

弹塑性大变形率问题的变分原理和应用

VARIATIONAL PRINCIPLE OF RATE PROBLEM OF ELASTIC-
PLASTIC LARGE DEFORMATION AND IT'S APPLICATION

汪 凌 云

Wang Linyun

(冶金及材料工程系)

摘 要 本文根据Hill(1958, 1959)一般变分原理, 采用流动坐标导出了弹塑性大变形及非线性率问题的, 分别以初始和现时构形为参考状态的, 适合于有限元计算的变分方程, 并用根据该变分方程建立起来的有限元公式对处于平面应变条件下的, 带有微小缩颈状初始几何缺陷的聚合物板的缩颈过程作了分析, 分析时考虑了材料的硬化, 本文所导出的变分方程适于分析包括金属塑性成形在内的弹塑性大变形过程。

关键词 弹塑性大变形; 变分原理; /率问题

中国图书资料分类法分类号 O344.1; O344.4

ABSTRACT In this paper, based on Hill's general variational principle(1958-1959), a variational equation in initial configuration (reference configuration) and current configuration (reference configuration) is derived using convected coordinates. The derived variational equation is for large elastoplastic, double nonlinear rate problem and is suited for finite element calculation. As an applied example of the derived variational equation, necking of a plane strain polymer sheet with a initial geometric imperfection (initial neck) is analysed using the finite formulation based on the derived variational equation. Work hardening of materials is considered. The derived variational equation in this paper is suitable for analysing large elastoplastic deformation problem including metal forming processes.

KEY WORDS elastic-plastic large deformation; variational principle /rate problem

本文于1988年4月30日收到。

一、引言

众所周知,求解具有几何和物理双非线性的弹塑性大变形问题(金属塑性成形,塑性失稳等都属于这类问题)是非常复杂的,一般情况下封闭形式的解是得不到的,需要采用象有限元这类数值方法,即使如此,也常出现收敛不好,机时很长,精度不高等问题。实践证明,若将问题表达成增量或率的形式往往具有很大的方便性。本文在Hill〔1〕,〔2〕场方程和一般变分原理基础上导出了上述问题率形式的,分别以初始和现时构形为参考构形的变分方程。并用根据该变分方程建立起来的有限元公式对处于平面应变条件下的,具有微小缩颈状初始几何缺陷的聚合物板作了分析。分析时考虑了材料的硬化,本文所导出的变分方程适于分析包括金属塑性成形在内的弹塑性大变形过程。

二、基本场方程

以物体初始(变形前)构形作为参考构形,采用流动坐标 ξ^i ,初始构形中质点位置矢量设为 $\tilde{r}(\xi^i)$,现时(变形后)构形中质点位置矢量为 $R(\xi^i)$ 。用 \tilde{g}_i, \tilde{G}_i 分别表示变形前后的基矢量。 $\tilde{g}_{i,j}, \tilde{G}_{i,j}$ 表示变形前后的度量张量。 \tilde{u}^i (相对于变形前度量 \tilde{g}), \tilde{v}^i (相对于变形后度量 \tilde{G})表示位移矢量和速度矢量,则Lagrange应变率张量的协变分量可表示为

$$\dot{\eta}_{i,j} = \frac{1}{2} (\dot{\tilde{G}}_{i,j} - \dot{\tilde{g}}_{i,j}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{G}}_{i,j} = \frac{1}{2} (\dot{u}^i_{,j} + \dot{u}^j_{,i} + u^k_{,i} \dot{u}^k_{,j} + \dot{u}^k_{,i} u^k_{,j}) \quad (1)$$

Euler应变率张量的协变分量可表示为

$$\dot{\epsilon}_{i,j} = \frac{1}{2} \dot{\tilde{G}}_{i,j} = \frac{1}{2} (v^i_{,j} + v^j_{,i}) \quad (2)$$

式中记号“(·)”示物质率,“(·),”示相对于变形前度量 \tilde{g} 的协变导数,“(·),”示相对于变形后度量 \tilde{G} 的协变导数。

根据Cauchy应力 σ_{ij} 和Kirchhoff应力 τ^{ij} 的定义〔4〕,及Nanson关系,可求得

$$\tau^{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \sigma^{ij} \quad (3)$$

