1989年5月　　重庆大学学报　　Vol.12, No.3
第12卷第3期　　JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY　　May, 1989

Banach空间中极值问题的高阶最优性充分条件

HIGHER ORDER OPTIMILITY SUFFICIENT CONDITION OF EXTREMUM PROBLEM IN BANACH SPACES

陈修素※　　罗国光
Chen Xiushu　　Luo Guoguang
（应用数学系）

摘　要　本文考虑Banach空间中带约束的极值问题(P)，通过引入容许集合的高阶逼近，首次建立了无穷维空间上优化问题(P)的高于三阶的最优性充分条件，并概括了[1，3，5，6，7]中的极值问题最优性充分条件的二阶结果。

关键词　最优性充分条件；高阶逼近；最优点（解）

ABSTRACT　In this paper the constrained extremum problem(P) in Banach spaces is discussed. First the higher order (more than three) optimality sufficient condition of the problem (P) in infinite dimension spaces is established with defining and introducing higher order approximation of the feasible set, it generalizes the theory of second order optimality sufficient conditions on the extremum problem of[1.3.5.6.7].

KEY WORDS　optimality sufficient condition; higher order approximation; optimum point (solution)

一、引　言

众所周知，在最优化理论中，最优性条件的研究有着越来越重要的意义，其中以必要条件的结果较为丰富，可以说相对于充分性条件的研究而言，前者较为容易，但是，有时候满足最优性必要条件的容许点未必一定是(P)的最优解，为此我们有必要建立某些准则，使得满足这些准则的容许点定为最优解，这就是此处所提及的最优性充分条件，对于这样一个课题的讨论早已有之，大部分优化理论的专著或文献都或多或少地涉及一些一阶或二阶最优性充分条件，它们主要利用了切锥，伪切锥或容许集合的伪凸性，正则性等概念建立起来的，见[1，3，4，5，6，7，8]，其中以有限维空间上的最优性充分条件的理论较为精

本文于1988年3月11日收到

※　现在重庆商学院工作

彩，见〔5，7〕，因此大部分文献只讨论了有限维空间中最优化问题的二阶充分性条件，从以上文献看出，借助于切锥所描述的拉格朗日乘子形式的二阶充分性条件与有限维空间的紧致性密切相关，正因为如此，许多作者为了避免无限维空间上所带来的麻烦就只对有限维空间上的最优问题加以考虑，但是也有一些文献〔6，7〕敢于面对这一困难，〔7〕中的作者首先引入了容许集M在某点$x_0(x_0\in M)$处的线性逼近$L(M_1x_0)$的概念，建立了类似于无限维空间上最优化问题的拉格朗日形式的二阶充分条件，无论是有限维或无限维空间X上的相应问题都是如此，然而，事实说明现在已有的一阶、二阶最优性充分条件的理论远不足以判定一个解的最优性，因此，在本文里我们引进容许集M在某点x_0的高阶逼近$L^m(M,x_0)$的概念，建立了类似于拉格朗日形式的正定性的最优解的高阶充分条件。

二、预 备 知 识

现在我们给出本文所要讨论的极值问题

(P) $\mathrm{Min} f(x)$

$s\cdot t\cdot g(x)\in -K$

$h(x)=0.\quad x\in X.$

其中$f:X\to U$、$g:X\to V$、$h:X\to M$是给定映射，X，U，V，W是实赋范向量空间，K是V中具有非空内部的凸维，$C\subset U$，C是凸锥且$\mathrm{int}C\neq\Phi$，U由C定序，即$\forall u_1$，$u_2\in U$，$u_1\geq u_2(u_1>u_2)\Longleftrightarrow u_1-u_2\in C(u_1-u_2\in \mathrm{int}C)$

