重 庆 大 学 学 报
第12卷 第2期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY vol.12 No2.1989

FINSLER流形上的非光滑分析(Ⅰ)

NONSMOOTH ANALYSIS ON FINSLER MANIFOLD(Ⅰ)

马仁义

Ma Renyi

(应用数学系)

摘 要 本文应用微分几何、微分拓扑中关于微分流形和纤维丛的基本理论有效地将Banach空间的非光滑分析的基本理论推广到Finsler流形上，它也可以看成是Finsler流形上可微函数理论的推广。

关键词 Finsler流形；切丛；局部Lipschitz函数；广义梯度

ABSTRACT In this paper the basic theory on differentiable manifold and fibre bundle in differential Geometry and differential topology are used to generalize the basic theory of Nonsmooth Analysis on Banach Spale to the case of Finsler manifold. It can be considered as the generalization of differentiable function theory on Finsler manifold.

KEY WORDS Finsler manifold; tangent bundle; locally Lipschitz function; generalized gradient

非光滑分析是七十年代兴起的一个分析分支，是从规划论，控制论等理论中发展起来的，近年来又找到了它在数学物理自由边值问题中的应用，参见[1，2]及所列参考文献。

本文将关于Banach空间的局部Lipschitz函数的F.H. Clarke广义梯度理论推广到Finsler流形上，建立了Finsler流形上的非光滑分析理论的基本框架，是流形上微分学理论的推广。

关于Finsler流形、切丛等基本概念请参看[2，6]。

定义1 我们称$f\in C^{1-0}(M, R^1)$，即f是M上的局部Lipschitz函数，是指$\forall x_0\in M$，都存在x_0的邻域$U(x_0)$，以及常数$K=K(x_0)$，使得：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K\rho(x, y)\quad \forall x, y\in U(x_0)$$

易证定义1等价于

定义1* 我们称$f\in C^{1-0}(M, R^1)$，即f是M上的局部Lipschitz函数，是指$\forall x_0\in M$，都存在x_0的坐标$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，以及常数$K=K(x_0)$，使得：

$$|f\cdot\varphi_\alpha^{-1}(x)-f\cdot\varphi_\beta^{-1}(y)|\leqslant K|x-y|,\ x, y\in\varphi_\alpha(U_\alpha)\subset X。$$

本文于1987年12月12日收到。

对于Finsler流形M上定义的局部Lipschitz函数$f:M\to R^1$，即$f\in C^{1-0}$，一般说来，它不可微。但对这类函数，同Banach空间的情形一样，也可以推广导数的概念并发展微分法，从而讨论变分问题。

对于给定的切方向$[i,\ p,\ u]\in Tp(M)$，定义广义方向导数为：

$$d^\circ f[i,\ p,\ u]=\overline{\lim_{\substack{y\to p\\ t\downarrow o}}}\frac{f\cdot\varphi_i^{-1}(\varphi_i(y)+tu)-f(y)}{t}$$

首先，我们证明这个定义有意义，即若$[i,\ p,\ u]=[j,\ p,\ v]$应该有$d^\circ f[i,\ p,\ u]=d^\circ f[j,\ p,\ v]$。

定理1若$[i,\ p,\ u]=[j,\ p,\ v]$，则$d^\circ f[i,\ p,\ u]=d^\circ f[j,\ p,\ v]$。

证明：按定义

$$d^\circ f[j,\ p,\ v]=\overline{\lim_{\substack{y\to p\\ t\downarrow 0}}}\frac{f\cdot\psi_j^{-1}(\psi_j(y)+tv)-f(y)}{t}$$

$$=\overline{\lim_{\substack{y\to p\\ t\downarrow 0}}}\frac{f\cdot\varphi_i^{-1}\cdot\varphi_i\cdot\psi_j^{-1}(\psi_j(y)+tv)-f(y)}{t}$$

由于$\varphi_i\cdot\psi_j^{-1}$：$\psi_j(U_i\cap U_j)\longrightarrow\varphi_i(U_i\cap U_j)$是$C^1$的，因此由Frechet微分的定义有：

$$\|\varphi_i\cdot\psi_j^{-1}(\psi_j(y)+tu)-\varphi_i(y)-t(d\varphi_i\cdot\psi_j(\psi_j(y),\ v)\|=0(t)$$

从而由f是局部Lipschitz的可知

$$|f\cdot\varphi_i^{-1}\cdot\varphi_i\cdot\psi_j^{-1}(\psi_j(y)ftu)-f\cdot\varphi_i^{-1}(\varphi_i(y)+t(d\varphi_i\cdot\psi_j^{-1})(\psi_j(y),\ v)|$$
$$\leqslant K(p)0(t)$$

