

# 数字测量系统采样量化误差信息论综合法

INFORMATION THEORY COMBINATION FOR ERROR ANALYSIS OF  
SAMPLING-QUANTIZATION FOR DIGITAL MEASUREMENT SYSTEMS

武刚

朱麟章

Wu Gang

Zhu Linzhang

(自动化系)

**摘要** 本文针对数字测量系统采样与量化误差问题,提出了一种新的分析方法—信息论综合法,它克服了传统误差分析中不确定度与标准误差之间存在的随意性,使误差的表达更为合理。通过采样量化谱的分析,还提出了一种最优滤波处理方法,经仿真与试验表明,效果良好。

**关键词** 数字测量; 采样量化; 误差; 信息论  
中国图书资料分类法分类号 TP274.23

**ABSTRACT** This paper presents a new error analysis method based on the information theory. The analyse results of error of a digital measurement system will be illustrated more reasonably. This method is defined information theory combination, it will overcome the unintention between the uncertainty and the standard error of measuring results by traditional error analysis. On the basis of error spectrum analysis of sampling and quantization, an optimum digital filtering method is also presented in this paper. Simulation and testing show that the method is more resultful.

**KEY WORDS** digital measurement; sampling quantizing; error; information theory

## 一、信息论方法概要

### (一) 信息熵与信息量

任何一种信息都是描述一种物理系统的状态,如其状态已预先确知,则信息的传递并没有什么实际意义。只有系统的状态尚不能确知或不完全确知时,信息的传递才具有实际价值,对信息的有效获取是十分重要的。设系统有 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 个状态,各状态出现概率分

本文于1988年12月14日收到

别为 $P_1, P_2, \dots, P_n$ ，则系统的熵可定义为

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P_i \log P_i \quad (1)$$

原始熵 $H(x)$ 的单位为比特（以2为底）或尼特（以 $e$ 为底）。熵在信息系统中反映的是系统状态的不确定性，熵越小，系统的不确定性越小，则知道的信息量越多。信息量可用熵差表示

$$I(x) = H_1(x) - H_2(x) \quad (2)$$

其中 $H_1(x)$ 与 $H_2(x)$ 分别为测量前后系统的熵。

### (二) 误差熵和误差熵系数

由式(2)可知， $H_2(x)$ 描述系统测量后的不确定性，定义为误差熵 $\Delta$

$$\Delta = \frac{1}{2} \exp H_2(x) \quad (3)$$

对于正态分布  $H_2(x) = \frac{1}{2} \log 2\pi e \sigma^2$

则  $\Delta_N = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi e} \sigma$  ( $\sigma$ ——标准误差)

对于均匀分布  $H_2(x) = \log(\beta - \alpha)$

则  $\Delta_U = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$  ( $\alpha, \beta$ 为均匀分布上、下限)

误差熵由系统熵严格求出，不象概率论中的不确定度 $\pm e$ 那样简单地选取。故用误差熵 $\Delta$ 评价误差，可避免不确定度 $\pm e$ 存在的随意性。

标准误差 $\sigma$ 与误差熵 $\Delta$ 的比值定义为熵系数

$$k = \Delta / \sigma \quad (4)$$

对于正态分布， $k_N = 2.07$ ，对于均匀分布  $k_U = \sqrt{3}$ 。式(4)说明了能量 $\sigma^2$ 与分布规律对测量误差的影响。将 $N$ 个误差熵 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ 的合成熵记作

$$\Delta_s = k_s \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_N^2} \quad (5)$$

式中： $k_s$ —合成熵系数，对于均匀分布与正态分布，合成熵系数为

$$k_{NV} = \sqrt{\left[ 3(\pi e/3)^N P_N \right] / (1 + P_N)} \quad (6)$$

式中  $P_N$ —正态分布的相对比重， $P_N = \sigma_N^2 / (\sigma_N^2 + \sigma_e^2)$ 。

## 二、量化误差谱分析

### (一) 采样失真谱

在理论采样周期  $T = 1/2W$  ( $W$ 为信号带宽)的采样值为  $x_n = X(nT)$ ，由于定时电路内随

机起伏的影响, 实际采样值将为  $y(nT) = X(nT) + \eta(nT)$ 。设  $\eta_n$  是具有方差的严格平稳随机过程, 可采用一阶近似计算起伏谱的影响。将  $y(nT)$  展开成泰勒级数

$$y(nT) = X(nT) + \eta(nT) + X'(nT)$$

$$\text{输出谱为} \quad S_{yy}(W) = S_{xx}(W) + S_{\eta\eta}(W) * [W^2 S_{xx}(W)] \quad (7)$$

