

# 有限塑性率问题的虚功方程及自我校正方法的推证和应用

DERIVATION AND APPLICATION FOR VIRTUAL WORK EQUATION OF RATE PROBLEM IN FINITE PLASTICITY AND SELF-CORRECTING METHOD

汪凌云

Wang Linyun

(冶金及材料工程系)

**摘要** 本文首先从数学上证明了在有限塑性问题的虚功方程或变分原理中, Cauchy 应力是与 Euler 应变, Kirchhoff 应力是与 Lagrange 应变, 名义应力是与位移梯度配对的。接着, 在此基础上导出了 $\pi$ 形式的, 以 Kirchhoff 应力率表示的虚功方程。本文还以不同于 Tvergaard 的方法导出了他于 1984 年提出的自我校正方法, 使方法中的 Lagrange 乘子显示出物理意义。最后作为方法的应用, 本文根据所导出的 $\pi$ 形式的虚功方程建立的有限元公式和自我校正方法对圆棒拉伸时缩颈过程和缩颈传播作了有限元分析。并比较了采用或不采用自我校正方法两种情况下的有限元计算精度。分析时考虑了材料的硬化。

**关键词** 配对; 虚功方程; 自我校正

**ABSTRACT** In this paper, firstly, it is proved by mathematics that Cauchy Stress is conjugate to Euler Strain, Kirchhoff stress is conjugate to Lagrange strain, and nominal stress is conjugate to displacement gradient. Then, virtual work equation in rate form and expressed by Kirchhoff stress is derived. The self-correcting method proposed by Tvergaard in 1984 is also derived by a different way, thus giving Lagrange multipliers  $\lambda$  an obvious physical interpretation. Lastly, as the application of the methods, a FEM analysis is done for necking and neck propagation of a round tensile bar, and the computational solutions based on using or not using the self-correcting method are compared for accuracy. The strain hardening is considered.

**KEY WORDS** Conjugate; virtual work equation; self-correcting

本文于 1988 年 6 月 11 日收到。

## 一、引 言

众所周知,有限塑性问题无论在基本理论(例如变形几何理论,本构关系理论等)和求解方法上都是个处于发展中,尚未完全解决的问题。封闭形式的解一般是得不到的,即使是采用有限元方法求解,也需要按增量或率形式,而且每次增量必须非常小,否则极易出现解从平衡状态漂离、收敛不好,精度不够等问题,增量很小则又带来机时长、费用高的缺点。因此,发展有限塑性的基本理论和数值解法的技巧是具有重要意义和经济效益的,本文在这两方面都作了一定的尝试。

本文首先从数学上证明了在有限塑性问题的虚功方程或变分原理中, Cauchy 应力是与 Euler 应变, Kirchhoff 应力是与 Lagrange 应变,名义应力是与位移梯度配对(conjugate)的。接着,导出了率形式的,以 Kirchhoff 应力率表示的虚功方程。本文还以与 Tvergaard [3]不同的方式导出了他于1984年为了解决解易漂离平衡状态和精度问题而提出的自我校正(Self-Correcting)方法,从而使该方法中的Lagrange乘子 $\lambda$ 显示出物理意义。最后,本文按使用和不使用自我校正方法对圆棒拉伸的缩颈传播作了有限元分析。比较了两种情况下的精度。分析时,考虑了材料的硬化。

## 二、虚功方程中应力应变配对的证明

首先证明,在虚功方程中Cauchy 应力 $\sigma$ 是与Euler应变 $\epsilon_{ij}$ 配对的。设现时微表面元 $ds$ 上的单位引力(traction)矢量为 $\underline{T}$ ,现时单位体积力矢量为 $\underline{F}$ ,位移矢量为 $\underline{\mu}$ ,则外虚功为

$$EWF = \int_S \underline{T} \delta \underline{u} ds + \int_V \underline{F} \delta \underline{u} dv = \int_S T^i \delta U_i ds + \int_V F^i \delta U_i dv$$

式中所有分量都是定义在变形后基矢量 $\underline{G}_i$ 上的。 $U_i$ 是矢量 $\underline{u}$ 的协变分量,积分是相对于现时构形进行的。又设 $\Sigma^{ij}$ 是待定的,虚功方程中与应变分量配对的应力分量,则相对于现时构形的,用Euler应变表示的虚功方程可表示为

$$\int_V \Sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} dv = \int_S T^i \delta U_i ds + \int_V F^i \delta U_i dv \quad (2)$$