因此有

$$d^\circ f[j,p,\ v]=\overline{\lim_{\substack{t\downarrow 0\\ y\to p}}}\frac{f\cdot\varphi_i^{-1}(\varphi_i(y)+t(d\varphi_i\cdot\psi_j^{-1}(\psi_j(y),v))-f(y)}{t}$$

再应用$d(\varphi_i\cdot\psi_j^{-1})$的连续性知，当$y\to p$时，

$$d(\varphi_i\cdot\psi_j^{-1}(\psi_j(y),\ v)\longrightarrow d(\varphi_i\cdot\psi_j^{-1}(\psi_j(p),\ v)\quad(1)$$

又应用f的局部Lipschitz连续性有：

$$|f\cdot\varphi_i^{-1}(\varphi_i(y)+t(d\varphi_i\psi_j^{-1})(\psi_j(y),v))-f\cdot\varphi_i^{-1}(\varphi_i(y)+t(d\varphi_i\psi_j^{-1}(\psi_j(p),v))|$$

$$\leqslant t\|d\varphi_i\psi_j^{-1}(\psi_j(y),\ v)-d\varphi_i\psi_j^{-1}(\psi(p),\ v)\|\quad(2)$$

而由假设$[i,\ p,\ u]=[j,\ p,\ v]$知$u=d\varphi_i\cdot\psi_j^{-1}(\psi_j(p),\ v)$代入上式得到$d^\circ f[j,\ p,\ v]=d^\circ f$

$[i, p, u]$

不难验证广义方向导数具有下列性质

（1）　函数$d^\circ f_p: T_p \longrightarrow R^1$是次可加的、正齐次的，从而是凸的。

证明　正齐次性由定义立得，次可加性验证如下：设$[i, p, u_1]$，$[i, p, u_2] \in T_p(M)$，根据$T(M)$的定义知：$[i, p, u_1]+[i, p, u_2]=[i, p, u_1+u_2]$，再按$d^\circ f$的定义有：$d^\circ f([i, p, u_1]+[i, p, u_2])$

$$= \overline{\lim_{\substack{y\to p\\ t\downarrow 0}}} \frac{f\cdot\varphi_i^{-1}[\varphi_i(y)+t(u_1+u_2)]-f(y)}{t}$$

$$= \overline{\lim_{\substack{y\to p\\ t\downarrow 0}}} \frac{f\cdot\varphi_i^{-1}[\varphi_i(y)+t(u_1+u_2)]-f\cdot\varphi_i^{-1}(\varphi_i(y)+tu_1)+f\cdot\varphi_i^{-1}(\varphi_i(y)+tu_1)-f(y)}{t}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\substack{y\to p\\ t\downarrow 0}}} \frac{f\cdot\varphi_i^{-1}(\varphi_i(y)+tu)-f(y)}{t}$$

$$+\overline{\lim_{\substack{y\to p\\ t\downarrow 0}}} \frac{f\cdot\varphi_i^{-1}[\varphi_i(y)+t(u_1+u_2)]-f\cdot\varphi_i^{-1}(\varphi_i(y)+tu_1)}{t}$$

$$=d^\circ f[i, p, u_1]+d^\circ f[i, p, u_2],$$　　证毕。

（2）存在常数$K=K(p_0)$及邻域$U=U(p)$使得：$|d^\circ f[i, q, u]|\leqslant K\|[i, q, u]\|$，$\forall [i, q, u]\in T_U(M)$。

证明　根据f的局部Lipschitz连续性可知：存在$K=K(p)$，$U=U(p)$，使得：

$|f\circ\varphi_i^{-1}(x)-f\circ\varphi_i^{-1}(y)|\leqslant K\|x-y\|$，$\forall x, y\in\varphi_i(u)\subset X$，从而由$d^\circ f$的定义，

$$d^\circ f[i, p, u]=\overline{\lim_{\substack{y\to p\\ t\downarrow 0}}} \frac{f\cdot\varphi_i^{-1}(\varphi_i(y)+tu)-f(y)}{t}$$

$\leqslant K\|u\|\leqslant K_1\|[i, p, u]\|$（由Finsler流形的定义）

再应用性质（1）有$-d^\circ f[i, p, u]=d^\circ f(-[i, p, u])$结合上式和性质（2）立得。

（3）　$d^\circ f[i, p, u]: T_p\to R^1$是连续的Lipschitz函数。

证明　由（1）和（2），$\forall u, v\in X$，

$d^\circ f[i, p, u]-d^\circ f[i, p, v]\leqslant d^\circ f([i, p, u]-[i, p, v])$交换$u$和$v$，（3）立即可证。

