运动构件各点的位移,仪器仪表的精确度通常与其可动部分转动中心的不变性有关。故研究悬挂在支承弹簧片上运动部件的转动中心不仅是设计弹性支承结构的基础,而且也是分析仪器仪表精度必不可少的理论依据。对单片簧的研究开展较早,很多文献中已推导出了单片簧支承运动构件转动中心的近似计算公式(1)(2)(3),而十字弹簧运动构件的转动中心的研究还作得较少。波兰Hilderbrand教授对十字弹簧支承进行了实验研究〔4〕,其原理为:在动块2上紧固一个绘图笔架6(两者无相对移动),并且当十字弹簧结构不受外力时,绘图笔尖与十字弹簧片的交叉点在同一投影点上,设该点为坐标原点。动块摆动时,其动块的几何中心与笔尖永远重合,故当动块受外

本文于1988年1月29日收到

力摆动时，其绘图笔将在绘图纸上把动块的几何中心的运动轨迹描绘出来(如图1)。Young教授也对十字弹簧支承进行了实验研究〔5〕，通过拍照的方法得到了动块的几何中心的运动轨迹，但因变化很小，未能定量化。文献〔6〕也提到，当摆角为 20° 时，转动中心在 x 方向的位移为 $0.04l$ ， y 方向的位移为 $0.01l$ ；当摆角为 40° 时，其 x 方向的位移为 $0.1l$ ， y 方向的位移为 $0.04l$ (其中 l 为簧片长度)。这些都仅是实验方面的研究，未能进行详细的理论分析和推导。并且把动块的几何中心的概念和转动中心的概念混淆于一起，所作曲线也应用不便，故本文拟在这方面作一分析研究。

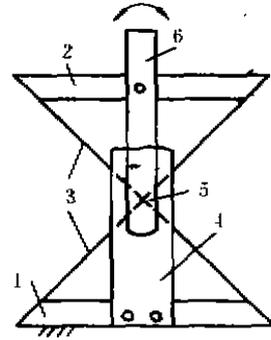


图 1

- | | |
|--------|----------|
| 1—定块 | 2—动块 |
| 3—十字弹簧 | 4—绘图纸及支板 |
| 5—绘图笔 | 6—绘图笔支架 |

二、几何概念的定义

定义一：几何中心——定块（或动块）上两片簧片在端点（即簧片固定点）处的切线的交点（如图2中的 P_1 、 P_2 点，且称定块的几何中心为定几何中心，简称定心，称动块的几何中心为动几何中心，简称动心。如果把定块（或动块）看成四分之一圆弧的话，则圆的中心就是几何中心。

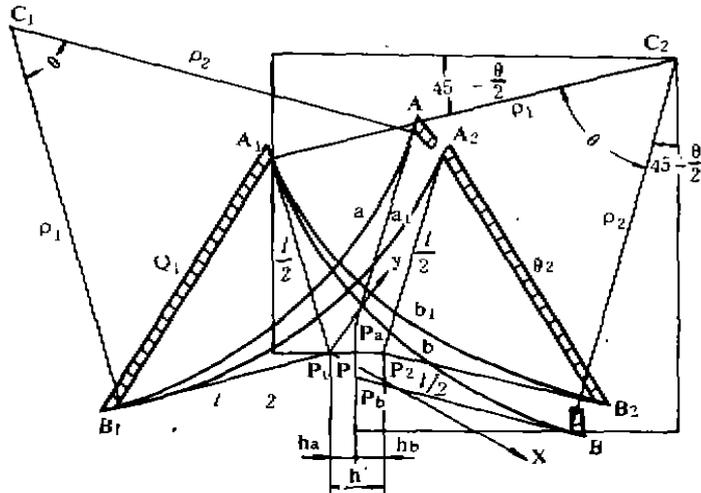


图 2

定义二：中心偏移量——定几何中心与动几何中心的距离称之为中心偏移量（如图2中的 h' ）。

定义三：转动中心——动块的瞬时转动中心（运动中心）称之为转动中心。

三、动几何中心

如图2所示，有定块 Q_1 和动块 Q_2 ，动块上作用有力和力矩（图中未画）。当作用的力和力矩均为零时，两簧片垂直交叉于中点（即定几何中心 P_1 ），且假定：（1）两簧片的长、宽、厚及材料完全相同；（2）簧片的宽远大于厚；（3）所受载荷满足 $\frac{Ml}{EJ_z} \ll \frac{\pi}{3}$ ， $\frac{T_0 l^2}{EJ_z} \ll \pi^2$ 。其中 M 、 T_0 为动块上作用的力矩和力， E 为弹片的弹性模量， J_z 为截面惯量矩， l 为簧片的长。