根据 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i} - U^k{}_i U^h{}_j)$ 可推得

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \delta G_{ij} = \frac{1}{2} (\delta U_{i,j} + \delta U_{j,i}) \quad (3)$$

(式中 $G_{ij}$ 是变形后度量张量,记号“ $\delta$ ”示相对于变形后度量的协变导数)因此,式(2)的左端可改写为

$$\int_V \Sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} dv = \int_V \Sigma^{ij} \frac{1}{2} (\delta U_{i,j} + \delta U_{j,i}) dv$$

$$= \int_V \Sigma^{ij} \delta U_{,j} dv = \int_V [(\Sigma^{ij} \delta U_{,j})_{,i} - \Sigma^{ij}_{,i} \delta U_{,j}] dv \quad (4)$$

根据散度定理, 有

$$\int_V [(\Sigma^{ij} \delta U_{,j})_{,i}] dv = \int_S \Sigma^{ij} \delta U_{,j} N_i ds$$

式中  $N_i$  是现时微面元  $ds$  的单位法矢。于是 (2) 式可改写为

$$\int_S \Sigma^{ij} \delta U_{,j} N_i ds - \int_V \Sigma^{ij}_{,i} \delta U_{,j} dv = \int_S T^i \delta U_{,i} ds + \int_V F^i \delta U_{,i} dv$$

因而有

$$\int_S (\Sigma^{ij} N_j - T^i) \delta U_{,i} ds = 0$$

即

$$\Sigma^{ij} N_j = T^i \quad (5)$$

又根据 Cauchy 应力的定义式 [1]、[2], 有

$$\sigma^{ij} N_j = T^i \quad (6)$$

所以, 在虚功方程中,  $\sigma^{ij}$  确实与  $\varepsilon_{ij}$  配对, 即相对于现时构形的虚功方程为

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_S T^i \delta U_{,i} ds + \int_V F^i \delta U_{,i} dv \quad (7)$$

同理可以证明在虚功方程中 Kirchhoff 应力  $\tau^{ij}$  是与 Lagrange 应变  $\eta_{ij}$ , 名义应力  $s^{ij}$  是与位移梯度  $u_{,ij}$  配对的。相应的虚功方程分别是

$$\int_{V_0} \tau^{ij} \delta \eta_{ij} dv_0 = \int_{S_0} t_0 \delta u_{,i} ds_0 + \int_{V_0} f^i \delta u_{,i} dv_0 \quad (8)$$

$$\int_{V_0} s^{ij} \delta u_{,ij} dv_0 = \int_{S_0} t^i \delta u_{,i} ds_0 + \int_{V_0} f^i \delta u_{,i} dv_0 \quad (9)$$

(8)、(9) 式中积分是对初始构形进行的。记号 “ $\sim$ ” 是对于变形前度量  $g_{ij}$  的协变导数。各分量是定义在变形前基矢量  $\underline{g}_i$  上的, 即  $\underline{u}_{,i}$  是  $\underline{u}$  对  $\underline{g}_i$  的协变分量。 $f^i$  是初始构形中单位体积力分量。 $\underline{t}$  是微面表元  $ds_0$  上的单位引力矢量。且有

$$\underline{t} = t_0^i \underline{G}_i = \tau^{ij} n_j \underline{G}_i \quad (10)$$

$$\underline{t} = t^i \underline{g}_i = s^{ij} n_j \underline{g}_i \quad (11)$$

(10)、(11) 式也是  $\tau^{ij}$ 、 $s^{ij}$  的定义式 [1]、[2]。根据  $\sigma^{ij}$  与  $\tau^{ij}$  的关系式

$$\tau^{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \sigma^{ij} \quad (12)$$

( $\rho_0$ 、 $\rho$  分别是物体在初始和现时构形中的密度) 及物质守恒  $\rho dv = \rho_0 dv_0$  和  $\delta \varepsilon_{ij} = \delta \eta_{ij} = \frac{1}{2}$

$\delta G_{ij}$  可推得

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_{V_0} \tau^{ij} \delta \eta_{ij} dv_0 \quad (13)$$