（4）　$d^\circ f(-[i, p, u])=d^\circ(-f)[i, p, u]$。

证明　按定义

$$d^\circ f[-[i, p, u]]=d^\circ f[i, p, -u]$$

$$= \overline{\lim_{\substack{y \to p \\ t \downarrow 0}}} \left[\frac{1}{t} (f \cdot \varphi_i^{-1}(\varphi_i(y) + t(-u)) - f(y)) \right]$$

$$= \overline{\lim_{\substack{y \to p \\ t \downarrow 0}}} \frac{1}{t} \left[(-f) \cdot \varphi_i^{-1}(\varphi_i(y) - tu + tu) - (-f) \cdot \varphi_i^{-1}(\varphi_i(y) - tu) \right]$$

$$= d^\circ(-f)[i, p, u]$$

同Banach空间的情形一样，广义梯度是通过广义方向导数定义的。

定义2 设$f \in C^{1-0}(M, R^1)$，我们定义f在p处的广义梯度$\partial f(p)$为凸函数$d^\circ f|_p$：$Tp \to R^1$在θ点的次微分$\partial(f^\circ(p, \theta))$，即

$$\{x^* \in T_p^*(M) | \langle x^*, [i, p, u] \rangle \leq d^\circ f[i, p, u], \forall [i, p, u] \in T_p\}$$

关于广义梯度有下列基本性质，除性质(6)和(7)以外，其余性质的证明和Banach空间的情形是平行的。我们只给出(6)和(7)的证明

(1) $\forall p \in M$，$\partial f(p)$是一个非空的，*弱紧凸子集。

(2) $sup\{||x^*||T_p^*|x^* \in \partial f(p)\} \leq K$

(3) $\forall [i\, p, u] \in T_p(M)$，$d^\circ f[i, p, u] = max\{\langle x^*, [i, p, u]\rangle | x^* \in \partial f(p)\}$

(4) 设Ω是$T_p^*(M)$中的非空弱*紧凸子集，则$\partial f(x_0) \subset \Omega \Leftrightarrow d^\circ f[i, p, u] \leq max\{\langle x^*, [i, p, u]\rangle | x^* \in \Omega\} \forall [i, p, u] \in T_p(M)$

(5) 设f在x^0的一个邻域内Gateaux可微的，并且G导数还是连续的，则$\partial f(p) = df|_p$

(6) $\partial: p \in M \to \partial f(p) \subset T^*(M)$是*弱上半连续的。即$\forall p \in M$，$\forall \varepsilon > 0$，$\forall u \in X_n$都存在$p$的邻域$U = U(p, \varepsilon, u)$使得$\forall q \in U$时，$\forall \omega \in \partial f(q)$都有$\omega_0 \in \partial f(p)$使得：

$$|\langle \omega, [i, q, u]\rangle - \langle \omega_0, [i, p, u]\rangle| < \varepsilon_\circ$$

证明 倘若不然，$\exists\, p_0 \in M$，$u_0 \in X$，$\varepsilon_0 > 0$，以及$p_n \in M$，$\xi_n \in \partial f(p_n)$，使得$p^n \to p_0$，$|\langle \xi_n, [i, p_n, u_0]\rangle - \langle \omega, [i, p_0, u_0]\rangle| \geq \varepsilon_\circ$，$\forall \omega \in \partial f(p)$。因为$\{p_n\}$在$p_0$的邻域内，由性质(2)有，$||\xi_n||T_{p_n}^*(M) \leq K_1$，记$\xi_n = [i, p_n, \eta_n]^* \in T_{p_n}^*(M)$，但由$M$为Finsler流形可知存在$k_0 > 0$，$N > 0$，使得当$n \geq N$时有：

$$||\eta_n||X^* \leq k||[i, p_n, \eta_n]^*||T^*_{p_n}(M) \leq k_0 K_1$$

因此$\{\eta_n\}$在X^*中有*弱收敛子列$\eta_{nk} \to \eta_\circ$(*弱)。现在证明$[i, p, \eta_0]^* \in \partial f(p_0)$。事实上，对$[i, p_0, u] \in Tp_0(M)$，$\exists q_k \to p_0$，$t_k \searrow 0$使得

$$\frac{1}{t_k}(f \cdot \varphi_i^{-1}(\varphi_i(q_k) + t_k u) - f(q_k))] > \langle [i, p_{nk}, \eta_{nk}]^*, [i, p_{nk}, u]\rangle - \frac{1}{k},$$