现假想将动块 Q_2 断开，而将相同的外力分别施加于 A 、 B 两点，从而弯曲成相等的两段弧形 a 、 b ，并且 P_0 为无簧片 b 时的动几何中心， P_1 为无簧片 a 时的动几何中心， P_2 为动几何中心， h' 为中心偏移量（见前面的定义）。

由于一般的外力得使簧片各点的曲率半径不等，为避免复杂的数学运算，设点 A_1 和点 B_1 的曲率半径均为 ρ_1 ，点 A 和点 B 的曲率半径均为 ρ_2 。

从图中的几何关系可得：

$$\begin{aligned} h_a &= \rho_1 \cos\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right) - \rho_2 \sin\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right) \\ &\quad - \frac{l}{2} \cos\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{l}{2} \sin\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

同理，根据镜象对称性，再假想将定块 Q_1 断开，则 B_1 移至 B_3 ， A_1 移至 A_3 ，并假设各簧片的曲率半径分别与上一种假想情况相应，则得

$$\begin{aligned} h_b &= \rho_2 \cos\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right) - \rho_1 \sin\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right) \\ &\quad - \frac{l}{2} \cos\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{l}{2} \sin\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

从而可得中心偏移量为

$$h' = h_a + h_b = \sqrt{2} \left[(\rho_1 + \rho_2) \sin \frac{\theta}{2} - l \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (3)$$

前面已假设，当外力由一片弹簧承受时其转角为 θ ，现在如果有动块的连接和定块的连接，外力由两簧片同时承受，则动块 Q_2 的摆角近似为 $\frac{\theta}{2}$ 在 $x_{P_1}y$ 坐标系中，动几何中心 P_2 的方程可表为：

$$\left. \begin{aligned} x &= h' \cos \frac{\theta}{2} \\ y &= h' \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

四、转动中心

动块的转动中心取决于动块上任意一点的运动轨迹，而动心与动块无相对运动，故动心与转动中心的距离 $\overline{P_2 A_0} = \frac{ds}{d\theta}$ (如图3所示)，从而转动中心的方程可表为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x - \frac{ds}{d\theta} \sin \operatorname{tg}^{-1} \frac{dy}{dx} \\ y_1 &= y + \frac{ds}{d\theta} \cos \operatorname{tg}^{-1} \frac{dy}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

五、特 例

由材料力学知，受纯力矩 M 作用的簧片的曲率半径为：

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{EJ_z}{M} = l \quad (6)$$

将式(6)代入式(3)得

$$h' = \sqrt{2} \left[\frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\theta} - \cos \frac{\theta}{2} \right] l$$

按级数展开并略去高阶项得中心偏移量

$$h' = \frac{\sqrt{2}}{12} \theta^2 l \quad (7)$$

将式(7)代入式(4)得动心方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{12} \theta^2 l \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{24} \theta^3 l \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其轨迹如图4实线所示

由微分学有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{4 \sin \frac{\theta}{2} + \theta \cos \frac{\theta}{2}}{4 \cos \frac{\theta}{2} - \theta \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{12} l \theta \sqrt{4 + \frac{1}{4} \theta^2}$$

