

具有递增斜率的分段线性规划的解法

AN ALGORITHM OF PIECEWISE LINEAR PROGRAMMING

WITH SUCCESSIVELY INCREASING SLOPES

李志平

李文沅

徐国禹

Li Zhiping

Li Wenyuan

Xu Guoyu

(电气工程系)

摘要 本文提出了一种工程实际中广泛存在的目标函数具有递增斜率的分段线性规划问题,分析了这种问题的特点,给出了一种快速的求解方法,并用算例证明了它的有效性。

关键词 /分段;线性规划;递增斜率;单纯形

中国图书资料分类法分类号 O221.1, TB114.1

ABSTRACT This paper states the piecewise linear programming whose objective function has the successively increasing slopes, which exists widely in engineering problem, analyses its characteristic and presents a rapid algorithm. The numerical example is given to demonstrate the effectiveness of the algorithm.

KEY WORDS piecewise, linear programming, successively increasing slopes, simplex

一、引言

在研究电力系统经济调度及其它工程问题时,常遇到这样的求极小值的规划问题:目标函数是一组具有凸性的单变量非线性函数之和,约束是线性约束。对这类问题可用非线性规划方法求解(如简化梯度法),但非线性规划算法计算量大,特别是大规模系统可能由于计算量过大而没法实施计算,有时收敛也不可靠。因此人们便寻求这类问题的线性规划解法,方式之一是将这类问题的目标函数分段线性化,得到分段线性规划问题。但是一般分段线性规划算法非常冗繁,其计算量未必比非线性规划算法少[1]。然而,这类问题的目标函数具有特殊性,转化成的分段线性规划是目标函数具有递增斜率的分段线性规划,并不需要用通常的分段线性规划法去求解。如果将每一段用一个分段变量来表示,这样便可构成一个普遍的线性规划问题。但是这样做的结果使变量数增加了,当分段很多时(为了更好地逼近原非线性目标函数),计算量仍然很大。本文提出一种求解这类特殊分段线性规划的新

本文于1988年10月26日收到

国家教委基金课题

方法, 不需要增加变量个数, 因而计算量有所减少。

二、分段线性规划转化为线性规划问题

分段线性规划问题可描述如下:

$$P_1 \begin{cases} \min f = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) & (1) \\ \text{s.t. } AX = b & (2) \\ 0 \leq X \leq \bar{X} & (3) \end{cases}$$

其中 A 是 $m \times n$ 矩阵, X, \bar{X} 是 n 维列向量, b 是 m 维列向量, $f_i(x_i)$ 是 x_i 的分段线性函数。

将 x_i 分段, 分点为:

$x_i^{(1)} = 0, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(T_i)}, x_i^{(T_i+1)}$ 下标为分点序号, T_i 分段数, $T_i + 1$ 为分点数。

当 $x_i^{(k)} \leq x_i \leq x_i^{(k+1)}$ 时, 称为第 k 段, 该目标函数的斜率为 $C_i^{(k)}$, 设 $f_i(x_i^{(1)}) = f_i(0) = f_{i,0}$, 则分段线性函数可表示为:

$$f_i(x_i) = \begin{cases} f_i(x_i^{(k)}) + C_i^{(k)}(x_i - x_i^{(k)}) \\ x_i^{(k)} \leq x_i \leq x_i^{(k+1)}, (k=1, \dots, T_i) \\ f_i(x_i^{(1)}) = f_{i,0} \end{cases}$$

我们讨论一种特殊情况下, 即满足 $C_i^{(k)} < C_i^{(k+1)}$ 时的分段线性规划问题, 称为斜率递增的分段线性规划问题。在工程实际中由于目标函数常具有凸性, 分段线性化后能满足上述条件, 所以斜率递增的分段线性规划问题具有一定的普遍性。这类特殊的分段线性规划问题原则上可按下述办法求解:

对每个变量引入分段变量 $x_{i,k}$ ($k=1, 2, \dots, T_i$), $0 \leq x_{i,k} \leq x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}$, 且

$$x_i = \sum_{k=1}^{T_i} x_{i,k} \quad (4)$$

形成一个关于分段变量的线性规划问题:

$$P_2 \begin{cases} \min f = f_0 + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{T_i} C_i^{(k)} x_{i,k} \right) & (5) \\ \text{s.t. } A'X' = b & (6) \\ 0 \leq X' \leq \bar{X}' & (7) \end{cases}$$

其中 A' 是 $m \times \left(\sum_{i=1}^n T_i \right)$ 矩阵； X 是 $\sum_{i=1}^n T_i$ 维的由分段变量组成的列向量； \bar{X}' 是 X' 的上限列向量。

这个问题可用变量带上、下限约束的线性规划求解。因为 $C_i^{(S)} < C_i^{(S+1)}$ ，所以迭代中及达到最优解时，必定是在 $x_{i,k}$ 取上限值后， $x_{i,k-1}$ 才可能取大于下限的值。