再看我们的最优化问题的描述，

定义2.1　设$x_0\in X$，如果存在x_0的一邻域Nx_0使得

$$\{x\in X:g(x)\in -K,\ h(x)=0\}\cap\{x\in X:f(x)<f(x_0)\}\cap Nx_0=\Phi$$

则称x_0是问题(P)的最优解点（解）

注：如$U=R$，$C=[0.+\infty)$则上述的最优解就是通常的数学规划中的局部极小解，

为了以后描述的方便，记M为问题(P)的容许集合，即

$$M=\{x\in X.\ g(x)\in -K,\ h(x)=0\}$$

此时我们引进容许集M的高阶逼近的概念

定义2.2　设$x_0\in M$，$L^m(M,x_0)\subset X^m$，且存在映射$h:M\to L^m(M,x_0)$，$\forall x\in M$，$h(x)=(h_1(x),h_2(x),\cdots,h_m(x))\in L^m(M,x_0)$使得

$$x=x_0+h_1(x)+h_2(x)+\cdots+h_m(x)+r(x)$$

$$\|x-x_0-h_1(x)-\cdots-h_i(x)\|=0(\|x-x_0\|^i)\quad i=1,2,\cdots,m$$

则称$L^m(M,x_0)$是M在x_0点的m阶逼近。

现在考察较为特殊的情形，当$m=1$，$L^1(M,x_0)\triangleq L(\Sigma,x_0)=\{h\in X,g'(x_0,h)\in -K+Rg(x_0)$且$h'(x_0,h)=0\}$即为F.Lempio and J.Zowe〔6〕中的线性锥。

下面给出一引理，易知当$m=2$时它就描述了〔7〕中的引理5.5（或〔6〕中的引理3.10

引理2.3　设X是赋范线性空间，B是X^m上的连续对称的m线性形式，H是X的非空子集且

$$B(d,\cdots,d)\geqslant\delta\|d\|^m\quad \forall d\in H,\ (\text{其中}\delta\text{是一正常数})，\text{则存在}\delta_0>0,$$

$\gamma>0$ 使得 $\qquad B(d+z,d+z,\cdots,d+z)\geqslant\delta_0\|d+z\|^m \quad \forall d\in H,z\in X$ 且 $\|z\|\leqslant r\|d\|$

证明，令 $b=\|B\|$，则由 B 的连续性有

$$B(d_1,d_2,\cdots,d_m)\leqslant b\prod_{i=1}^{m}\|d_i\| \qquad \forall d_1,\cdots,d_m\in X$$

现选 $\gamma>0$ 充分小使得 $\delta'=\delta-b\sum\limits_{i=1}^{m}C_m^i\gamma^i>0$

（这里 C_m^i 表示从 m 个元素中取 i 个的组合数）则对任何 $d\in H,z\in X,\|z\|\leqslant r\|d\|$ 有

$$B(d+z,d+z,\cdots,d+z)=\sum_{i=0}^{m}C_m^iB(\overbrace{z,\cdots z}^{i\text{个}},\overbrace{d,\cdots,d}^{m-i\text{个}})$$

$$=B(d,d,\cdots,d)+\sum_{i=1}^{m}C_m^iB(\overbrace{z,\cdots,z}^{i\text{个}},d,\cdots,d)$$

$$\geqslant\delta\|d\|^m-\sum_{i=1}^{m}C_m^ibr^i\|d\|^m=\delta'\|d\|^m$$

又由于 $\|d+z\|\leqslant\|d\|+\|z\|\leqslant(1+r)\|d\|$，所以 $\|d\|\geqslant\frac{1}{1+r}\|d+z\|$ 取 $\delta_0=\frac{\delta'}{(1+r)^m}$

则有 $\qquad B(d+z,\cdots,d+z)\geqslant\delta'\frac{1}{(1+r)^m}\|d+z\|^m=\delta_0\|d+z\|^m$

$$\forall d\in H,\ z\in X,\ \text{且}\ \|z\|\leqslant\gamma\|d\|$$

我们再给出一引理，它在本文的主要定理的证明中需要

引理2.4　设 $L^{m-1}(M,x_0)$ 是 M 在 x_0 处的 $m-1$ 阶逼近，则对任一正数 $\gamma>0$，存在 $\rho>0$ 使得

$$\|h_1(x)-(x-x_0)\|\leqslant\gamma\|h_1(x)\| \qquad \forall x\in M\text{且}\|x-x_0\|\leqslant\rho$$