式中 ρ_0, ρ 分别是物体在变形前后的密度。据名义应力 t^{ij} 及Kirchhoff应力的定义及 $\tilde{G}_i = (\delta^j_i + u^j_{,i}) \tilde{g}_j$ 可知

$$t^{ij} = \tau^{ij} + \tau^{ik} u^j_{,k} \quad (4)$$

进一步,由物质率的定义和(3), (4)式

$$\dot{\tau}^{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \dot{\sigma}^{ij} + \tau^{ik} \dot{e}^j_k \quad (5)$$

$$\dot{t}^{ij} = \dot{\tau}^{ij} + \dot{\tau}^{ik} u^j_{,k} + \tau^{ik} \dot{u}^j_{,k} \quad (6)$$

又根据任意二阶张量 \tilde{A} 的Jaumann率的定义及(3)式,可知有

$$\dot{\sigma}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} + \sigma^{ik} \dot{\epsilon}_{,k}^j + \sigma^{kj} \dot{\epsilon}_{,k}^i \quad (7)$$

$$\dot{\tau}^{ij} = \dot{\tau}^{ij} + \tau^{ik} \dot{\epsilon}_{,k}^j + \tau^{kj} \dot{\epsilon}_{,k}^i \quad (8)$$

$$\dot{\tau}^{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \dot{\sigma}^{ij} + \tau^{ij} \dot{\epsilon}_{,k}^k \quad (9)$$

式中 $\dot{\sigma}^{ij}$, $\dot{\tau}^{ij}$ 分别是Cauchy应力和Kirchhoff应力的Jaumann率。

在忽略体积力情况下物体任一点的, 用Kirchhoff应力率表示的率形式的平衡方程为

$$\left(\dot{\tau}^{ij} + \tau^{ik} \dot{u}_{,k}^j + \tau^{kj} \dot{u}_{,k}^i \right)_{,i} = 0 \quad (10)$$

用Kirchhoff应力率表示的边界条件为

$$\left(\dot{\tau}^{ij} + \tau^{ik} \dot{u}_{,k}^j + \tau^{kj} \dot{u}_{,k}^i \right) \eta_i = T^j \quad (11)$$

式中 η_i 是变形前微面元 ds_0 上法矢 \underline{n} 的分量, T^i 是边界 S_T 上的已知表面力率分量。

若以现时构形为参考构形, 则有 $\underline{\tau}(\xi^i) = \underline{R}(\xi^i)$, $\underline{\dot{r}} = 0$, $\underline{\dot{R}} \neq 0$, $\underline{\dot{g}}_i = 0$, $\underline{\dot{G}} \neq 0$, $\underline{g}_i = \underline{G}_i$, $\rho_0 = \rho$ 及

$$\dot{\tau}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} + \tau^{ik} \dot{\epsilon}_{,k}^j \quad (12)$$

率形式的平衡方程和应力边界条件则为

$$\left(\dot{\tau}^{ij} + \tau^{ik} \dot{u}_{,k}^j \right)_{,i} = 0 \quad (13)$$

$$\left(\dot{\tau}^{ij} + \tau^{ik} \dot{u}_{,k}^j \right) \eta_i = T^j \quad (14)$$

三、变分原理

根据Hutchinson[3], 不考虑时间效应的弹塑性材料的本构方程可以表示为

$$\dot{\tau}^{ij} = \widehat{L}^{ijkl} \dot{\eta}_{kl}, \quad \dot{\eta}_{ij} = \widehat{M}_{ijkl} \dot{\tau}^{kl} \quad (15)$$

式中 \widehat{L} 和 \widehat{M} 分别是材料的现时模量张量和柔性张量, 因为 $\dot{\tau}$ 和 $\dot{\eta}$ 都是对称张量, 故 \widehat{L} 和 \widehat{M}

必对称于 $i \leftrightarrow j$, $k \leftrightarrow l$, 也对称于 $ij \leftrightarrow kl$, 这种对称性质保证了 $\dot{\tau}^{ij}$ 或 $\dot{\eta}_{ij}$ 能从某个势函数导出, 即有

$$\dot{\tau}_{,ij} = \frac{\partial W(\dot{\eta})}{\partial \dot{\eta}_{,ij}}, \quad \dot{\eta}_{,ij} = \frac{\partial W^c(\dot{\tau})}{\partial \dot{\tau}^{ij}} \quad (16)$$