三、分段线性规划的新算法

将分段线性规划转化为关于分段变量的线性规划的算法使变量个数从 n 个增加到 $\sum_{i=1}^n T_i$ 个。

下面给出一种不需要增加变量个数的新算法：

(一) 求得原问题 P_1 的初始可行解

(二) 单纯形变换

设基变量下标集合为 I ，非基变量的下标集合为 J 。对于每一个基变量 $x_i (i \in I)$ 对应一正整数 S_i ，表示变量 x_i 处于第 S_i 段内，即 $x_i^{(S_i-1)} \leq x_i \leq x_i^{(S_i)}$ 。对于每一非基变量 $x_j (j \in J)$ 对应一正整数 S_j ，表示非基变量 x_j 处于第 S_j 个分点上，即 $x_j = x_j^{(S_j)}$ ，在初始解时 $S_i = 1$ 或 $T_i + 1$ 。

进行单纯形变换将约束方程化为如下形式：

$$x_i - \sum_{j \in J} a_{ij}^* x_j = b_i^* \quad (i \in I) \tag{8}$$

带 * 者表示当前迭代的值，以下同。

(三) 最优性判断

对所有非基变量 $x_j (j \in J)$ 求下列相应的值：

$$z_j = \sum_{i \in I} a_{ij}^* C_i^{(S_i)}$$

$$\text{令 } W_j^{(1)} = z_j - C_j^{(S_j-1)}, H_j^{(S_j-1)}, H_j^{(1)} = z_j - C_j^{(S_j)}$$

若 $S_j = 1$ ，置 $W_j^{(1)} > 0$ ，若 $S_j = T_j + 1$ ，置 $W_j^{(1)} < 0$ 。

如果对所有 $j \in J$ 有 $W_j^{(1)} \geq 0$ 及 $H_j^{(1)} \leq 0$ ，则得最优解，否则转入第四步。

(四) 选择入基的非基变量

$$\text{令 } W^{(1)} = \min \{ W_j^{(1)} \mid W_j^{(1)} \leq 0, j \in J \}$$

$$W_{(2)} = \max \{ W_j^{(2)} \mid W_j^{(2)} \geq 0, j \in J \}$$

再令 $W = \max\{W^{(1)}, W^{(2)}\}$

假定 W 对应的非基变量为 x_l , 则 x_l 为换入基变量。当 W 对应于 $|W^{(1)}|$ 时转入第五步, 当 W 对应于 $W^{(2)}$ 时转入第六步。

(五) 第一种情况下 (W 对应于 $|W^{(1)}|$) 选择出基变量

$$\text{令 } U_1 = \min \left\{ \frac{x_i^{(S_{i-1})} - x_i^*}{a_{il}^*} \mid a_{il}^* > 0, j \in I \right\}$$

$$L_1 = \min \left\{ \frac{x_i^* - x_i^{(S_i)}}{-a_{il}^*} \mid a_{il}^* < 0, j \in I \right\}$$

再令 $d = \min\{L_1, U_1, (x_i^{(S_i)} - x_i^{(S_{i-1})})\}$

——如果 d 等于 L_1 或 U_1 , 需换基。设 L_1 或 U_1 对应的基变量为 x_k , 则 x_k 为出基变量。各变量作如下修改:

$$x_l = x_l^* - d = x_l^{(S_1)} - d$$

$$x_i = x_i^* + a_{il}^* \cdot d, (i \in I)$$

入基变量 x_l 从第 S_i 分点下降到第 $S_i - 1$ 分段内。若 $d = L_1$, 则出基变量 x_k 从第 S_k 段内下降到第 S_k 个分点上, 若 $d = U_1$, 则出基变量 x_k 从第 S_k 段内上升到第 $S_k + 1$ 个分点上。

I 集合中 k 用 l 代替, J 集合中 l 用 k 代替, 在新基下转入第二步。

如果 $d = x_i^{(S_1)} - x_i^{(S_{i-1})}$, 则不换基, 各变量作如下修改:

$$x_l = x_l^* - d = x_l^{(S_{i-1})}$$

$$x_i = x_i^* + a_{il}^* \cdot d, (i \in I)$$

转入第三步。

(六) 第二种情况下 (W 对应 $W^{(2)}$) 选择出基变量

$$\text{令 } L_2 = \min \left\{ \frac{x_i^* - x_i^{(S_i)}}{a_{il}^*} \mid a_{il}^* > 0, i \in I \right\}$$

$$U_2 = \min \left\{ \frac{x_i^{(S_{i+1})} - x_i^*}{-a_{il}^*} \mid a_{il}^* < 0, i \in I \right\}$$

