1989年5月 重庆大学学报 Vol.12. No.3
第12卷第3期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY May. 1989

解非线性方程组的单侧逼近方法

AN ONE-SIDED APPROXIMATING METHOD FOR SOLVING SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS

黄德才　　杨万年
Huang Decai　　Yang Wannian

（应用数学系）

摘　要　本文给出了解非线性方程组的一种单侧逼近方法，该方法不需要选择初始点，因而克服了选择初始点的困难。此外，我们还讨论了该方法的敛速并提出了一种选择较大的满秩非负广义左下逆的方法。

关键词　非线性方程组；区间迭代，单侧逼近法

ABSTRACT We prsent an one-sided method for solving system of nonlinear equation in this paper. It does not need to select initial points and therefor overcomes the difficulty for selecting initial points. Besides, we discuss the convergent rate of this method and give a method of how to select a nonnegative left lower inverse with "large" full rank.

KEY WORDS system of nonlinear equations, interval iteration, one-sided approximating method

一、引　言

本文考虑方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

的求解问题，其中$f_i(x_1,\cdots,x_n)$是定义在某个集合$D\subset R^n$上的n元函数，$i=1,\cdots,m$。此处$m\leqslant n$。为方便计，我们把上述方程组记为

$$Fx=0, \tag{1}$$

其中$F:D\subset R^n\to R^m$是R^n中某集D到R^m的一个映射。

文献[1]在$Fy-Fx\leqslant A(y-x)$和$Fx^0\leqslant 0\leqslant Fy^0$的条件下，提出了一种单调迭代解法，它

本文于1988年月3日7收到

是[2]中方法的一种推广。文献[3]提出了一种求初始点$x^0 \leqslant y^0$使$Fx^0 \leqslant 0 \leqslant Fy^0$的方法，然而，在通常情况下，要求出这样的初始点也不容易，本文对一类函数提出了一种迭代方法，并为了克服选择初始点的困难，使该方法不依赖于初始点的特殊选择，该方法可单侧逼近$Fx=0$在某个序区间上的极大解和极小解。所谓$Fx=0$在序区间：(x^0, y^0)上的极小解x^*和极大解y^*，意思是x^*和y^*都是$Fx=0$在(x^0,y^0)上的解。且其它任何解$u\in(x^0,y^0)$都满足$x^*\leqslant u \leqslant y^*$。

一个矩阵$A\in L(R^n,R^m)$，若存在$B\in L(R^m,R^n)$使得$BA\leqslant I$，则B叫做A的广义左下逆。同理可定义广义右下逆。有关向量X的模向量$|X|$的概念等，请参见[2]。

二、主要结果

定理1　设$F:D\subset R^n\to R^m$在区间$(\alpha,\beta)\subset D$上连续，且存在$A\in L(R^n,R^m)$使$\alpha\leqslant x\leqslant y\leqslant\beta$时

$$|Fy-Fx|\leqslant A|y-x|. \tag{2}$$

任选$x^0\in(\alpha, \beta)$，令P是A的任一个满秩广义非负的左下逆，则：

a)　若(1)式在(α, x^0)上有解，则序列

$$x^{n+1}=x^n-P|Fx^n| \qquad n=0,1,2,\cdots$$

必单调减少收敛到(1)在(α, x^0)上的极大解。

若(1)式在(α,x^0)上无解，则必存在$N>0$，使$n\geqslant N$时，有$x^n\notin(\alpha,x^0)$。

b)　若(1)式在(x^0, β)上有解，则序列

$$x^{n+1}=x^n+P|Fx^n| \qquad n=0,1,2,\cdots$$

必单调增加收敛于(1)在(x^0, β)上的极小解。

若(1)式在(x^0, β)上无解，则必存在$N>0$，使当$n\geqslant N$时，有$x^n\notin(x^0, \beta)$。

证：a)　设x^*为(1)在(α, x^0)中的极大解。

则$x^0\geqslant x^*$，由$P\geqslant 0$可得：

$$x^1=X^0-P|Fx^0|\leqslant x^0,$$
$$x^0-x^1=P|Fx^0|-P|Fx^*|\leqslant P|Fx^0-Fx^*|$$
$$\leqslant PA|X^0-x^*|\leqslant x^0-x^*,$$

$\therefore\quad x^1\geqslant x^*.$

因此：$x^0\geqslant x^1\geqslant x^*$

设　　$x^0\geqslant x^{k-1}\geqslant x^k\geqslant x^*, \qquad k\geqslant 1$

则　　$x^k-x^{k+1}=P|Fx^k|-P|Fx^*|$

$$\leqslant P|Fx^k-Fx^*|$$
$$\leqslant PA|x^k-x^*|\leqslant(x^k-x^*).$$

$\therefore$　　$x^{k+1}\geqslant x^*$　　而$x^k\geqslant x^{k+1}$为显然。

由归纳法知：$x^0\geqslant x^{k-1}\geqslant x^k\geqslant x^*, \qquad \forall k\geqslant 1$