其中随机起伏谱

$$S_{\eta\eta}(W) = \frac{N\sigma_\eta^2}{12} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} \delta(W - n\Delta W)$$

$$\text{又} \quad S_{\eta\eta}(k\Delta W) = S_{xx}(k\Delta W) - \frac{\sigma_\eta^2}{NT_0} \sum_{k \neq j} \left(1 - \frac{k}{j}\right)^2 S_{xx}(j\Delta W) \quad (8)$$

式中:  $j = k - n$ ,  $T_0 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N T_j$ ,  $T_j = \eta_j + T'$  ( $T'$  为计算机定时时间), 上式最末一项

为起伏误差谱, 其值在  $10^{-2} \sim 10^{-4}$  范围内。对于无限求和, 上式的权  $k$  值必然收敛。

### (二) 量化噪声谱

对于平稳随机过程  $x(t), x'(t-\tau)$ , 设  $P(x, x')$  为其二阶概率密度分布,  $P(x), P(x')$  为其一阶概率密度分布, 将  $P(x, x', \tau)$  按富氏级数展开

$$P(x, x', \tau) = P(x)P(x') \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m(\tau)}{F_m} f_m(x) f_m(x') \quad (9)$$

$$F_m = \int_{-\infty}^{\infty} f_m^2(x) P(x) dx$$

$$a_m(\tau) = \frac{1}{F_m} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, x') f_m(x) f_m(x') dx dx'$$

信号  $x(t)$  经  $A/D$  非线性变换后的输出即为量化输出谱, 对于高斯输入信号而言可以证明量化输出谱为

$$S_y(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_n}{\sigma^{2n}} \cdot nS(f) \quad (10)$$

当  $n=1$  时, 等式右边为信号谱乘一个比例因子。  $n>1$  时, 得到的谱即为输出谱。由于噪声谱与信号谱的卷积成比例, 故噪声带宽必然大于信号带宽; 同时, 噪声也因卷积作用而变得平坦。

### (三) 采样量化谱综合

信号处理带来的量化噪声  $S_v(f)$  由式(10)可得量化输出谱

$$S_y(f) = S_x(f) + S_v(f)$$

如为理想采样, 则量化误差谱可表示为

$$S(W) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} S_s \left( W - \frac{2\pi}{T} k \right)$$

对于高斯输入信号，当采样频率  $f_s = 2kf_c$ ，可近似得〔5〕

$$nS(f) = \exp \left[ -\frac{1}{2n} \left( \frac{f}{f_c \alpha} \right)^2 \right] / (\sqrt{2n\pi} f_c \alpha)$$

其中  $\alpha$  为有效带宽系数。当  $n=1$  时代表偏差信号， $n>1$  时代表噪声成份。量化噪声谱为

$$S_q(f) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{\sigma^{2n}} \exp \left[ -\frac{1}{2n} \left( \frac{f}{f_c \alpha} \right)^2 \right] / (\sqrt{2n\pi} f_c \alpha) \quad (11)$$

求解此式可得不同位数的量化噪声谱。

由于采样的影响，采样量化噪声谱为

$$S_{q,r}(f) = S_q(f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [S_q(nf_s + f) + S_q(nf_s - f)] \quad (12)$$

其中  $S_q(f)$  为量化输出中直流定常连续成份。如采样是随机起伏的，则采样输出谱也非单调的，应将采样量化噪声视为随机起伏噪声。

### 三、采样及量化误差的信息论综合

#### (一) 采样误差的统计计算

前已说明，由于起伏的影响，理论采样值  $x(nT)$  与实际采样值  $y(nT)$  之间存在误差

$$e(nT) = x(nT + \varepsilon_n + \eta_n) - x(nT) = y(nT) - x(nT)$$

其中  $\varepsilon_n$  为采样周期  $T$  舍入的影响， $\eta_n$  为随机起伏造成的影响。对于带宽为  $[-W, W]$  的信号，其方差  $\sigma_e^2 = E[e^2(nT)] = 8\pi^2 W^2 \sigma_x^2 / 3$  ( $\sigma_x^2$  起伏方差) (13)

#### (二) 量化误差的统计计算

设  $x(i)$  为输入  $x(t)$  的第  $i$  个值， $x_q(i)$  为其量化输出，则量化误差为

$$e(i) = x(i) - x_q(i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$x(i)$  量化为离散值输出，其概率密度为  $f_x(X)$ ，是由一系列沿  $x$  轴均匀分布的脉冲组成，其间隔为  $q$ ，脉冲强度等于相应电平内曲线  $f_x(X)$  下的面积如图 1 所示。量化噪声密度  $f_e(X)$  以  $q$  为周期，在  $\left(-\frac{q}{2} \sim \frac{q}{2}\right)$  按富氏级数展开

$$f_e(X) = \begin{cases} \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \sum_{n \neq 0} F_n \left( \frac{2\pi}{q} n \right) \exp \left( -j \frac{2\pi X}{q} n \right) & -\frac{q}{2} \leq X \leq \frac{q}{2} \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