成立。式中 $W(\dot{\eta})$, $W^c(\dot{\tau})$ 都是势函数。由Euler理论知有

$$W = \frac{1}{2} \widehat{L}^{ijkl} \dot{\eta}_{,ij} \dot{\eta}_{,kl}, \quad W^c = \frac{1}{2} \widehat{M}_{ijkl} \dot{\tau}^{ij} \dot{\tau}^{kl} \quad (17)$$

W 和 W^c 的关系根据Legendre变换知为

$$W + W^c = \overset{\nabla}{\tau}{}^{ij} \dot{\eta}_{ij} \quad (18)$$

本构方程亦可表示成

$$\dot{\tau}^{ij} = L^{ijkl} \dot{\eta}_{kl}, \quad \dot{\eta}_{ij} = M_{ijkl} \dot{\tau}^{kl} \quad (19)$$

由〔4〕

$$L^{ijkl} = \widehat{L}^{ijkl} - \frac{1}{2} (G^{ik} \tau^{jl} + G^{jk} \tau^{il} + G^{il} \tau^{jk} + G^{jl} \tau^{ik}) \quad (20)$$

同理, 有类似于(16)–(18)的关系式成立, 此时势函数是 $B(\dot{\eta}) = \frac{1}{2} L^{ijkl} \dot{\eta}_{ij} \dot{\eta}_{kl}$, B

$= \frac{1}{2} M_{ijkl} \dot{\tau}^{ij} \dot{\tau}^{kl}$. 对名义应力率而言, 势函数

$$U = B + \frac{1}{2} \tau^{ij} \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j} = \frac{1}{2} f^{ij} \dot{u}_{ij} \quad (21)$$

根据(5)及(9)式可求得用 $\overset{\nabla}{\sigma}$ 表示的本构方程

$$\overset{\nabla}{\sigma}{}^{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \left[\widehat{L}^{ijkl} - \tau^{ij} G^{kl} \right] \dot{\eta}_{kl} = \overset{\nabla}{L}{}^{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (22)$$

式中的 $\overset{\nabla}{L}{}^{ijkl}$ 缺乏关于 $ij \leftrightarrow kl$ 的对称性(即 $\overset{\nabla}{L}{}^{ijkl} \neq \overset{\nabla}{L}{}^{klij}$), 这是由于 $\overset{\nabla}{\sigma}{}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} + \sigma^{ik} \dot{\varepsilon}_k^j + \sigma^{jk} \dot{\varepsilon}_k^i = \frac{\rho}{\rho_0} \left[\dot{\tau}^{ij} + \tau^{ij} \dot{\varepsilon}_k^k + \tau^{ik} \dot{\varepsilon}_k^j + \tau^{jk} \dot{\varepsilon}_k^i \right]$ 式中的 $\frac{\rho}{\rho_0} \tau^{ij} \dot{\varepsilon}_k^k = \frac{\rho}{\rho_0} \tau^{ij} G^{kl} \dot{\eta}_{kl} \neq 0$ 的原因。

因此不存在能导出 $\overset{\nabla}{\sigma}{}^{ij}$ 或 $\dot{\sigma}^{ij}$ 的势函数, (22)式亦不为变分原理所容纳, 即若将式代入变分原理, 则在作有限元计算时将引起非对称矩阵。但对于不可压缩材料而言(此时 $\frac{\rho}{\rho_0} \tau^{ij} \dot{\varepsilon}_k^k = 0$), (22)式能使用于变分原理, 而且较方便。

考虑这样率的边值问题: 在变形前物体表面 S_0 上的一部分 S_{0T} 上给定了名义表面引力率 \dot{T}^i , 在 S_0 的其余部分 S_{0n} 上给定了速度(相对于变形前度量 \underline{g} 的) $\dot{\underline{u}}^*$, 则根据Hill〔1〕, 〔2〕, 该边值问题的正确解应使泛函(在忽略体积力情况下)

$$I(\dot{\underline{u}}) = \int_{V_0} U(\dot{\underline{u}}_{,i}) dv_0 - \int_{S_{0T}} \dot{T}^i \dot{u}_i ds_0 \quad (23)$$