因此，$\{x^n\}$单调减少且有界，所以存在$\bar{x}\in(\alpha, x^0)$使$x^n\searrow\bar{x}\geqslant x^*$、又由$x^n$的定义可知：

$$\lim_{n\to\infty}P|Fx^n|=0,$$

∵ F在(α, β)上连续，且P为满秩的

∴ $F\bar{x}=0$ 且$\bar{x}\geqslant x^*$，

由假定，x^*为(1)在(α, x^0)上的极大解。

∴ $\bar{x}=x^*$.

若在迭代中有$N>0$使$Fx^N=0$，则由x^n的定义和x^*为极大解的假定

必有$x^N=x^{N+K}=x^*$， $K=1, 2, \cdots$

若$Fx=0$在(α, x^0)上无解，则必存在$N>0$使

$$n\geqslant N, \ x^n\notin(\alpha, x^0)。$$

如若不然，则由$x^0\geqslant x^1\geqslant\cdots\geqslant x^{K-1}\geqslant x^K\geqslant\cdots\geqslant\alpha$

可得：$\lim\limits_{K\to\infty}x^K=\bar{x}\geqslant\alpha$且$F\bar{x}=0$，这和$Fx=0$在$(\alpha, x^0)$上无解矛盾。

$b)$的证明同$a)$完全类似，这里不赘述。

注1.在定理1中，若取β作x^0，且(1)在(α, β)内有解，则$x^{n+1}=x^n-P|Fx^n|$单调减少收敛于$F x=0$在(α, β)上的极大解。若取$x^0=\alpha$且(1)在(α, β)上有解，则$x^{n+1}=x^n+P|Fx^n|$单调增加收敛于(1)在(α, β)上的极小解。

注2.定理1中的A，还可用$A(x, y)$代替，只要选非负满秩P，使$PA(x, y)\leqslant I$，当$x\leqslant y$，x，$y\in(\alpha, \beta)$时。这时定理1仍然成立。

从注1我们可知，当F满足定理1中的条件且在(α, β)中有解时，则我们可求出极大解和极小解。但是，我们还不能得出唯一性结论。

定理2 设(1)在(α, β)上有解，且满足定理1之条件。若还有：

$$|Fy-Fx|\geqslant B|y-x| \qquad 当\alpha\leqslant x\leqslant y\leqslant\beta时，$$

且存在$Q\in L(R^m, R^n)$，$Q\geqslant 0$使$QB\geqslant I$

则 (1)在(α, β)上有唯一解。

证：由定理1和以上的注1可知，(1)在(α, β)上必有极小解和极大解x^*和y^*。

∴ $0=|Fy^*-Fx^*|\geqslant B|y^*-x^*|$，

两端乘上$Q\geqslant 0$可得

$$0=Q|Fy^*-Fx^*|\geqslant QB|y^*-x^*|\geqslant|y^*-x^*|，$$

∴ $x^*=y^*$ ∴解是唯一的

注3.前面介绍的定理，对$m=n$的情形，同样成立。

三、收敛速度比较

我们都知道，一个矩阵的上(下)逆通常不是唯一的，对于前面定理中的矩阵A来说，其满秩的非负广义左下逆，一般也不唯一。对于不同的满秩非负广义左下逆产生的序列之间的相互关系如何呢？为了比较收敛于同一极限点的两种迭代过程的关系，我们引入

定义 1　设ϕ_1和ϕ_2是两个具有同一极限点x^*的迭代过程，若存在$p\in[1,\infty)$使

$$R_p(\phi_1,x^*)\leqslant R_p(\phi_2,x^*),\tag{3}$$

则称在x^*处，ϕ_1是R—不慢于ϕ_2的。若(3)有严格不等式成立，则说在x^*处，ϕ_1是R—快于ϕ_2的。

其中的$R_p(\phi,x^*)$是迭代过程ϕ在x^*的R—因子，其中$p\in[1,+\infty)$，其定义请见[2]，并且[2]中还证明了：对任何$p\in[1,+\infty)$，$R_p\{\phi,x^*\}$和R^n中的范数无关。因此有：