再令 $d = \min\{L_2, U_2, (x_i^{(S_{i+1})} - x_i^{(S_i)})\}$

——如果 $d = L_2$ 或 U_2 , 需换基。设 L_2 或 U_2 对应的基变量是 x_k , 则 x_k 为出基变量。各变量作如下修改:

$$x_l = x_l^* + d = x_l^{(S_l)} + d$$

$$x_i = x_i^* - a_{ij}^* \cdot d, (i \in I)$$

入基变量 x_l 从第 S_l 分点上升到第 S_l 段内。若 $d = L_2$, 则出基变量 x_k 从第 S_k 段内下降到第 S_k 分点上, 若 $d = U_2$, 则出基变量 x_k 从第 S_k 段内上升到第 $S_k + 1$ 个分点上。

I 集合中 k 用 l 代替, J 集合中 l 用 k 代替, 在新基下转入第二步。

——如果 $d = x_l^{(S_{l+1})} - x_l^{(S_l)}$, 则不需换基, 各变量作如下修改:

$$x_l = x_l^{(S_{l+1})}$$

$$x_i = x_i^* - a_{ij}^* \cdot d, (i \in I)$$

转入第三步。

四、算法证明

为了证明上述算法的正确性, 要利用到分段变量。

将(4)式代入(8)式得

$$\sum_{k=1}^{T_i} x_{i,k} + \sum_{j \in J} a_{ij}^* \left(\sum_{k=1}^{T_i} x_{i,k} \right) = b_i^*, (i \in I)$$

改写成

$$x_{i,S_i} = b_i^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq S_i}}^{T_i} x_{i,k} - \sum_{j \in J} a_{ij}^* \left(\sum_{k=1}^{T_j} x_{j,k} \right) (i \in I)$$

代入(5)式右端得

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i \in I} C_i^{(S_i)} x_{i,S_i} + \sum_{i \in I} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq S_i}}^{T_i} C_i^{(k)} x_{i,k} \right) + \sum_{j \in J} \left(\sum_{k=1}^{T_j} C_j^{(k)} x_{j,k} \right) + f_0 \\ &= \sum_{i \in I} C_i^{(S_i)} \left(b_i^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq S_i}}^{T_i} x_{i,k} - \sum_{j \in J} a_{ij}^* \left(\sum_{k=1}^{T_j} x_{j,k} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{i \in I} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq S_i}}^{T_i} C_i^{(k)} x_{i,k} \right) + \sum_{j \in J} \left(\sum_{k=1}^{T_j} C_j^{(k)} x_{j,k} \right) + f_0 \end{aligned}$$

$$= f_0 + f_0^1 - \sum_{i \in I} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq S_i}}^{T_i} (C_i^{(S_i)} - C_i^{(k)}) x_{i,k} \right) \\ - \sum_{j \in J} \left[\sum_{k=1}^{T_j} \left(\sum_{i \in I} a_{ij}^* C_i^{(S_i)} - C_j^{(k)} \right) x_{j,k} \right]$$

简写为

$$f = f_0 + f_0^1 - \sum_{i \in I} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq S_i}}^{T_i} (C_i^{(S_i)} - C_i^{(k)}) x_{i,k} \right) \\ - \sum_{j \in J} \left(\sum_{k=1}^{T_j} (z_j - C_j^{(k)}) x_{j,k} \right) \quad (9)$$

其中 $f_0^1 = \sum_{i \in I} C_i^{(S_i)} b_i^*$, $z_j = \sum_{i \in I} a_{ij}^* C_i^{(S_i)}$

假定对问题 P_1 的现行迭代点, 基变量 x_i^* ($i \in I$) 处于第 S_i 段内, 非基变量 x_j^* ($j \in J$) 处于第 S_j 分点上。

由于满足 $C_j^{(k)} < C_j^{(k+1)}$ ($k = 1, \dots, T_j$), 故相应的问题 P_2 的分段变量具有以下特点: 对于基变量 x_i ($i \in I$), $k < S_i$ 时, $x_{i,k}$ 取上限值 $\bar{x}_{i,k}$; $k > S_i$ 时, $x_{i,k}$ 取下限值 0; $k = S_i$ 时, $0 \leq x_{i,S_i} = x_i^* - \sum_{k=1}^{S_i-1} x_{i,k} \leq \bar{x}_{i,S_i}$ 。对于非基变量 x_j ($j \in J$), $k \leq S_j - 1$ 时, $x_{j,k}$ 取上限值, $k \geq S_j$ 时, $x_{j,k}$ 取下限值。在这样的对应关系下, 问题 P_1 和 P_2 目标函数值相同, 且约束条件同时满足。

设 R_1 是所有取上限值的分段变量的集合, R_2 为所有取下限的分段变量的集合。

考查 (9) 式, 若对所有 $x_{r,k} \in R_1$, 其相应的 (9) 式中的系数大于等于零, 对所有 $x_{r,k} \in R_2$, 其相应 (9) 的式中的系数小于等于零, 则在满足 P_2 的约束条件下, $x_{r,k}$ ($r = 1, \dots, n, k = 1, \dots, T_r$) 的任何改变都不会使目标函数减少, 即这时问题 P_2 取得最优解, 按照对应关系可得到问题 P_1 的最优解。