的一阶变分

$$\delta I(\dot{\underline{u}}) = 0 \quad (24)$$

将(21)式代入(23)式, 有

$$\begin{aligned} I(\dot{\underline{u}}) &= \int_{V_0} \left[B + \frac{1}{2} \tau^{ij} \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j} \right] dv_0 - \int_{S_{0T}} \dot{T}^i \dot{u}_i ds_0 \\ &= \int_{V_0} \frac{1}{2} \left[L^{ijkl} \dot{\eta}_{ij} \dot{\eta}_{kl} + \tau^{ij} \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j} \right] dv_0 - \int_{S_{0T}} \dot{T}^i \dot{u}_i ds_0 \end{aligned}$$

$$= \int_{V_0} \frac{1}{2} \left[\dot{\tau}^{ij} \dot{\eta}_{i,j} + \tau^{ij} \dot{u}^k_{,i} \dot{u}_{k,j} \right] dv_0 - \int_{S_0T} \dot{T}^i \dot{u}_i ds_0 \quad (25)$$

对(25)式求一阶变分, 并令其等于零, 经整理若有

$$\begin{aligned} \delta(I) = & - \int_{V_0} \left(\dot{\tau}^{ij} - \dot{\tau}^{kj} u^i_{,k} + \tau^{kj} \dot{u}^i_{,k} \right)_{,j} \delta \dot{u}_i dv_0 \\ & + \int_{S_0T} \left[\left(\dot{\tau}^{ij} + \dot{\tau}^{kj} u^i_{,k} + \tau^{kj} \dot{u}^i_{,k} \right) \eta_j - \dot{T}^i \right] \delta \dot{u}_i ds_0 = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

由于式中的变分是任意的, 故有

$$\begin{aligned} \left(\dot{\tau}^{ij} + \dot{\tau}^{kj} u^i_{,k} + \tau^{kj} \dot{u}^i_{,k} \right)_{,j} &= 0 \\ \left(\dot{\tau}^{ij} + \dot{\tau}^{kj} u^i_{,k} + \tau^{kj} \dot{u}^i_{,k} \right) \eta_k &= \dot{T}^i \end{aligned}$$

这正是率形式的平衡方程和边界条件。泛函(25)亦可用 $\dot{\tau}^{ij}$ 表示。根据(30)及(8)式, 有

$$\begin{aligned} I(\dot{u}) &= \frac{1}{2} \int_{V_0} \left\{ \left[\left(\widehat{L}^{ijkl} - \frac{1}{2} \left(G^{ik} \tau^{jl} + G^{jk} \tau^{il} + G^{il} \tau^{jk} + G^{jl} \tau^{ik} \right) \right) \dot{\eta}_{i,j} \dot{\eta}_{kl} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau^{ij} \dot{u}^k_{,i} \dot{u}_{k,j} \right] dv_0 - \int_{S_0T} \dot{T}^i \dot{u}_i ds_0 \right. \\ &= \int_{V_0} \left[\frac{1}{2} \widehat{L}^{ijkl} \dot{\eta}_{i,j} \dot{\eta}_{kl} - \frac{1}{4} \left(G^{ik} \tau^{jl} + G^{jk} \tau^{il} + G^{il} \tau^{jk} + G^{jl} \tau^{ik} \right) \dot{\eta}_{i,j} \dot{\eta}_{kl} \right. \\ &\quad \left. + \tau^{ij} \dot{u}^k_{,i} \dot{u}_{k,j} \right] dv_0 - \int_{S_0T} \dot{T}^i \dot{u}_i ds_0 \end{aligned}$$

变换上式括号中第二项的哑标, 经整理后可写为

$$\begin{aligned} I(\dot{u}) &= \int_{V_0} \left[\left(\frac{1}{2} \widehat{L}^{ijkl} - G^{ij} \tau^{kl} \right) \dot{\eta}_{i,j} \dot{\eta}_{kl} + \frac{1}{2} \tau^{ij} \dot{u}^k_{,i} \dot{u}_{k,j} \right] dv_0 \\ &\quad - \int_{S_0T} \dot{T}^i \dot{u}_i ds_0 \quad (27) \end{aligned}$$

根据(15)式:

$$I(\dot{u}) = \int_{V_0} \left(\frac{1}{2} \widehat{L}^{ijkl} \dot{\eta}_{i,j} \dot{\eta}_{kl} - G^{ij} \tau^{kl} \dot{\eta}_{i,j} \dot{\eta}_{kl} + \frac{1}{2} \tau^{ij} \dot{u}^k_{,i} \dot{u}_{k,j} \right) dv_0 - \int_{S_0T} \dot{T}^i \dot{u}_i ds_0 \quad (28)$$