定理 3　设F满足定理1之条件，且P和$\overline{P}$都是A的满秩非负广义左下逆且$P\leqslant\overline{P}$，则

1)　若(1)在(α,x^0)上有解，

两个迭代过程：

ϕ_1:　$\overline{x}^{n+1}=\overline{x}^n-\overline{P}\,|F\overline{x}^n|$，　$\overline{x}^0=x^0$

ϕ_2:　$x^{n+1}=x^n-P\,|Fx^n|$　　$n=0,1,2,\cdots$

在极大解x^*处，ϕ_1是R—不慢于ϕ_2的。

2)　若(1)在(x^0,β)上有解。

两个迭代过程：

ψ_1:　$\overline{x}^{n+1}=\overline{x}^n+\overline{P}\,|F\overline{x}^n|$，　$\overline{x}_0=x^0$，

ψ_2:　$x^{n+1}=x^n+P\,|Fx^n|$，　$n=0,1,2,\cdots$

在极小解x^*处，ψ_1是R—不慢于ψ_2的。

证：1)由定理1知，ϕ_1和ϕ_2产生的迭代序列都单调减少收敛于(1)在(α,x^0)中的极大解x^*，

$\because$　$x^0=\overline{x}^0$　　$x^1-\overline{x}^1=(\overline{P}-P)\,|Fx^0|>0$，

$\therefore$　$x^1\geqslant\overline{x}^1$。

设　$x^n\geqslant\overline{x}^n$，　$n\geqslant1$，

则
$$\begin{aligned}\overline{x}^{n+1}-x^{n+1}&=(\overline{x}^n-x^n)+P\,|Fx^n|-\overline{P}\,|F\overline{x}^n|\\&\leqslant(\overline{x}-x^n)+\overline{P}\,|Fx^n-F\overline{x}^n|\\&\leqslant(\overline{x}-x^n)+\overline{P}A\,|x^n-\overline{x}^n|\\&\leqslant(\overline{P}A-I)\,|x^n-\overline{x}^n|\leqslant0,\end{aligned}$$

$\therefore$　$x^{n+1}\geqslant\overline{x}^{n+1}$。

由归纳法知，对$n=0,1,2,\cdots$上式均成立，

$\therefore$　$x^n-x^*\geqslant\overline{x}^n-x^*\geqslant0$

由于R—因子同R^n中范数无关，我们可取范数$\|\cdot\|_2$，得到：

$$\|\overline{x}^n-x^*\|_2^{1/p^n}\leqslant\|x^n-x^*\|_2^{1/p^n},\qquad 1<p<+\infty;$$

$$\|\overline{x}^n-x^*\|_2^{1/n}\leqslant\|x^n-x^*\|_2^{1/n},\quad p=1.$$

即　$R_p(\phi_1-x^*)\leqslant R_p(\phi_2,x^*)$。

$\therefore$　在x^*处，ϕ_1是R—不慢于ϕ_2的。

2)　的证明和1)完全类似。

从上面的定理可知，为了提高收敛速度，我们需要选择“较大”的满秩非负广义左下

逆，下面的定理提供了一种选择方法：

定理4 设$A\in L(R^n,R^m)$，$P^0\in L(R^m,R^n)$是A的一个广义非负左下逆，则

1) $$P^{K+1}=(2I-P^KA)P^K,\ K=0,1,2,\cdots \tag{4}$$

都是A的广义非负左下逆，且$P^K\leqslant P^{K+1}$。

2) 若P^0还是满秩的，且使$(I-P^0A)$的特征根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$有$\lambda_i^m\neq-1$，其中$i=1,2,\cdots,n$；$m=1,2,\cdots$