下面我们说明上述最优性条件与新解法中步骤三给出的最优性判据等价。

在 $C_j^{(k)} < C_j^{(k+1)}$ ($r = 1, \dots, n, k = 1, \dots, T_r$) 的条件下, 对于非基变量 x_j ($j \in J$), 当 $k \leq S_j - 1$ 时, $x_{j,k} \in R_1$ 而此时又必有: $z_j - C_j^{(k)} > z_j - C_j^{(S_j-1)} = W_j^{(1)}$, 当 $k \geq S_j$ 时, $x_{j,k} \in R_2$, 而此时又必有: $z_j - C_j^{(k)} < z_j - C_j^{(S_j)} = W_j^{(2)}$ 。同样对于基变量 x_i ($i \in I$), 当

$k \leq S_1 - 1$ 时, $x_{r,k} \in R_1$, 而此时有 $C_i^{(S_1)} - C_i^{(k)} > 0$; 当 $k \geq S_1 + 1$ 时, $x_{r,k} \in R_2$, 而此时有 $C_i^{(S_1)} - C_i^{(k)} < 0$ 。

因此, 若对所有非基变量 $x_j (j \in J)$ 都有 $W_j^{(1)} \geq 0$ 及 $W_j^{(2)} \leq 0$, 则对所有 $x_{r,k} \in R_1$, 相应的(9)式中的系数大于等于零, 对所有 $x_{r,k} \in R_2$, 相应的(9)式中的系数小于等于零。即最优性条件满足。

五、算 例

为了证明本文所提出的算法的有效性, 分别用本文的算法和用分段变量形成线性规划的算法, 对一个电力系统有功经济调度中得到的分段线性规划问题进行了计算。

原问题如下:

$$\min f = \sum_{i=1}^6 f_i(x_i)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & 0.9253x_1 + 0.9687x_2 + 1.0353x_3 + 1.0170x_4 + 1.0148x_5 + 1.000x_6 = 2.792 \\ & 0.6351x_1 - 0.2070x_2 - 0.1200x_3 - 0.0329x_4 - 0.0237x_5 \leq 0.763 \\ & 0.50 \leq x_1 \leq 2.00 \\ & 0.20 \leq x_2 \leq 0.80 \\ & 0.15 \leq x_3 \leq 0.50 \\ & 0.10 \leq x_4 \leq 0.35 \\ & 0.10 \leq x_5 \leq 0.30 \\ & 0.10 \leq x_6 \leq 0.40 \end{aligned}$$

其中 $f_1(x_1) = 200x_1 + 37.5x_1^2$

$$f_2(x_2) = 175x_2 + 175x_2^2$$

$$f_3(x_3) = 100x_3 + 625x_3^2$$

$$f_4(x_4) = 325x_4 + 83.4x_4^2$$

$$f_5(x_5) = 300x_5 + 250x_5^2$$

$$f_6(x_6) = 300x_6 + 250x_6^2$$

将 f_1 分为 6 段, f_2 和 f_3 分为 10 段, f_4, f_5, f_6 分为 5 段, 形成分段线性规划问题。所得结果如下:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.4972, \quad x_2 = 0.5600, \quad x_3 = 0.2200, \quad x_4 = 0.3500, \quad x_5 = 0.15836, \quad x_6 = 0.1200 \\ f &= 805.98 \end{aligned}$$

上述结果与文献[2]中的非线性规划法求得的结果相同(目标函数值只相差四分之一)。

在IBM-PC/XT-286微机上,用本文所述方法的计算时间为0.12秒,用分段变量形成的线性规划算法的计算时间为0.178秒,节省时间约30%。

六、结 论

在工程实际中常常遇到目标函数是一组具有凸性的单变量非线性函数之和而约束是线性的规划问题,这类问题可以很容易转化为斜率具有递增特性的分段线性规划问题。本文分析了这类问题的特点,并提出了一个行之有效的快速算法。这种算法比用分段变量形成的线性规划算法要快。只要合理地进行分段,能够达到用非线性规划求解原问题的同样精确度。

参 考 文 献

- [1] 赵风治,分段线性规划的解法,数值计算与计算机应用,1981,(2):65-67
- [2] 王鲁,徐国禹,应用二次规划法解算安全性有功经济调度,重庆大学学报,1987,10(3):1-10
- [3] D.G鲁恩伯杰著,夏尊铨等译:线性规划引论,北京,科学出版社,1980

用无功负荷削减量进行自动故障选择和排序

AUTOMATIC CONTINGENCY SELECTION AND
RANKING BY CURTAILMENT OF REACTIVE LOADS

朱 继 忠

徐 国 禹

Zhu Jizhong

Xu Guoyu

(电气工程系)