根据关系式

$$s^{ij} = \tau^{ij} + \tau^{ik} u_{j,k}^i \quad (14)$$

有

$$s^{ij} \delta u_{j,i} = \tau^{ij} \delta u_{j,i} + \tau^{ik} u_{j,k}^i \delta u_{j,i} \quad (15)$$

根据

$$\delta \eta_{j,i} = \frac{1}{2} \delta G_{j,i} = \frac{1}{2} (\delta u_{j,i} + \delta u_{i,j} + u_{k,i}^j \delta u_{k,j} + u_{k,j}^i \delta u_{k,i}) \quad (16)$$

可推得(在适当变换哑标后)

$$\tau^{ij} \delta \eta_{j,i} = \tau^{ij} \delta u_{j,i} + \tau^{ik} u_{j,k}^i \delta u_{j,i} \quad (17)$$

所以,在考虑(13)式后,有

$$\int_{V_0} \tau^{ij} \delta \eta_{j,i} dv_0 = \int_{V_0} s^{ij} \delta u_{j,i} dv_0 = \int_{V_0} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{j,i} dv \quad (18)$$

### 三、率形式的虚功方程

因为率或增量边值问题必须按变形的每个阶段求解,现时状态是已知的。此时,我们考虑关于现时状态的位移增量(或速度)的变分,因此,用名义应力率表示的率形式的虚功方程应是

$$\int_{V_0} \dot{s}^{ij} \delta \dot{u}_{j,i} dv_0 = \int_{S_0} \dot{t}^i \delta \dot{u}_i ds_0 + \int_{V_0} \dot{f}^i \delta \dot{u}_i dv_0 \quad (19)$$

式中的变分量是对速度 $\dot{u}$ 进行的。记号 $(\dot{\quad})$ 示物质率,但是,一般情况下,虚功方程是用 Kirchhoff 应力率表示的,因此,需要对(19)式进行变换。根据(14)式(对该式求物质导数)有

$$\dot{s}^{ij} = \dot{\tau}^{ij} + \tau^{ik} \dot{u}_{j,k}^i + \tau^{ik} u_{j,k}^i \dot{\quad} \quad (20)$$

将此式代入(19)式,有

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} [\dot{\tau}^{ij} + \tau^{ik} \dot{u}_{j,k}^i + \tau^{ik} u_{j,k}^i \dot{\quad}] \delta \dot{u}_{j,i} dv_0 \\ &= \int_{V_0} [\dot{\tau}^{ij} \frac{1}{2} (\delta \dot{u}_{j,i} + \delta \dot{u}_{i,j}) + \tau^{ik} u_{j,k}^i \delta \dot{u}_{j,i} \\ & \quad + \tau^{ik} \dot{u}_{j,k}^i \delta \dot{u}_{j,i}] dv_0 = \int_{S_0} \dot{t}^i \delta \dot{u}_i ds_0 + \int_{V_0} \dot{f}^i \delta \dot{u}_i dv_0 \end{aligned} \quad (21)$$

籍助于(对16式求物质导数)

$$\delta \dot{\eta}_{j,i} = \frac{1}{2} (\delta \dot{u}_{j,i} + \delta \dot{u}_{i,j} + u_{k,i}^j \delta \dot{u}_{k,j} + u_{k,j}^i \delta \dot{u}_{k,i}) \quad (22)$$

可将(21)式变换为

$$\int_{V_0} [\dot{\tau}^{ij} \delta \dot{\eta}_{j,i} + \tau^{ik} \dot{u}_{j,k}^i \delta \dot{u}_{j,i}] dv_0 = \int_{S_0} \dot{t}^i \delta \dot{u}_i ds_0 + \int_{V_0} \dot{f}^i \delta \dot{u}_i dv_0 \quad (23)$$

(23)式即是用 Kirchhoff 应力率表示的率形式的虚功方程。它可用于有限元计算。若对位

移变分, 则率形式的虚功方程为

$$\int_{V_0} [\dot{\tau}^{ij} \delta \eta_{,j} + \tau^{ik} \dot{u}^j_{,k} \delta u_{j,i}] dv_0 = \int_{S_0} \dot{t}^i \delta u_i ds_0 + \int_{V_0} \dot{f}^i \delta u_i dv_0 \quad (24)$$