(25)和(28)式都是建立Lagrange有限元公式的基础, 它们都是以初始构形为参考构形。若以现时构形为参考构形, 并在现时构形的 S_T 上给定了表面引力率 \dot{Q}^* , 在 S_v 上给定 v^* , 则可运用(25)式导出以现时构形为参考构形的泛函

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_V \left[L^{ijkl} \dot{\varepsilon}_{i,j} \dot{\varepsilon}_{kl} + \sigma^{ij} v^k_{,i} v_{k,j} \right] dv - \int_{S_T} \dot{Q}^i v_i ds \quad (29)$$

在推导(29)式时运用了(2)式及

$$\dot{\widetilde{T}}^i = \dot{Q}^i G^i \frac{ds}{ds_0}$$

$$\rho dv = \rho_0 dv_0, \quad \rho = \rho_0 = 1$$

$$\dot{u}^k_{,i} \dot{u}_{k,j} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial \widetilde{\xi}^i} \cdot \frac{\partial \dot{u}}{\partial \widetilde{\xi}^j} = v^k_{,i} v_{k,j}$$

对(29)式求一阶变分并令其等于零则得到(12)式,(13)式。(29)式是建立修正的Lagrange有限元公式的基础。

四、应用实例

考虑各向同性硬化材料,采用Hutchison J_2 流动理论。这样(15)式中的

$$\widehat{L}^{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} (G^{ik}G^{jl} + G^{jk}G^{il}) + \frac{\nu}{1-2\nu} G^{ij}G^{kl} - \frac{\Lambda}{q} S^{ij}S^{kl} \right] \quad (30)$$

式中 $\Lambda = 1$, (当 $S^{ij}\dot{\eta}_{ij} > 0$, 且 $\tau_e = (\tau_e)_{max}$), 或 $\Lambda = 0$, (当 $S^{ij}\dot{\eta}_{ij} < 0$, 或 $\tau_e < (\tau_e)_{max}$)。

E 是弹性模量, ν 是Poisson比, 应力偏量 $S^{ij} = \tau^{ij} - \frac{1}{3}G^{ij}G_{kl}\tau^{kl}$, 第二应力偏量 J_2 不变量及等效Kirchhoff应力 τ_e 为

$$J_2 = \frac{1}{3} \tau_e^2 = \frac{1}{2} G_{ik}G_{jl}S^{ij}S^{kl} \quad (31)$$

参数

$$q = (1+\nu)\frac{h}{3} + \frac{2}{3} \tau_e^2 \quad (32)$$

硬化参数 h 可看作为 J_2 或 τ_e 的函数, 可由单向拉伸资料得到:

$$\tau_e = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \sigma \quad (33)$$

σ 是真应力, 即Cauchy应力的物理分量, h 由下式定义

$$\frac{1}{h} = \left(\frac{3}{2\tau_e} \right)^2 \left\{ \frac{\rho_0}{\rho} \left[1 - (1-2\nu)\frac{\tau_e}{E} \right] - \frac{1}{E} - \frac{1}{E} \right\} \quad (34)$$

式中 $E_t = d\sigma/dt$ 是切线模量, 即真应力—真应变曲线的斜率。单向拉伸时材料的应力应变关系设为〔5〕

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{当 } \varepsilon \leq \varepsilon_Y \\ aK\varepsilon^N & \text{当 } \varepsilon_Y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ Ke \times p(M\varepsilon^2) & \text{当 } \varepsilon \geq \varepsilon_0 \end{cases} \quad (35)$$

式中 $K, M, \varepsilon_0, \varepsilon_Y$ 是独立的材料常数。分析时取 $M = 0.5, \varepsilon_0 = 0.5, \varepsilon_Y = 0.04, \nu = 0.4$ 。