摘 要 本文用网络规划法对预想事故进行自动选择和排序。提出了无功最小费用流的数学模型,其中以总电压损耗最小为目标。应用这个模型可快速地计算出各事故状态下网络中的无功最优分配,从而可得到系统在各事故情况下所产生的无功负荷削减量,亦即所需的无功补偿量,并以此为性能指标评定事故的严重程度,进行事故的自动选择和排序。解算方法采用不良状态校正法(OKA)。通过对IEEE 5节点、14节点、30节点、57节点和118节点系统进行实例计算,获得了满意的结果。

关键词 网络流; 自动故障选择; /安全分析
中国图书资料分类法分类号 TM732

ABSTRACT This paper presents a new approach to study the automatic contingency selection and ranking using the network flow programming. The minimum cost of the reactive power flow model is proposed, in which the total amount of voltage drops is taken as the objective function. With this model, the optimal VAR distribution and the amount of the reactive load curtailment (i.e. VAR compensation) can be computed quickly for each contingency state. The latter is adapted as the performance index to filtering and ranking the contingencies. The network flow programming is solved by "out of kilter" algorithm. The model and its algorithm are tested on IEEE 5-bus, 14-bus, 30-bus, 57-bus and 118-bus systems, and the encouraging results are obtained.

KEY WORDS network flow, automatic contingency selection, /security analysis

本文于1988年12月10日收到
国家教委基金课题

一、引 言

在电力系统实时安全分析中,要求快速地对事故进行自动选择和排序。静态预想事故分析的传统处理方法,是通过连续地用A.C.潮流计算所有可能的预想事故进行分析,由于计算工作量太大而难于满足实时要求〔1〕。为减少采用精确潮流计算的次数,需要对预想事故进行选择和排序,目前的方法多数是基于潮流采用有功型指标进行评定事故的严重程度〔2~4〕。文献〔5,6〕从电力系统中有功型和无功型参量间存在弱耦合的关系出发,定义了有功型和无功型两种性能指标,分别表征线路有功越限和电压越限的严重程度,计算量仍相当大。

作者在文献〔7〕中用网络规划法研究了事故自动选择。文中采用计及经济和安全性的综合费用优化模型,以计算系统在各事故状态下的有功负荷削减量,其性能指标为有功型。本文是文献〔7〕的继续、补充和发展,提出了以总电压损耗最小为目标的数学模型,快速地计算出各事故状态下网络中的无功最优分配,从而得到系统在各事故情况下所产生的无功削减量,亦即所需的无功补偿量,并以此作为评定事故严重程度的性能指标,进行事故的自动选择和排序。模型的求解方法采用的是不良状态校正法。文中还给出了对几个IEEE试验系统进行自动故障选择和排序的计算结果。

二、OKA用于事故的选择和排序

在实时安全分析中,需要寻求一种简便而快速的近似算法对每种故障作出概略的计算,并选用恰当的能反映故障严重程度的性能指标,通过筛选保留较为严重的故障及其相应的起作用的过载约束,以便进行精确的计算用于安全分析或安全经济调度。本文所用的不良状态校正法(OKA)正是这样一种运算非常简便、快速,收敛可靠的解算方法,且OKA能异常简便且直观地模拟支路的开断事故,只将开断支路流值的上、下限置零即可。因而用OKA进行事故的自动选择和排序计算非常适宜。

(一) 性能指标的选取

本文采用无功型性能指标。设事故前系统的总无功负荷为 Q_D^0 ,即各节点无功负荷的总和($\sum_k Q_{Dk}^0$)。事故停运时,若要保持原有的无功负荷不变,就可能出现某些支路无功流过大而违反节点电压安全约束;若要满足电压不超限,即控制支路无功流,也即控制支路电压损耗保持在允许范围,那么无功电源向系统提供载荷能力将受限,从而导致无功负荷削减或增大无功补偿量。故障愈严重,负荷的削减量就愈多,也即需要的无功补偿量就愈多。因此,我们可采用无功负荷削减量,亦即需要的无功补偿量的大小作为评定事故严重程度的性能指标PI,定义

$$PI = \frac{\Delta Q_D}{Q_D^0} \times 100\% = \left[\left(Q_D^0 - \sum_k Q_{Dk} \right) / Q_D^0 \right] \times 100\% \quad (1)$$

式中 Q_{Dk} 为事故状态下负荷节点 k 的无功。

通过选取 PI 的门坎值 $s\%$ (例如 7%)，滤掉 $PI < s\%$ 的轻微事故，保留 $PI \geq s\%$ 的事故，并按 PI 的大小排列事故严重程度的初步次序。

(二) 事故状态下无功优化模型

对于一般化的电力系统，可根据有功和无功及其参量之间仅存在弱耦合关系，将有功和无功进行解耦。解耦后的无功关系式，可用OKA网络表示。网络中每一“发电弧”对应于一个无功电源点。或电容补偿点，或调相机；每一条“负荷弧”对应一个无功负荷点，“输电弧”即输电线路，另有一条从总负荷点到总电源点的返回弧。所构成的OKA网络共有 $m+1$ 条弧 ($m = NG + NT + ND$)。弧流 f_j 为相应支路中的无功功率。