(24)式亦适于有限元计算, 本文的有限元计算用的是该式。

#### 四、自我校正方法

建立在(23)或(24)式基础上的有限元增量形式的解在任何载荷水平上都应满足平衡, 每一个载荷增量都应满足率形式的平衡方程, 因此, 需要特别注意。通常都采用很小的增量, 以防止解从平衡状态偏离。进而可以采用 Tvergaard 提出的自我校正方法, 来防止解的偏离。假如我们把平衡方程(忽略体积力)

$$s^i_{,i} = [\tau^{ij} + \tau^{ik} u^j_{,k}]_{,i} = 0 \quad (25)$$

看作为率形式的平衡方程

$$\dot{s}^i_{,i} = [\dot{\tau}^{ij} + \tau^{ik} \dot{u}^j_{,k} + \tau^{ik} \dot{u}^j_{,i}]_{,i} = 0 \quad (26)$$

的辅助方程, 则可引入 Lagrange 乘子  $\lambda^{i(i)}$ , 并且写出方程

$$\dot{s}^i_{,i} + \lambda^{i(i)} s^i_{,i} = 0 \quad (27)$$

(27)式中  $\lambda$  的上标用括号括起来是为了表明不对该指标求和。对(27)式乘以  $\delta u_i$ , 并在体积  $V_0$  上积分, 然后利用散度定理, 可得到

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \dot{t}^i \delta u_i ds_0 - \int_{V_0} \dot{s}^i_{,i} \delta u_i dv_0 + \int_{S_0} \lambda^{i(i)} \delta u_i ds_0 \\ - \int_{V_0} \lambda^{i(i)}_{,i} \delta u_i dv_0 + \int_{V_0} \lambda_{,i} s^{i(i)} \delta u_i dv_0 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

式中

$$\lambda = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} \quad (29)$$

注意到(18)、(19)、(24)式后, (28)式可改写为

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\dot{\tau}^{ij} \delta \eta_{,j} + \dot{u}^j_{,k} \tau^{ik} \delta u_{i,j}) dv_0 = \int_{S_0} \dot{t}^i \delta u_i ds_0 \\ + \int_{S_0} \lambda^{i(i)} \delta u_i ds_0 - \int_{V_0} \lambda^{i(i)} \tau^{ij} \delta \eta_{,j} dv_0 - \int_{V_0} \lambda_{,i} s^{i(i)} \delta u_i dv_0 \end{aligned} \quad (30)$$

若假定  $\lambda$  在  $V_0$  中为常数, 则(30)式可简化为

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\dot{\tau}^{ij} \delta \eta_{,j} + \dot{u}^j_{,k} \tau^{ik} \delta u_{i,j}) dv_0 = \int_{S_0} \dot{t}^i \delta u_i ds_0 \\ + \lambda \left[ \int_{S_0} \dot{t}^i \delta u_i ds_0 - \int_{V_0} \tau^{ij} \delta \eta_{,j} dv_0 \right] \end{aligned} \quad (31)$$

因为

$$\int_{V_0} \tau^{ij} \delta \eta_{,j} dv_0 - \int_{S_0} \dot{t}^i \delta u_i ds_0 = 0 \quad (32)$$

恰恰就是虚功方程(忽略了体积力)。可见, 假若精确地满足平衡, 则(31)式简化为率形式的虚功方程(24)式。

根据(31)式所求的有限元解,通常称为自我校正,因为根据该式求解,可以防止解发生某种程度的漂离平衡状态。(31)式中 $\lambda$ 的值被 Tvergaard[3]取为1。为了进一步地了解 $\lambda$ 的意义,我们从另一角度导出(31)式。

假定某一给定问题在 $t$ 时刻的一个近似解已经得到,此解必定满足平衡或虚功方程:

$$\int_{V_0} s^{ij}(t) \delta u_{i,j} dv_0 - \int_{S_0} t^i(t) \delta u_i ds_0 = 0 \quad (33)$$

现求 $t^* = t + \Delta t$ 时刻的解,此解同样也应满足平衡,于是有

$$\int_{V_0} s^{ij}(t^*) \delta u_{i,j} dv_0 - \int_{S_0} t^i(t^*) \delta u_i ds_0 = 0 \quad (34)$$