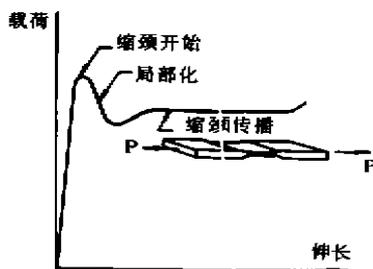


图1 计算对象的外形和受力

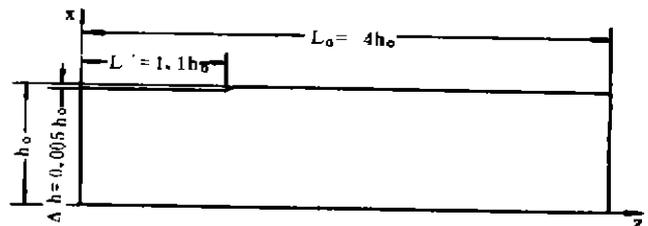


图2 计算对象的尺寸

分析时根据(28)式建立有限元公式。分析对象为一长等于 $2L_0$ ，厚等于 $2h_0$ ，且在中间部分具有初始缩颈状几何缺陷的聚合物板(图1)，初如几何缺陷以这样的方式形成：从中心($\frac{1}{2}L_0$ 处)算起到 $L'=1.1h_0$ 处减以厚度 $\Delta h=0.005h_0$ (图2)。采用直角坐标，于是有 $\xi^1=X$ ， $\xi^2=Y$ ， $\xi^3=Z$ 。板对称于 $X=0$ ， $Z=0$ 平面。位移分量为

$$u_x = u^x = u^x(X, Z), \quad u_y = u^y = 0, \quad u_z = u^z = u^z(X, Z) \quad (36)$$

也由于对称于 $Z=0$ 平面，故

$$\dot{T}^x(X, 0) = 0, \quad \dot{u}_z(X, 0) = 0 \quad (37)$$

又若假设端面切应力为零，所以在 $Z=L_0$ 处的边界条件是

$$\dot{T}^x(X, L_0) = 0, \quad \dot{u}_z(X, L_0) = \dot{U} \quad (38)$$

式中 \dot{U} 是给定轴向伸长增量。侧表面($X=h_0$)上应力设为零。分析时采用四边形单元，每个四边形中又包含四个三角形状的线性位移元。因为是平面应变，所以可看作常应变三角形，可采用中央一点积分法来计算积分。每个增量上的总载荷由在计算对象端部现时断面上积分物理分量 σ_{zz} 得到。在中心断面 $Z=0$ 上作类似计算以验证整体平衡。

分析结果示于图3至图7中。图3是计算对象的计算载荷伸长曲线。图4示拉伸比 h_u/h_N (h_u, h_N 分别是对象远离转变处(即端部和中心附近)的厚度的一半)及 ϵ_{zz} (ϵ_{zz} 是轴向真应变的物理分量)的发展和变化。由该图可见，在 $U/L_0=0.3\sim 0.5$ 范围内所观察到的缩颈局部化与明显的转变是一致的，超过此范围，缩颈在最小断面上基本停止，而在对象上稳定地传播，最小断面上应力，应变分布情况示于图5至图7中，在这些图中， σ_m 是等效应力， ϵ_e 是根据(3-8)式计算得到的等效应变， σ_i, ϵ_i 是真应力和真应变的物理分量。 σ_r 是流体静压力。从图5可见，在 $U/L_0=0.35$ 时，由于发生缩颈局部化，应力分布不均匀。 $U/L_0=0.54$ 时的早期缩颈传播示于图6中，由该图知，应力分布类似于图5。在图7中比较了已充分发展的缩颈传播阶段的应力，应变分布情况；由该图可见，应力在厚度方向上均匀分布。