对于每一种单一或多重事故，都可用OKA法解算一个相应的无功优化模型，计算出 PI ，再按 PI 的大小对所有事故进行筛选和排序。本文所用的无功最优分配数学模型是以输电弧电压损耗绝对值的总和为目标函数，其模型为

$$\begin{cases} \min F_V = \sum_{j \in NT} |\Delta V_j| & (2) \\ \text{s. t. } \sum_{i \rightarrow W} Q_{Gi} + \sum_{j \rightarrow W} Q_{Tj} + \sum_{k \rightarrow W} Q_{Dk} = 0 & W \in N & (3) \\ \underline{Q}_{Gi} \leq Q_{Gi} \leq \bar{Q}_{Gi} & i \in NG & (4) \\ -\bar{Q}_{Lj} \leq Q_{Tj} \leq \bar{Q}_{Lj} & j \in NT, j \notin NL & (5) \\ \Delta V_j \leq \Delta V_{j_{\max}} & & (6) \\ \underline{Q}_{Dk} \leq Q_{Dk} \leq \bar{Q}_{Dk} & k \in ND & (7) \\ \sum_k \underline{Q}_{Dk} \leq \sum_k Q_{Dk} \leq \sum_k \bar{Q}_{Dk} & & (8) \end{cases}$$

式中 ΔV_j 为第 j 线路的电压损耗； Q_{Gi} 、 Q_{Tj} 、 Q_{Dk} 分别为发电节点（包括电容补偿点或调相机）、线路和负荷点的无功功率，流向节点取正，流出节点取负； NG 、 NT 和 ND 分别对应无功发电节点数（包括无功电源点、电容补偿装置和调相机数）、输电线路数和无功负荷点数； n 表示节点总数；符号 $i \rightarrow W$ 表示发电弧与节点 W 相关联； $j \rightarrow W$ 、 $k \rightarrow W$ 意义类同； NL 表示断线支路。

目标函数(2)中电压损耗可用下式表示

$$\Delta V_j = \frac{P_{Tj} R_j + Q_{Tj} X_j}{V_{Tj}} \quad (9)$$

式中 R_j 、 X_j 分别为线路 j 的电阻和电抗； P_{Tj} 、 Q_{Tj} 和 V_{Tj} 分别为线路 j 的有功、无功和电压。取线路平均电压 $V_{Tj} = 1$ ，且由于无功优化中有功恒定不变，则 $P_{Tj} R_j$ 为一常量，因而

求目标函数 $\sum_{j \in NT} |\Delta V_j|$ 最小等价于求 $\sum_{j \in NT} |Q_{Tj} X_j|$ 最小。

在式(9)中略去常数项 $P_{Tj} R_j$ ，则可得

$$\Delta V_j > X_j Q_{Tj} \quad (10)$$

利用式(10)将模型M-1中约束式(5)和(6)合并为一个约束, 可得以电压损耗极限值表示的支路无功安全约束为

$$-\frac{\Delta V_{jmax}}{X_j} \leq Q_{Tj} \leq \frac{\Delta V_{jmax}}{X_j} \quad (11)$$

模型M-1中式(3)为节点无功守恒等式约束, 式(4)~(8)为不等约束, 式(8)为返回弧约束隐含于(7)式之中。

综合上述, 模型M-1可化为

$$M-1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } F_V = \sum_{j \in NT} |X_j Q_{Tj}| \quad (12) \\ \text{s. t. } \sum_{i \rightarrow N} Q_{Gi} + \sum_{i \rightarrow N} Q_{Tj} + \sum_{k \rightarrow N} Q_{Dk} = 0 \quad W \in n \quad (13) \\ \underline{Q}_{Gi} \leq Q_{Gi} \leq \bar{Q}_{Gi} \quad i \in NG \quad (14) \\ -\frac{\Delta V_{jmax}}{X_j} \leq Q_{Tj} \leq \frac{\Delta V_{jmax}}{X_j} \quad j \in NT, j \notin NL \quad (15) \\ \underline{Q}_{Dk} \leq Q_{Dk} \leq \bar{Q}_{Dk} \quad k \in ND \quad (16) \\ \sum \underline{Q}_{Dk} \leq \sum Q_{Dk} \leq \sum \bar{Q}_{Dk} \quad (17) \end{array} \right.$$

通过选取各种弧的参数, 如流的平均费用、容量限值等, 则可将线性化的模型M-2化成OKA网络模型M-0 (见附录A), 并用不良状态校正法求解。

(三) 线路无功约束中 ΔV_{jmax} 的计算

ΔV_{jmax} 的大小直接影响线路的无功安全域。若 ΔV_{jmax} 值过大, 由于无功容量限制偏大而会使某些较严重的支路故障在筛选中漏掉; 若 ΔV_{jmax} 值过小, 由于线路无功容量限制偏小而使某些非严重故障不能有效地筛掉。