为了进一步推导,假设一个下列形式步长积分法:

$$s^{ij}(t^*) = s^{ij}(t) + \Delta t \dot{s}^{ij}(t) \quad (35)$$

$$t^i(t^*) = t^i(t) + \Delta t \dot{t}^i(t)$$

把(35)式代入(34)式,并省写式中的 $t$ 时,得到

$$\int_{V_0} \dot{s}^{ij} \delta u_{i,j} dv_0 = \int_{S_0} \dot{t}^i \delta u_i ds_0 + \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{S_0} t^i \delta u_i ds_0 - \int_{V_0} s^{ij} \delta u_{i,j} dv_0 \right] \quad (36)$$

改用Kirchhoff应力率张量表示时

$$\int_{V_0} (\dot{\tau}^{ij} \delta \eta_{i,j} + \dot{u}_{i,k}^j \tau^{ki} \delta u_{i,j}) dv_0 = \int_{S_0} \dot{t}^i \delta u_i ds_0 + \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{S_0} t^i \delta u_i ds_0 - \int_{V_0} \tau^{ij} \delta \eta_{i,j} dv_0 \right] \quad (37)$$

当 $t$ 象与时间无关的塑性问题的 $t$ 那样为单调参数时,则有 $\dot{\tau}^{ij} \Delta t = \Delta \tau^{ij}$ ,当把(37)式写成增量形式时可见到这一点。并且它和 $\lambda = 1$ 的(31)式是相等的。另外一方面,当 $t$ 表示真实时间时,则 $\lambda = 1/\Delta t$ 。

从(37)式的导出可见 $\lambda$ 的意义。它表明,在同一时间, $\lambda$ 的值是与步长积分法一致的。对与时间无关的率塑性问题而言,在理论上 $\lambda = 1$ 。然而,数值解不必在任何时候都与理论一致。不等于1的 $\lambda$ 值往往能增加解的稳定性。

## 五、圆棒拉伸时缩颈过程的有限元分析

我们考虑变形规律与时间无关的弹塑性各向同性硬化材料,其本构方程的形式按照[4]是

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{ij} &= \left\{ \frac{1}{E} \left[ \frac{1+\nu}{2} (G_{i,k} G_{j,l} + G_{j,k} G_{i,l}) - \nu G_{i,j} G_{kl} \right] + \frac{A}{h} q_{ij} q_{kl} \right\} \frac{\nabla^{kl}}{\tau} \\ &= \overline{m}_{ijkl} \frac{\nabla^{kl}}{\tau} \end{aligned} \quad (38)$$

或

$$\frac{\nabla^{ij}}{\tau} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{2} (G^{i,k} G^{j,l} + G^{j,k} G^{i,l}) + \frac{\nu}{1-2\nu} G^{i,j} G^{kl} - \frac{A}{\beta} \right\}$$

$$q^{ij} q^{kl} \dot{\eta}_{kl} = \bar{L}^{ijkl} \dot{\eta}_{kl} \quad (39)$$

用 $\dot{\tau}^{ij}$ 表示则是

$$\dot{\tau}^{ij} = L^{ijkl} \dot{\eta}_{kl}, \quad \dot{\eta}_{ij} = m_{ijkl} \dot{\tau}^{kl} \quad (40)$$

式中 $\nabla_{\tau}^{ij}$ 是Kirchhoff应力的Jaumann率 $\bar{m}_{ijkl}$ 和 $m_{ijkl}$ 是材料的瞬时柔性张量, $\bar{L}^{ijkl}$ 和

$L^{ijkl}$ 是材料的模量张量。有 $\bar{L} = \bar{m}^{-1}$ ,  $L = m^{-1}$ 及 $E$ 是Young氏模量, $\nu$ 是Poisson比,

$$L^{ijkl} = \bar{L}^{ijkl} - \frac{1}{2} (G^{ik} \tau^{jl} + G^{jk} \tau^{il} + G^{il} \tau^{jk} + G^{jl} \tau^{ik}) \quad (41)$$

$q^{ij}$ 是应力偏量:

$$q^{ij} = \tau^{ij} - \frac{1}{3} G^{ij} G_{kl} \tau^{kl} \quad (42)$$

$h$ 是现时硬化率,可由单向拉伸时的资料得到:

$$\frac{1}{h} = \left( 2 \frac{3}{\tau_e} \right)^2 \left\{ \frac{\rho_0}{\rho} \left[ 1 - (1-2\nu) \frac{\tau_e}{E} \right] \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right\} \quad (43)$$