证明，任取定 $\delta\in(0,1)$，由于 $L^{m-1}(M,x_0)$ 是 M 在 x_0 处的 $m-1$ 阶逼近，则可选 $\rho=\rho(\delta)>0$，使得对任意 $x\in M$，且 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 时有

$$\|h_1(x)-(x-x_0)\|\leqslant\delta\|x-x_0\|$$

及 $\qquad \|h_1(x)\|\geqslant\|x-x_0\|-\|h_1(x)-(x-x_0)\|\geqslant(1-\delta)\|x-x_0\|$

所以 $\qquad \|h_1(x)-(x-x_0)\|\leqslant\delta\|x-x_0\|\leqslant\delta\frac{1}{1-\delta}\|h_1(x)\|=\frac{\delta}{1-\delta}\|h_1(x)\|$

$$\forall x\in M,\ \|x-x_0\|\leqslant\rho$$

现设 $\gamma>0$ 已给定，则总可选 $\delta\in(0,1)$ 使得 $\frac{\delta}{1-\delta}<\gamma$，$\rho$ 是相应的 $\rho(\delta)$ 时，由上知引理2.4真实

三、高阶最优性充分条件及定理的证明

现我们描述本文的主要内容。

定理3.1 M是问题(P)的容许集，$x_0\in M$，$L^{m-1}(M,x_0)$是M在x_0处的$m-1$阶逼近，还设f、g、h均在x_0的某邻域内具有m阶 Frechet 连续微分，如果存在实数$\delta_i>0$，$i=1$，$2,\cdots,m$及乘子$\lambda=(u^*,v^*,w^*)\in[C^+\setminus\{0\}]\times K^*\times W^*$使得

$$F'(x_0)=u^*f'(x_0)+v^*g'(x_0)+w^*h'(x_0)=0 \tag{1}$$

$$v^*g(x_0)=0 \tag{2}$$

这里$F(x)=u^*f(x)+v^*g(x)+w^*h(x)$是($P$)的拉格朗日函数，且：

$$F^{(i)}(x_0)\Big(\sum_{k=1}^{m-1}h_k\Big)^i\geqslant 0,\quad \forall h\in L^{m-1}(M,x_0)\cap C^j(\delta)\quad i=2,\cdots,j$$

$$\left[\text{其中}\ C^j(\delta)=\left\{h\in X^{m-1}\ \middle|\ \begin{array}{l}u^*f'(x_0)h_1\leqslant\delta_1\|h_1\| \quad i=2,3,\cdots,j\\ \text{且}F^{(i)}(x_0)(h_1)^i\leqslant\delta_i\|h_1\|^i\end{array}\right\}\right]$$

$$j=1,2,\cdots,m-1 \tag{3}$$

$$F^{(m)}(x_0)(h_1)^m\geqslant\delta_m\|h_1\|^m\quad \forall h\in L^{m-1}(M,x_0)\cap C^{m-1}(\delta) \tag{4}$$

则存在实数$\beta>0$，$\rho>0$使得

$$u^*f(x)\geqslant u^*f(x_0)+\beta\|x-x_0\|^m\quad \forall x\in M,\ \|x-x_0\|\leqslant\rho \tag{5}$$

从而x_0是问题(P)的强局部最优解（即在x_0的某一邻域N内不存在$x\in M$，使得$x\neq x_0$，$f(x)-f(x_0)\in \mathrm{cl}C$）

证明：由本定理的条件(1)—(4)易知，对任意$x\in M$，$h(x)=(h_1(x),h_2(x),\cdots,h_{m-1}(x))\in L^{m-1}(M,x_0)$必有下面两种情形中的其一成立。