$k = 1, 2, \cdots\cdots$。于是有：

$$d^\circ f[i, p, u] \geq \overline{\lim_{k \to \infty}} \langle [i, p_{nk}, \eta_{nk}]^*, [i, p_{nk}, u]\rangle$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}<\eta_{nk},\ u>=<\eta_0,\ u>$$

$$=<[i,\ p_0,\ \eta_0]^*,\ [i,\ p_0,\ u]>$$

所以$\xi_0=[i,\ p,\ \eta_0]^*\in\partial f(p_0)$。在假设式子中取$\omega=\xi_0$得到矛盾：$1<\xi_n,\ [i,\ p_n,\ u_0]>-<\xi_0,[i,p_0,u_0]>|=|<\eta_n,\ u_0>-<\eta_0,\ u_0>|\geqslant\varepsilon_0$，而$\eta_{nk}\to\eta_0$（*弱）矛盾。　**证毕。**

（7）　$\lambda(p)\triangleq Min\{||\omega||\,T_p^*(M)|\omega\in\partial f(p)\}$存在，是一个下半连续函数。

证明　函数$\omega\to||\omega||$是*弱下半连续的，又由性质（1）知$\partial f(p)$是$T_p^*(M)$中的非空*弱紧凸子集，所以$\forall p\in M$，$\exists\omega_0\in\partial f(p)$使得：

$$\lambda(p)=||\omega_0||=inf\{||\omega||_{T^*(M)}|\omega\in\partial f(p)\}$$

再证λ的下半连续性。若不然，$\exists p_n\to p_0$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(p_n)<\lambda(p_0)$

设$\omega_n\in\partial f(p_n)$为使$||\omega_n||=\lambda(p_n)$，$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$的点，则由性质（6）和Finsler流形的定义可知，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$以及点列$u_n\in X$，$||[i,\ p,\ u_n]||=1$，$x_n\in\partial f(p_0)$使得当$n\geqslant N$时有

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\leqslant||[i,\ p_n,u_n]||_{Tp_n\ M)}\leqslant(1+\varepsilon) \tag{5}$$

$$||x_n||_{T_{p_0}^*(M)}\leqslant\langle x_n,\ [i,\ p_0,\ u_n]\rangle+\frac{1}{2n} \tag{6}$$

$$|\langle x_n,\ [i,\ p_0,\ u_n]\rangle-\langle\omega_n,\ [i,\ p_n,\ u_n]\rangle<\frac{1}{2n} \tag{7}$$

则由（5），（6），（7）式可知：

$$||x_n||_{T_{p_0}^*(M)}\leqslant\langle x_n,\ [i,\ p_0,\ u_n]\rangle+\frac{1}{2n}$$

$$\leqslant\langle\omega_n,[i,\ p_n,\ u_n]\rangle+\frac{1}{n}$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)||\omega_n||+\frac{1}{n}$$

当$n\to\infty$，有$\underline{\lim}_{n\to\infty}\lambda(p_n)\geqslant\frac{1}{1+\varepsilon}\lambda(p_0)$，而由$\varepsilon$的任意性，可知$\underline{\lim}_{n\to\infty}\lambda(p_n)\geqslant\lambda(p_0)$，这是一个矛盾。

（8）　设$\phi\in C^1([0,1],\ M)$，并且$f\in C^{1-0}(M,\ R^1)$，则$h=f\circ\phi$：$[0,1]\to R^1$几乎处处可微，并且

$h^1(t)\leqslant max\{\langle x^*,\ \phi^1(t)\rangle|x^*\in\partial f(\phi(t))\}\quad a.e.$

（9）　$\partial(f+g)(p)\subset\partial f(p)+\partial g(p)$

（10）　设P是f的局部极小，则$\theta\in\partial f(p)$

（11）　设$f_1,\ f_2,\ \cdots\cdots,\ f_n$是局部Lipschitz函数，$m(x)=max\{f_i(x)|i=1,\ 2,\ \cdots\cdots$

$n\}$，则

$$\partial m(x) \subset Co\{\partial f_i(x) \mid i \in M(x)\} \quad (Co\text{表示凸包})$$

其中$M(x)$是那些在x点使得$f_i(x) = m(x)$的指标集。

参 考 文 献

〔1〕 史树中．非光滑分析．数学进展，1986，（1）：8—21。

〔2〕 张恭庆．临界点理论及其应用．上海：上海科学技术出版社，1986

〔3〕 Lang S. Differential Manifolds. Springer-verlag New York Inc, 1985

〔4〕 Clarke F H. Optimization and Nonsmooth Analysis. New York: Wiley-Intersience, 1983

〔5〕 Kelley, J. L, Namioka I. Linear Topological Spacles. Van Norstrand, 1963

〔6〕 马仁文。非光滑函数的临界点理论及应用，重庆大学硕士研究生毕业论文，1988