$\tau_e = (\rho_0/\rho) \sigma$ 是单向拉伸时的等效切应力, $E_t = d\sigma/dt$ 是切线模量,即真实应力——自然应变曲线的斜率。

$$\beta = (1+\nu) \frac{h}{E} + \frac{2}{3} \tau_e^2 \quad (44)$$

$$A = \begin{cases} 1 & \text{若 } q^{ij} \dot{\eta}_{ij} > 0, \text{ 且 } \tau_e = (\tau_e)_{\max} \\ 0 & \text{若 } q^{ij} \dot{\eta}_{ij} < 0 \text{ 或 } \tau_e < (\tau_e)_{\max} \end{cases} \quad (45)$$

有限塑性变形时,单向应力应变关系可取为

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} = \begin{cases} \frac{E}{\sigma_y} \epsilon & \sigma < \sigma_y \\ \left( \frac{E}{\sigma_y} \right)^N & \sigma > \sigma_y \end{cases} \quad (46)$$

式中 $\sigma_y$ 是Cauchy屈服应力, $N$ 是硬化指数。(43)式的切线模量由式

$$E_t = \begin{cases} E \\ NE \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^{\frac{(N-1)}{N}} \end{cases} \quad (47)$$

确定。

分析试样为中心附近存在缩颈状的初始几何缺陷的圆棒,该棒在轴向拉力作用下发生有限塑性变形,计算缩颈处应力应变及缩颈传播。圆棒的初始半径为 $2R_0$ ,初始长度为 $2L_0$ 。

采用圆柱坐标。取 $x^1 = r$ (径向), $x^2 = \theta$ (周向), $x^3 = z$ (轴向),将坐标原点定在棒件中心,由于问题的轴对称性,故有

$$u_r = u^r = u_r(r, z), \quad u_\theta = u^\theta = 0, \quad u_z = u^z(r, z)$$

由于 $z = 0$ 平面是对称平面,故只分析棒件的一半。在 $z = 0$ 处有

$$\dot{u}_i(r, 0) = 0, \quad (i=1, 2) \quad \dot{u}_z(r, 0) = 0$$

我们假定棒的端面无切应力作用。所以在  $z = L_0$  处的边界条件是

$$\dot{u}_i(r, L_0) = 0, \quad (i=1, 2) \quad \dot{u}_z(r, L_0) = \dot{U}$$

式中的  $\dot{U}$  是给定轴向速度。假定缩颈形状的初始局部几何缺陷呈如下形式

$$\Delta R = -\xi R_0 \exp \left[ \left( \frac{\gamma z}{L_0} \right)^2 \right]$$

且  $\xi = 0.0025$ ,  $\gamma = 4$ 。在  $z = 0$  断面处的相对面积缺陷为  $\Delta A/A_0 = 0.005$

在进行有限元计算时, 采用四边形环状单元, 每一环状单元内包含四个线性位移的三角形。每个单元内用 7 点 Gauss 数值积分法来计算(24)式中积分和(31)式中积分。

在对参数  $t$  积分时, 采用直接积分法。为方便起见, 取  $t$  为给定的端面速度, 于是  $U = 1$ ,  $\Delta t = \Delta U$

相应于(46)式的材料常数是  $E/\sigma_y = 250$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $N = 0.2$

计算对象的计算载荷——变形曲线示如图1中, 图2是伸长  $U/L_0$  分别等于 0.203 和 0.299 时,  $z = 0$  断面上的应力应变分布, 分析这些图可见, 当  $U/L_0 > \sigma_y/E$  时, 载荷——变形曲线的非线性已非常明显。但在  $z = 0$  断面上, 当  $U/L_0 = 0.203$  (图2中实线), 应力分布仍基本均匀。而当  $U/L_0 = 0.299$  (图2中虚线) 时, 应力分布的不均匀及诱发缩颈的非线性传播都非常明显。