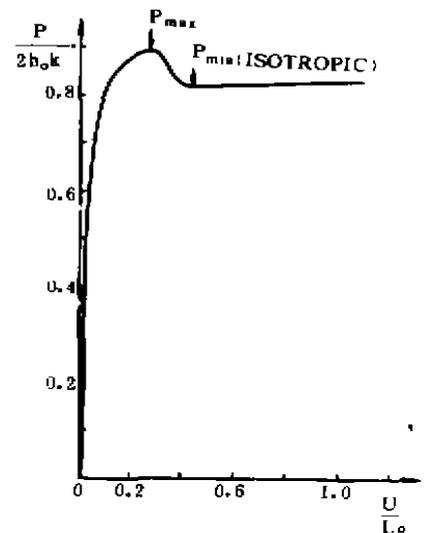


图3 计算载荷伸长曲线

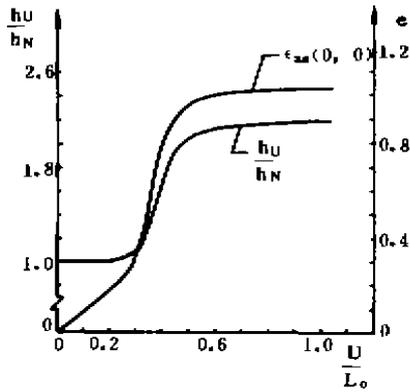


图 4 拉伸比 h_u/h_N , ϵ_{zz} 与 U/L_0 的函数关系

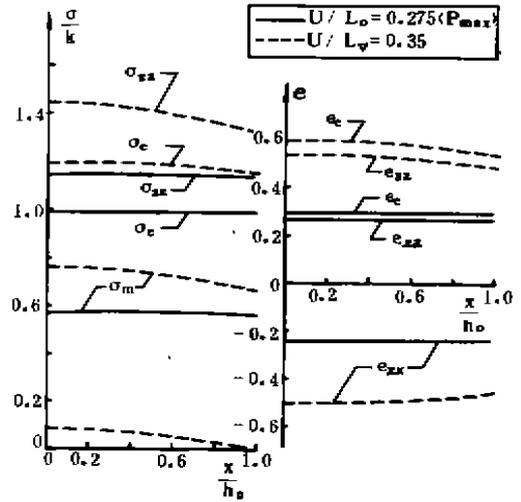


图 5 $U/L_0=0.275, 0.35$ 时最小断面 ($Z=0$) 上应力应变分布

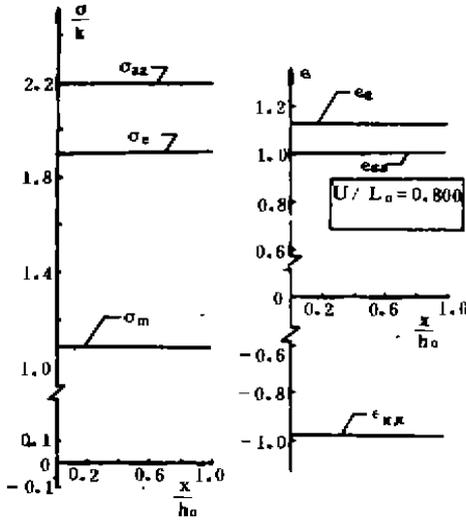


图 6 $U/L_0=0.54$ 时最小断面 ($Z=0$) 上应力应变分布

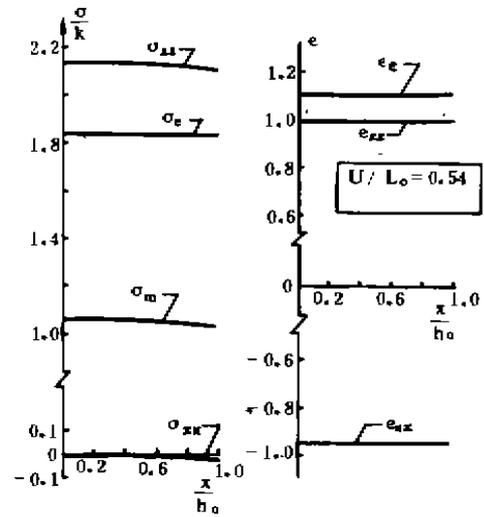


图 7 $U/L_0=0.80$ 时最小断面 ($Z=0$) 上应力应变分布

参 考 文 献

[1] Hill, R, A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, J. Mech. phys. Solids, 1958, 6: 226-249
 [2] Hill, R, Some basic principles in the mechanics of Solids without a nature time, Ibid, 1959, 7: 209-215
 [3] Huachinson, J, Finite strain analysis of elastic-plastic Solids and structures,

- Numerical solution of nonlinear structural problems, edit. R. Hartung, ASME, 1973, 17-29
- [4] Neale, K., Phenomenological Constitutive laws in finite plasticity, Solid Mechanics Archives, 1981, 6: 79-128
- [5] Hutchinson, J. and Neale, K., Neck propagation, J. Mech. Solid, 1983, 31: 405-416
- [6] 汪凌云, 弹塑性大变形率问题的一种有限元法, 计算结构力学及其应用, 1988, 5, (4): 1-11