(Ⅰ) $u^*f'(x_0)h_1(x)\geqslant\delta_1\|h_1(x)\|$

(Ⅱ) 存在某一$j\in\{1,2,\cdots,m-1\}$使得：

$h(x)\in C^j(\delta)\setminus C^{j+1}(\delta)$

即 $u^*f'(x_0)h_1(x)\leqslant\delta_1\|h_1(x)\|$

$F^{(i)}(x_0)(h_1(x))^i\leqslant\delta_i\|h_1(x)\|^i\quad i=2,3,\cdots,j$ （如果$j\geqslant2$）

且 $F^{(j+1)}(x_0)(h_1(x))^{j+1}\geqslant\delta_{j+1}\|h_1(x)\|^{j+1}$

现考虑满足(Ⅰ)的那些$x\in M$，将$u^*f(x)$在x_0处展开得

$$\begin{aligned}u^*(x)&=u^*f(x_0)+u^*f'(x_0)(x-x_0)+\gamma_1(x-x_0)\\&=u^*f(x_0)+u^*f'(x_0)h_1(x)+\gamma_1(x-x_0)+u^*f'(x_0)(x-x_0-h_1(x))\end{aligned}$$

因为$L^{m-1}(M,x_0)$是M在x_0处的$m-1$阶逼近，则$\|x-x_0-h_1(x)\|=0(\|x-x_0\|)$又$\gamma_1(x-x_0)\sim0(\|x-x_0\|)$总可选一正实数$\rho_1$（$\rho_1\in(0,1)$）使得当$x\in M$，$\|x-x_0\|\leqslant\rho_1$时，有

$$\gamma_1(x-x_0)+u^*(x)(x-x_0-h_1(x))\geqslant-\frac{\delta_1}{4}\|x-x_0\|$$

及 $\|h_1(x)\|\geqslant\|x-x_0\|-\|h_1(x)-(x-x_0)\|\geqslant\|x-x_0\|-\frac{1}{2}\|x-x_0\|=$

$\frac{1}{2}\|x-x_0\|$（使取得的ρ_1满足：$\|h_1(x)-(x-x_0)\|\leqslant\frac{1}{2}\|x-x_0\|\quad\forall x\in M,\|x-x_0\|\leqslant\rho_1$，即可）令$=\frac{\delta_1}{4}$则有

$$u^*f(x)-u^*f(x_0)\geqslant\delta_1\|h_1(x)\|-\frac{\delta_1}{4}\|x-x_0\|\geqslant\frac{\delta_1}{2}\|x-x_0\|$$

$$-\frac{\delta_1}{4}\|x-x_0\|=\rho_1\|x-x_0\|\quad\forall x\in M,\text{且}\|x-x_0\|\leqslant\rho_1\tag{6}$$

再考虑满足（Ⅱ）的那些$x\in M$，将拉格朗日函数$F(x)$在x_0处展开得

$$u^*f(x)-u^*f(x_0)\geqslant F(x)-F(x_0)=F'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}F''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{(j+1)!}F^{(j+1)}(x_0)(x-x_0)^{j+1}+\gamma_{j+1}(x-x_0)\tag{7}$$

$[\gamma_{j+1}(x-x_0)\sim 0(\|x-x_0\|^{j+1})]$

$$=\frac{1}{2}F''(x_0)\Big(\sum_{k=1}^{m-1}h_k(x)\Big)^2+\frac{1}{3!}F^{(3)}(x_0)\Big(\sum_{k=1}^{m-1}h_k(x)\Big)^3$$

$$+\cdots+\frac{1}{j!}F^{(j)}(x_0)\Big(\sum_{k=1}^{m-1}h_k(x)\Big)^j+\frac{1}{(j+1)!}F^{(j+1)}(x_0)(x-x_0)^{j+1}$$

$$+\overline{\gamma_{j+1}}(x-x_0)\geqslant\frac{1}{(j+1)!}F^{(j+1)}(x_0)(x-x_0)^{j+1}+\overline{\gamma_{j+1}}(x-x_0)$$

$$[\text{由}(3)]\tag{8}$$

这里 $\overline{\gamma_{j+1}}(x-x_0)=\gamma_{j+1}(x-x_0)+\sum_{i=2}^{j}\frac{1}{i!}C_i^q\sum_{q=1}^{i}F^{(i)}(x_0)\Big(x-x_0-\sum_{k=1}^{m-1}h_k(x)\Big)^q(\varDelta h)^{i-q}$