由于网络结构(如环网、放射网)及参数R/X比值的不同, 各支路的最大电压损耗量 ΔV_{jmax} 也不相同。而正常潮流求出各支路的电压损耗 ΔV_j^0 反映了网络的具体情况, 我们可通过 ΔV_j^0 乘以一个系数 k_j 以代替 ΔV_{jmax} 的某一规定量, 则可将(11)式改写为

$$-\frac{k_j \Delta V_j^0}{X_j} \leq Q_{Tj} \leq \frac{k_j \Delta V_j^0}{X_j} \quad (18)$$

显然, 系数 k_j 的选择应予重视。 k_j 的选择合适与否, 对故障选择和排序的结果有影响。我们经过大量的计算分析, 归纳出选取 k_j 值的经验公式

$$k_j = \sqrt{\frac{\Delta V_{jmax}}{\Delta V_j^0}} \quad (19)$$

此时的 $\Delta V_{j,max}$ 可取为4%~5%。例如取 $\Delta V_{j,max} = 5\%$ ，则 k_j 的取值与正常状况下电压损耗 ΔV_j^0 的关系可用图1所示的曲线表示。从图1中曲线 $I_1 - I_2$ 可看出， k_j 是随着 ΔV_j^0 的增大而单调减少。在 $\Delta V_j^0 = \Delta V_{j,max}$ 附近曲线比较平坦， k_j 值变化不大（接近1），当在 $\Delta V_j^0 < 2\%$ 时， ΔV_j^0 越小， k_j 值取得越大，且增加的幅度很大。若在正常潮流下某线路的电压损耗偏小，则当 $\Delta V_j^0 < 0.015$ 时，取 $\Delta V_j^0 = 0.015$ 代入式(19)和(18)计算系数 k_j 和线路无功安全约束。这时在 $\Delta V_{j,max} = 5\%$ 情况下 k_j 取值对应于图1中曲线 $I_3 - I_2$ 。

如果没有进行正常潮流计算而缺乏电压损耗 ΔV_j^0 ，则对于 R/X 比均一以及各主要线路的功率因数 $\cos \phi$ 相差不大的网络，可取各线路的最大电压损耗 $\Delta V_{j,max}$ 为同一值，作近似地故障选择和排序计算。此时的 $\Delta V_{j,max}$ 可取1.5~3%。

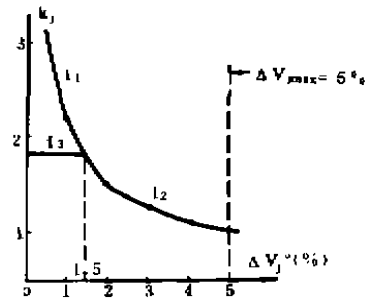


图1 $\Delta V_{j,max} = 5\%$ 时 $k_j \sim \Delta V_j^0$ 曲线

三、实例计算

用本文提出的模型和方法，我们对IEEE几个典型试验系统在M-340型计算机上进行了计算，部分结果列于表1~3中。

表1 5节点系统预想事故排序

支路序	节点对	$\Delta Q_D(P.U.)$	PI(%)	排序	文献[5]排序
4	3-2	0.1335	22.25	1	1
2	4-1	0.0800	13.33	2	2
5	2-5	0.0735	12.25	3	3
3	5-1	0.0700	11.67	4	4
1	1-3	0.0535	8.90	5	5
6	3-4	0.0525	8.75	6	6

表2 14节点系统故障选择和排序结果

故障支路	$\Delta Q_D(P.U.)$	PI(%)	排序	用潮流法排序
8--7	0.3091	38.0	1	1
6--5	0.1548	19.0	2	2
1--5	0.1504	18.5	3	3
6--13	0.1152	14.2	4	4
9--14	0.06895	8.5	5	5

续表

1-2	0.0670	8.2	6	6
9-10	0.0657	8.1	7	7
6-11	0.0635	7.8	8	8
3-4	0.06165	7.6	9	9

表 3 几个系统故障选择和排序计算时间

IEEE 系 统	5 节 点	14 节 点	30 节 点	57 节 点	118 节 点
N-1 故障检验支路数	6	20	41	78	179
总 CPU 时 间	0.40 [#]	0.88 [#]	2.54 [#]	5.47 [#]	65.72 [#]
机 型	M-340				

表 1 为 5 节点系统故障选择和排序计算结果, 与文献[5]结果一致; 表 2 为 14 节点系统故障选择和排序计算结果, 与通过潮流计算的结果一致。本文还对 30 节点、57 节点和 118 节点系统进行了计算。几个系统故障选择和排序所需的计算时间列于表 3 中。