表1和表2表示当  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 0$  时增加时间步长的影响。表中所选的, 用于比较的参数是  $z = 0$  和  $z = L_0$  时的半径  $R(R_N, R_U)$ , 轴向应力的物理分量  $\sigma_{zz}(0, 0)$ ,  $\sigma_{zz}(0, L_0)$  以及载荷  $P^U$ ,  $P^N$  (它们是由积分在  $R_U$  和  $R_N$  处的  $\sigma_{zz}$  得到的)。在给定情况下  $P^U$  和  $P^N$  的差别表示在整体平衡时误差的指标。在情况为 (i) 时比较表1和表2知时间步长大小  $\Delta U/L_0 = 0.0005$  时对于精确地线性化  $\lambda = 0$  的问题是足够的。因为取时间步长为 0.0005 时, 在充分局部化阶段 ( $U/L_0 = 0.299$ ) 也得到了类似的精度 (图2(a), 2(b)), 我们取  $\Delta U/L_0 = 0.0005$  时的解为  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$  时的收敛解。

表 1

情况	$\Delta U/L_0$	$R_N$	$R_U$	$\frac{\sigma_{zz}(0, L_0)}{\sigma_Y}$	$\frac{\sigma_{zz}(0, 0)}{\sigma_Y}$	$\frac{P^U}{\pi R_0^2 \sigma_Y}$	$\frac{P^N}{\pi R_0^2 \sigma_Y}$
(i)	0.0005	0.4512	0.4592	2.1214	2.2279	1.7931	1.7930
(ii)	0.001	0.4510	0.4593	2.1224	2.2315	1.7952	1.7929
(iii)	0.002	0.4505	0.4596	2.1240	2.2401	1.8004	1.7923
(iv)	0.003	0.4496	0.4601	2.1244	2.2522	1.8074	1.7900
(v)	0.006	0.4426	0.4631	2.1117	2.3516	1.8308	1.7717

注:  $\sigma_y/E = 0.004$ ,  $N = 0.2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $U/L_0 = 0.203$

$U/L_0 = 0.203$  的结果表明, 在没有局部化的情况下, 增加步长 6 倍并不明显地影响结果, 自我校正方法 ( $\lambda = 1$ ) 的影响不显著, 当步长大小增加 12 倍时 (情况 V), 无论  $\lambda = 0$  或  $\lambda = 1$ , 都发生漂离收敛解的现象。



表 2

情况	$\Delta U/L_0$	$R_N$	$R_U$	$\sigma_{zz}(0, L_0)$	$\sigma_{zz}(0, 0)$	$\frac{PU}{\pi R_0^2 \sigma_y}$	$\frac{PN}{\pi R_0^2 \sigma_y}$
(i)	0.0005	0.4512	0.4592	2.1216	2.2276	1.7931	1.7930
(ii)	0.001	0.4510	0.4593	2.1228	2.2308	1.7953	1.7930
(iii)	0.002	0.4506	0.4595	2.1250	2.2384	1.8004	1.7926
(iv)	0.003	0.4498	0.4600	2.1264	2.2492	1.8072	1.7909
(v)	0.006	0.4437	0.4629	2.1230	2.3350	1.8341	1.7751

注： $\sigma_y/E=0.004$ ,  $N=0.2$ ,  $\lambda=0$ ,  $U/L_0=0.203$

相应于  $U/L_0=0.299$  时的结果示于表 3 和表 4 中。在此情况下，局部化已充分发展。比较各种时间步长条件下的  $\sigma_{zz}(0, 0)$  值表明，在  $\lambda=0$  时，当  $\sigma_{zz}$  随着时间步长增加而降低时，自我校正方法防止漂移非常有效，这就是说，自我校正方法对于那些精度要求高的问题是非常有用的。

表 3 和表 4 情况 iv 的结果告诉我们，当  $\lambda$  取另外的值，如  $\lambda=0.25$ ，为得到关于  $\sigma_{zz}(0, L_0)$ ， $R_N$ ， $P^U$ ， $P^N$  的较好精度，则在  $\lambda=1$  时所得到的关于  $\sigma_{zz}(0, 0)$  的某些精度可能被牺牲掉。 $\lambda=0.25$  时的数值结果已经得到，它给出  $R_N=0.3488$ ， $R_U=0.464$ ， $\sigma_{zz}(0, L_0)=1.8011$ ， $\sigma_{zz}(0, 0)=3.5822$ ， $P^U=1.4654$ ， $\sigma_{zz}(0, 0)$  的精度稍为有点损失，而其它变量的精度有一定程度的改善