则1)中定义的$P^K,K=0,1,2,\cdots$都是满秩的。

证1) ∵ P_0是A的广义非负左下逆，

∴ $I-P^0A\geqslant 0$,

$P^1=(2I-P^0A)P^0=P^0+(I-P^0A)P^0\geqslant 0$,

$P^1A-I=P^0A-I+(I-P^0A)P^0A$

$=(P^0A-I)(I-P^0A)\leqslant 0$。

∴ $P^1A\leqslant I$ 即P^1是A之广义非负左下逆。

$P^1-P^0=(I-P^0A)P^0\geqslant 0$,

∴ $P^0\leqslant P^1$。

设 $P^K\geqslant 0$, $P^KA\leqslant I$, $P^{K-1}\leqslant P^K$, $K\geqslant 1$,

则 $P^{K+1}=P^K+(I-P^KA)P^K\geqslant 0$,

$P^{K+1}A-I=(P^KA-I)(I-P^KA)\leqslant 0$

∴ $P^{K+1}A\leqslant I$,

$P^{K+1}-P^K=(I-P^KA)P^K\geqslant 0$。

由归纳法知，对$K=0,1,2,\cdots$，P^K都是A的广义非负左下逆，且$P^K\leqslant P^{K+1}$。

2) $I-P^{K+1}A=I-2P^KA+P^KAP^KA$

$=(I-P^KA)^2$

$=(I-P^0A)^{2^{K+1}}$,

∴ $2I-P^KA=I+(I-P^0A)^{2^K}$,

∵ $(I-P^0A)$的特征根满足$\lambda_i^m\neq-1$，$m=1,2,\cdots$

因此，$(I-P^0A)^{2^K}$的特征根不是-1。

∴ $2I-P^KA=I+(I-P^0A)^{2^K}$非奇异。

∴ 由P^0的满秩和P^K之定义可知

$P^K,K=0,1,2,\cdots$均为满秩的。

从这个定理我们可以知道，要想选择"较大"的满秩的非负广义左下逆，只须选一个P^0使满足定理4的条件，则由(4)得的P^K都是A的满秩非负广义左下逆。

四、数值例子

下面，我们将给出一个简单例子，说明定理1的作用，并从实际计算结果验证速度比较定理。

例：设 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T\in R^3$，$F:R^3\to R^2$

$$Fx=\begin{pmatrix}2x_1+x_1\cos x_2-1\\ x_3+x_3\cos x_1-2\end{pmatrix}.$$

取 $\alpha=(0,\ 0,\ 0)^T$　$\beta=(\pi/2,\ \pi/2,\ \pi/2)^T$，则有序区间为$(\alpha,\ \beta)$。求$Fx=0$在$(\alpha,\ \beta)$上的极大解。

解：令　$x=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$，$y=(y_1,\ y_2,\ y_3)^T$，

且　$\alpha\leqslant x\leqslant y\leqslant\beta$，　易证：

$$|Fy-Fx|\leqslant A\,|y-x|\text{，其中 }A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

取
$$P=\begin{pmatrix}1/4&0\\0&0\\0&1/2\end{pmatrix},\qquad \overline{P}=\begin{pmatrix}1/3&0\\0&0\\0&1/2\end{pmatrix},$$

则有　$P\leqslant\overline{P}$，

且　$PA\leqslant I$，　$\overline{P}A\leqslant I$.

易证F满足定理1的其它条件。

取　$\overline{x^0}=x^0=(\pi/2,\ \pi/2,\ \pi/2)^T$，

则：两个迭代序列

1）$x^{K+1}=Px^K-|Fx^K|$，

2）$\overline{x}^{K+1}=\overline{x}^K-\overline{P}\,|F\overline{x}^K|$.　　$K=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

当(1)在$(\alpha,\ \beta)$上有解时，都收敛于它的极大解。

易知$Fx=0$在$(\alpha,\ \beta)$上的极大解：

$$y^*\doteq(0.5,\ \pi/2,\ 1.065199497)^T.$$

1)和2)的迭代结果如下表：

1)对应于P

	x_1^K	x_2^K	x_3^K
$K=1$	1.035398	$\pi/2$	1.3561943
$K=4$	0.50692475	$\pi/2$	1.1152683
$K=7$	0.50836559	$\pi/2$	1.0702116
$K=10$	0.5010437	$\pi/2$	1.0658102
$K=17$	0.50000317	$\pi/2$	1.0652043
$K=18$	0.50000408	$\pi/2$	1.0652019

2)对应于$\overline{P}$

	x_1^K	x_2^K	x_3^K
$K=1$	0.85693201	$\pi/2$	1.3561943
$K=4$	0.5132197	$\pi/2$	1.0791928
$K=8$	0.50016321	$\pi/2$	1.0653529
$K=11$	0.50000604	$\pi/2$	1.0652052
$K=12$	0.50000201	$\pi/2$	1.0652014

从以上两表看出，对应于“较大”的$\overline{P}$产生的序列的确有$\overline{x}^K \leqslant x^K$。对于本例，实际上有$\overline{x}^K < x^K$。从而验证了定理3的正确性，也说明定理4的重要性。

参 考 文 献

[1] 莫孜中，解非线性方程组的单调迭代解法，云南大学学报(自然版)，1979，(2)：13-17

[2] Ortega J. M, and Rheinboldt, W. C., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, 1970

[3] 廖鸿志，关于解非线性方程组单调迭代法的若干注记，云南大学学报(自然科学版)，1982，(1)

[4] 刘玉坤，单侧逼近迭代法及其在求解多项式方程根中的应用。数值计算与计算机应用，1986，(1)：14-20

[5] 丁方允，一类非线性算子方程解的界方法，兰州大学学报(自然科学版)，1987，(2)，6-11