从表 2 可看出, 支路 8-7 故障产生的无功削减量很大, 占无功总负荷的 38%。这是因为线路 8-7 是放射型支路, 且末端与无功电源 8 相连; 当线路 8-7 故障开断时, 节点 8 处的无功电源便从网络中分离, 这样无功电源 8 的无功功率不能送到网络中, 因而造成无功负荷的大量削减, 亦即需要较多的无功补偿。

通过计算表明, 对于网络结构及参数 R/X 比均一的特殊网络, 各条线路最大电压损耗 $\Delta V_{i,max}$ 取同一值近似计算线路无功安全约束, 以进行故障选择和排序是基本可行的, 能够得到较为满意的结果 (如本文计算 5 节点系统均一网络, 便采用的是这种取法); 但对网络结构 (如环网、放射网) 及参数 R/X 比不均一网络, 若各条线路最大电压损耗 $\Delta V_{i,max}$ 仍取相同值计算线路无功安全约束, 则最终结果会出现一些误选排或漏选排, 这种情况应根据式(18)和(19)来计算各线路的无功安全约束 (此时各线路的最大电压损耗 $\Delta V_{i,max} = k_i \Delta V^0$; 不再一样), 才能获得较为满意的计算结果 (如本文其余几个不均一网络算例, 便采用的是这种办法)。

四、结 论

本文提出了以总电压损耗最小为目标函数的网流模型, 快速地计算出各事故状态下网络中的无功最优分配, 从而得到系统在各事故情况下所产生的无功负荷削减量, 亦即所需的无功补偿量, 并以此作为评定事故严重程度的性能指标, 进行事故的自动选择和排序。并采用运算简便快速、收敛可靠的 OKA 解算方法。大量的实例计算表明, 本文提出的模型和算法是快速和有效的, 且与文献[7]有功模型具有相同型式, 算法和程序也相同。这样若与有功型性能指标结合考虑进行故障选择和排序, 可克服用单一指标排序的缺陷。

参 考 文 献

- [1] 吴际舜：电力系统静态安全分析，上海，上海交通大学出版社，1985：73-86
- [2] Ejebe, G. C. et al, Automatic Contingency Selection, IEEE Trans., 1982, PAS-101(1): 97-109
- [3] Vemuri, S. et al, On-Line Automatic Contingency Selection Algorithms, IEEE Trans., 1983, PAS-102(2): 346-354
- [4] Jondea, K. et al, Contingency Ranking and Simulation for On-line Use, IEEE Trans., 1985, PAS-104(10):2401-2407
- [5] Wasley, R. G. et al, Identification And Ranking of Critical Contingencies in Dependent Variable Space, IEEE Trans., 1983, PAS-102(4): 881-888
- [6] Albuyeh, F. et al, Reactive Power Consideration in Automatic Contingency Selection, IEEE Trans., 1982, PAS-101(2):107-110
- [7] 徐国禹，朱继忠，用网络规划法进行事故自动选择，重庆大学学报，1988，11(3): 60-66

附录：不良状态校正算法(OKA)

(一) 网络模型

OKA网络的数学模型为

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} F = \sum_{ij \in m+1} C_{ij} f_{ij} \end{array} \right\} \quad (A1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{s. t. } \sum_{j \in n} (f_{ij} - f_{ji}) = 0 \quad i \in n \end{array} \right\} \quad (A2)$$

$$\left. \begin{array}{l} L_{ij} \leq f_{ij} \leq U_{ij} \quad ij \in m+1 \end{array} \right\} \quad (A3)$$

式中 f_{ij} 、 U_{ij} 、 L_{ij} 为弧上的流及其上、下限， C_{ij} 为弧流的单位费用。

设 π 为原问题的对偶变量（节点费用），并令相对费用 $\bar{C}_{ij} = C_{ij} + \pi_i - \pi_j$ ，根据线性规划原偶关系和互补松弛条件，可得OKA的最优解条件为

$$\text{若 } \bar{C}_{ij} > 0, \quad \text{则 } f_{ij} = L_{ij} \quad (A4)$$

$$L_{ij} \leq f_{ij} \leq U_{ij}, \quad \bar{C}_{ij} = 0 \quad (A5)$$

$$\bar{C}_{ij} < 0, \quad f_{ij} = U_{ij} \quad (A6)$$

式(A4)~(A6)为弧的三种良好状态，另外还可组成不满足式(A4)~(A6)的六种不良状态。

(二) 模型的求解

对设定的只要满足式(A2)的任意流（可以是零流，或故障状态下的不可行流等），检

查各弧的状态。若存在不良状态的弧,就从中任选一条进行校正。校正的方法是以该弧的一端作为始点,用着色技术寻求流的增值回路,有增值回路时,就用流的增值修改回路上各弧的流值 f_{ij} ,无增值回路时,则修改节点 π 的值(即修改了相对费用 \bar{C}_{ij}),从而使该弧修正为良好状态。重复以上过程直到各弧均为良好状态时,就获得了最优解。

更 正

1989年(第12卷)第3期

Vol.12 No.3 1989

P36图2

误 正