$\Big(\varDelta h=\sum_{k=1}^{m-1}h_k(x)\Big)$由于$L^{m-1}(M,x_0)$是$M$在$x_0$处的$m-1$阶逼近知，存在$e\in(0,1)$使得

$$\|x-x_0-\varDelta h(x)\|\leqslant\|x-x_0\|^{m-1}\leqslant\|x-x_0\|\quad\forall x\in M\text{且}\|x-x_0\|\leqslant e$$

则
$$\Big\|\sum_{k=1}^{m-1}h_k(x)\Big\|=\|\varDelta h(x)\|\leqslant\|x-x_0-\varDelta h(x)\|+\|x-x_0\|\leqslant 2\|x-x_0\|$$

$$\forall x\in M\text{且}\|x-x_0\|\leqslant e$$

又
$$F^{(i)}(x_0)(x-x_0-\varDelta h(x))^q(\varDelta h(x))^{i-q}\leqslant\|F^{(i)}(x_0)\|\cdot\|x-x_0-\varDelta h(x)\|^q\cdot\|\varDelta h(x)\|^{i-q}\leqslant 2^{i-q}\|F^{(i)}(x_0)\|\cdot\|x-x_0-\varDelta h(x)\|^q\cdot\|x-x_0\|^{i-q}$$

$$\|x-x_0-\varDelta h(x)\|=0(\|x-x_0\|^{m-1})$$

由上知，当 $q\geqslant 1$ 时。

$$F^{(i)}(x_0)(x-x_0-\varDelta h(x))^q(\varDelta h(x))^{i-q}=0(\|x-x_0\|^m)$$

从而

$$\sum_{i=2} C_i^q\frac{1}{i!}\sum_{q=1}^{i}F^{(i)}(x_0)(x-x_0-\varDelta h(x))^q\cdot(\varDelta h(x))^{i-q}=0(\|x-x_0\|^m)$$

当 $1\leqslant j\leqslant m-1$ 时，则有 $\overline{\gamma_{j+1}}(x-x_0)\sim 0(\|x-x_0\|^{j+1})$ （9）

现利用引理2.3，取 $B=F^{(j+1)}(x_0)$，$H=P_1[L^{m-1}(M,x_0)\cap C^j(\delta)\setminus C^{j+1}(\delta)]$（$P_1$是 X^{m-1} 上沿第一分量的投影映射）则存在 $\gamma>0$ 及 $\delta>0$ 使得

$$B(h_1(x)+z(x),\cdots,h_1(x)+z(x))\geqslant\delta\|h_1(x)+z(x)\|^{j+1}$$

$$\forall h_1(x)\in H,\ z(x)\in X,\ 且\ \|z(x)\|\leqslant\gamma\|h_1(x)\|$$

由引理2.4存在 $\overline{\rho}\in(0.1)$ 使得

$$\|x-x_0-h_1(x)\|\leqslant\gamma\|h_1(x)\|\qquad\forall x\in M,\ 且\ \|x-x_0\|\leqslant\overline{\rho}$$

这样有

$$B(x-x_0,x-x_0,\cdots,x-x_0)\geqslant\delta\|x-x_0\|^{j+1}\qquad\forall x\in M 且\ \|x-x_0\|\leqslant\overline{\rho},\ h_1(x)\in H$$