表 3

情况	$\Delta U/L_0$	$R_N$	$R_U$	$\frac{\sigma_{zz}(0, L_0)}{\sigma_y}$	$\frac{\sigma_{zz}(0, 0)}{\sigma_y}$	$\frac{PU}{\pi R_0^2 \sigma_y}$	$\frac{PN}{\pi R_0^2 \sigma_y}$
(i)	0.0005	0.3578	0.4590	1.8533	3.5973	1.5718	1.5653
(ii)	0.001	0.3562	0.4592	1.8446	3.5951	1.5661	1.5467
(iii)	0.002	0.3526	0.4597	1.8239	3.5947	1.5525	1.5073
(iv)	0.003	0.3477	0.4605	1.7928	3.6071	1.5330	1.4620

注： $\sigma_y/E=0.004$ ,  $N=0.2$ ,  $\lambda=1$ ,  $U/L_0=0.209$

表 4

情况	$\Delta U/L_0$	$R_N$	$R_U$	$\frac{\sigma_{zz}(0, L_0)}{\sigma_y}$	$\frac{\sigma_{zz}(0, 0)}{\sigma_y}$	$\frac{PU}{\pi R_0^2 \sigma_y}$	$\frac{PN}{\pi R_0^2 \sigma_y}$
(i)	0.0005	0.3584	0.4590	1.8580	3.5320	1.5756	1.5664
(ii)	0.001	0.3573	0.4592	1.8536	3.5663	1.5735	1.5490
(iii)	0.002	0.3545	0.4597	1.8411	3.5419	1.5672	1.5120
(iv)	0.003	0.3513	0.4602	1.8264	3.5233	1.5580	1.4731

注： $\sigma_y/E=0.004$ ,  $N=0.2$ ,  $\lambda=0$ ,  $U/L_0=0.299$

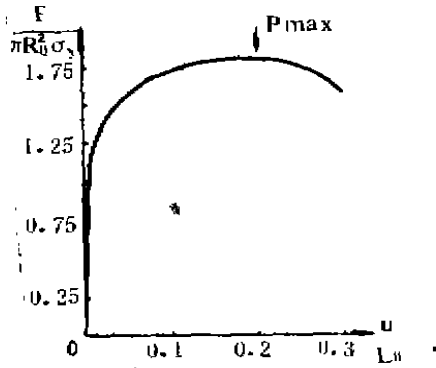


图1 圆棒 ( $L_0/R_0 = 4$ ) 受拉时的计算载荷伸长曲线

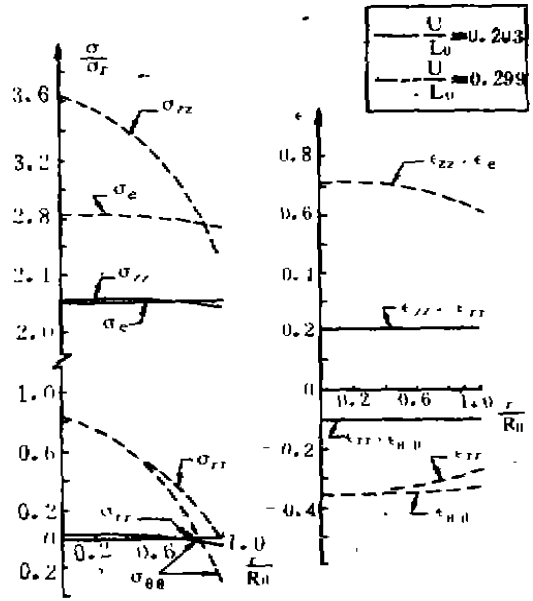


图2 伸长  $U/L_0 = 0.203, 0.299$  时缩颈断面 ( $z=0$ ) 上应力应变分布

### 参考文献

- [1] Hill, R. A General Theory of Uniqueness And Stability in Elastic-Plastic Solids, J. Mech. Phys. Solids, 1958; 6; 236—249
- [2] Hill, R. Some Basic Principle in the Mechanics of Solids without A Natural Time, J Mech Phys Solids, 1959; 7; 209—225
- [3] Tvegaard V. Analysis of The Cup-Cone Fracture in A Round Tensile Bar, Acta Metall, 1984; 32; 157—169
- [4] Hutchinson, W. Finite Strain Analysis of Elastic-Plastic Solids And Structures, Edit. Hartung, R. ASME, 1973; 17—29
- [5] 汪凌云. 论金属成形塑性本构方程, 第二次全国塑性力学学术会论文, 合肥; 1988, 1—20