将上两式代入式(5)并化简得

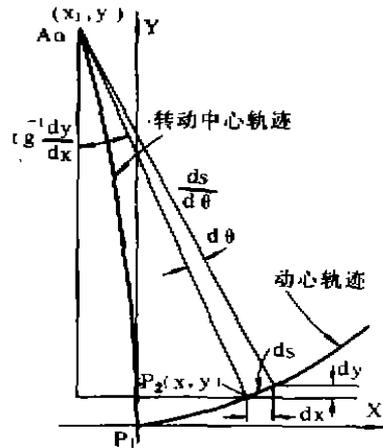


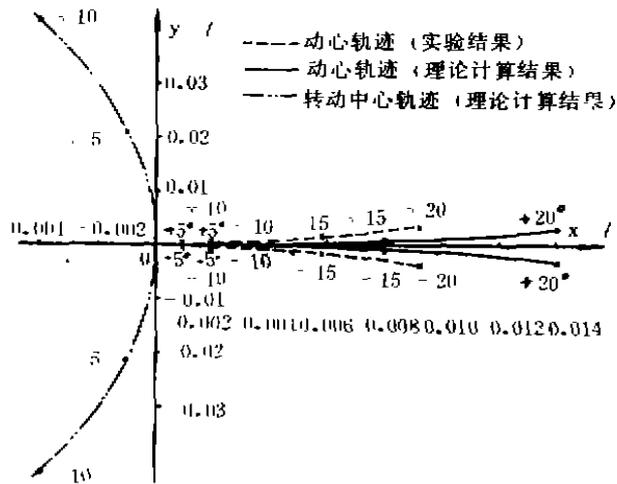
图 3

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{24} l \theta \left(\theta \cos \frac{\theta}{2} - 4 \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ y_1 &= \frac{\sqrt{2}}{24} l \theta \left(\theta \sin \frac{\theta}{2} + 4 \cos \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\}$$

按级数展开并略去高阶项得转动中心方程为：

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{12} \theta^2 l \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{6} \theta l \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其轨迹为抛物线，如图 4 点划线所示



六、与实验结果比较及结论

图 4 虚线所示的实验曲线是由 Hildebrand 教授的研究得出来的〔4〕，其实验原理见引言。从实验装置的原理分析及实验曲线与理论曲线的相似性都可看出，文献〔4〕所得的实验曲线是动几何中心的变化轨迹，而非转动中心轨迹。从理论分析的数据与文献〔6〕所给数据的比较可发现，文献〔6〕所给数据也是动几何中心的实验结果，而非转动中心的实验结果。本文的研究表明：

1. 从理论曲线和实验曲线均可看出，支承在十字弹簧上的运动构件的动心和转动中心都将随摆动偏转角（或外载荷）的变化而变更，其变化规律由式（4）、式（5）决定。
2. 动心和转动中心是截然不同的两个概念，其变化规律也有很大差异。最大差异是：随着摆角的增大，转动中心将向定块方向移动（即 x 恒为负值），且移动速率较小；动心将远离定块（即 x 恒为正值），且远离的速率较大。
3. 理论分析的动心轨迹与其实验曲线〔4〕在规律和趋势上非常一致，且两者的误差，当摆动 10° 时， x 方向为 $0.0001 l$ ， y 方向为 $0.00001 l$ 。说明了理论分析的正确性。
4. 转动中心的最大变动量，当摆动 10° 时， x 方向为 $0.003 l$ ， y 方向为 $0.041 l$ ；

当摆动 20° 时, x 方向为 $0.014l$, y 方向为 $0.082l$ 。动心最大变动量, 当摆动 10° 时, x 方向为 $0.003l$, y 方向为 $0.0003l$; 当摆动 20° 时, x 方向为 $0.014l$, y 方向为 $0.0024l$ 。与资料〔4〕、〔6〕的实验结果比较符合, 只不过资料中的转动中心概念应理解为本文所谈到的几何中心(即动心)概念, 一定注意区分。

参 考 文 献

- 〔1〕 ЖДПУАКОВ, В.Н. О РАСЧЕТЕ НЕКОТОРЫХ УПРУТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИБОРОВ, «ПРИБОРОСТРОЕНИЕ», №2, 1983
- 〔2〕 АНПРЕЕВА, П.Е.: «УПРУТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИБОРОВ», 1981
- 〔3〕 施立亭: 仪表片弹簧性支承的等性分析, 《工业仪表与自动化装置》, 1985年, 第3期
- 〔4〕 Hildebrand, S. Obliczanie i Zachowanie sie W Pracy Sprezyn Krzyzowych Pomiary Automalyka Kontrola, Z.11, 1958
- 〔5〕 Young, W.E.: An Investigation of the cross-spring pivot, J. A. Mechanics, V.11, №2, 1944
- 〔6〕 天津大学精仪系精密机械教研室: 《精密机械另件》, 人民出版社 1979年