由于 $\overline{\gamma_{j+1}}(x-x_0)\sim 0(\|x-x_0\|^{j+1})$（由(9)），取 $\rho_{j+1}>0$ 且 $\rho_{j+1}<\overline{\rho}$ 使得 $\overline{\gamma_{j+1}}(x-x_0)\geqslant-\frac{\delta}{2(j+1)!}\|x-x_0\|^{j+1}\quad\forall x\in M\quad\|x-x_0\|\leqslant\rho_{j+1}$ 取 $\beta_{j+1}=\frac{\delta}{2(j+1)!}$ 则

$$u^*f(x)-u^*f(x_0)\geqslant\frac{1}{(j+1)!}\delta\|x-x_0\|^{j+1}-\frac{\delta}{2(j+1)!}\|x-x_0\|^{j+1}$$

$$=\beta_{j+1}\|x-x_0\|^{j+1}\qquad\forall x\in M 且\ \|x-x_0\|\leqslant\rho_{j+1},\ h(x)\in C^j(\delta)\setminus C^{j+1}(\delta)$$

$$j=1,2,\cdots,m-1$$

最后，取 $\rho=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\rho_j\}$ $\beta=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\beta_j\}$ 由于对任意 $x\in M$，必有(Ⅰ)或(Ⅱ)中之一成立，这样无论哪一情形，总有

$$u^*f(x)\geqslant u^*f(x_0)+\beta\|x-x_0\|^m\qquad 当 x\in M\qquad\|x-x_0\|\leqslant\rho$$

故定理3.1证毕*

推论3.2，设 x_0 是问题

$(\overline{P})$
$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}f(x)\\&g(x)\in -K\\&h(x)=0\end{aligned}$$

（这里 f：$X\to R$ 是通常的实值函数 $C_j=[0.+\infty)$）的容许点，且假设 $L^1(M,x_0)$ 是 M 在 x_0 点的一阶逼近（特别地为线性逼近[6]，如果存在乘子 $\lambda=(1,u^*,w^*)\in R^+\times K^+\times W^*$ 及正实

※ 当 $m=2$ 时，我们即得问题(P)的最一般的二阶最优性充分条件，从而可得A. Ben-Tal等[3]及F. Lempio and J. Zowe[6]中的描述无限维空间 X 上的优化问题的最优性二阶充分条件。

数$\beta>0$，$\gamma>0$使得

(i) $u^*g(x_0)=0$

(ii) $f'(x_0)+v^*g'(x_0)+w^*h'(x_0)=0$

(iii) $[f''(x_0)+v^*g''(x_0)+w^*h''(x_0)](d,d)\geqslant\gamma\|d\|^2$

$$\forall d\in L^1(M,x_0)\cap\{d\in X:\ f'(x_0)d\leqslant\beta\|d\|\}$$

则存在实数$\delta>0$，$\rho>0$使得。

$$f(x)\geqslant f(x_0)+\delta\|x-x_0\|^2\qquad 当x\in M，且\|x-x_0\|\leqslant\rho时，$$

由此说明x_0是$(\overline{P})$的局部严格最优解。

对于此推论3.2，当h消失（即$h\equiv0$时）可得[7]中主要的二阶最优性充分条件的描述定理5.6。

最后我衷心感谢系统所的陈光亚老师及重庆商学院的张泽泮老师，他们仔细审阅过我的毕业论文，并提出了宝贵的建议，本文就是其中的一部分。

参 考 文 献

[1] Barbu V, Convexity and Optimization in Banach spaces Netherlands Noordhoff, 1978

[2] Ben-israel A, Ben-Tal A, Zlobec S. Optimality in Nonlinear programming a feasible direction approaches. New York: Wiley, 1981

[3] Ben-Tal A, Zowe J. Mathematical programming study, 1982; 19: 39～76

[4] Guinard M. SIAM. J. Control, 1969; (7): 232～241

[5] Hestenes M. R. Optimization theory-the finite dimensional case New York: John Wiley, 1975

[6] Lempio F, Zowe J. Higher order optimality conditions in B. Korted ed Operations Research, North Holland. Amsterdam: 1981

[7] Maurer H, Zowe J. Mathematical programming, 1979; 16: 98～110

[8] Mccormick, SIAM. J Applied Mathematics, 1967; 15: 641～652