量化噪声的特征函数决定于输入信号特征，故有

$$F_x(W) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(X) \exp(jWX) dX$$

当  $n \neq 0$ , 如  $F_x\left(-\frac{2\pi}{q}n\right) = 0$ , 量化误差为均匀分布其均值为零如图 2。通常量化误差不一定是均匀分布, 如以均匀分布来近似, 其误差为

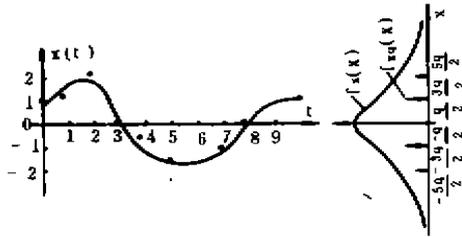


图 1 幅值量化信号的概率密度采样

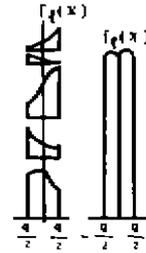


图 2 量化噪声概率密度

$$\frac{1}{q} \sum_{n \neq 0} F_x\left(\frac{2\pi}{q}n\right) \exp\left(-j\frac{2\pi X}{q}n\right) \quad -\frac{q}{2} \leq X < \frac{q}{2}$$

### (三) 采样量化误差的综合

当量化误差服从正态分布, 采样量化输出方差为

$$\sigma_q^2 = E[e^2] = q^2/12 \quad (14)$$

又 
$$\sigma_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\Delta q/2}^{\Delta q/2} x^2 \frac{1}{\Delta q} dx = \Delta q^2/3$$

量化误差熵  $\Delta q = q/2$

设 A/D 转换有关的元件的误差也服从正态分布, 误差为

$$\sigma_{q,1} = -q\sqrt{m}/\log_2 Q^n \quad (15)$$

其中  $n$  为每个符号代表的信息量, 二进制数中  $n = \log_2(1/q)$ ;  $Q$  在二进制为 2;  $m$  代表模拟元件数。由此得量化误差熵为

$$\Delta_{q,1} = k \sqrt{\sigma_q^2 + \sigma_{q,1}^2} \quad (16)$$

服从正态分布的量化误差,  $k_x = k_{Nv}$ 。

与量化误差综合法相同, 采样误差可用起伏方差  $\sigma_{q,1}^2$  与瞬时方差  $\sigma_q^2$  来综合, 即采样合成误差熵为

$$\Delta_{s,1} = k_x \sqrt{\sigma_{q,1}^2 + \sigma_q^2} \quad (17)$$

其中

$$\sigma_q^2 = \sigma_n^2/R(0) = 2\left(1 - \frac{R(t-t_i)}{R(0)}\right) \quad (t_i \leq t \leq t_i+1) \quad (18)$$

如已知传感器的误差熵为  $\Delta_{T,1}$ , 则传感器与 A/D 转换的合成误差熵为

$$\Delta = k_x \sqrt{\left(\Delta_{Tr}^2/k_1\right) + \left(\Delta_{S1}^2/k_2\right)} \quad (19)$$

其中

$$k = k_{av} = \sqrt{3(\pi e/3)^v P_N / (1 + P_N)} \quad (20)$$

$$P_N = \left(\Delta_{Tr}^2/k_1\right) / \left[\left(\Delta_{Tr}^2/k_1\right) + \left(\Delta_{S1}^2/k_2\right)\right] \quad (21)$$

合成误差熵是随 $\Delta_{Tr}$ 与 $\Delta_{S1}$ 的增加而增大的。

#### 四、信号的最优滤波与试验结果

以软件方式处理采样量化误差对测量系统的影响，不但经济简便，而且实际可行。这里采用最优数字滤波方法，有效地恢复了所检测的信号。采样过程 $S$ ，量化过程 $Q$ ，加上滤波算法 $W(t)$ 按图3构成测量系统。这里

$$y_e(t) = x(t) - q(t)$$

求出 $E\left[y_e^2(t)\right]$ 后作为 $W(t)$ 的函数，令

$$W(t) = W_m(t) + eW_e(t)$$

可求得维纳-辛甫方程

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_m(t_2) R_{v,v}(t_2 - t_1) dt_2 - R_{x,x}(t_1) = 0 \quad t_1 > 0$$

考虑到采样量化影响，对于方差为 $\sigma^2$ 的零均值高斯过程，信号与噪声的自相关函数分别为

$$R_{x,x}(\tau) = \sigma^2 e^{-a\tau} \quad R_{v,v}(\tau) = P e^{-b\tau} \quad (b \gg a)$$

其中采样量化噪声方差  $P = \Delta^2/k$

经过推导可得最优滤波器为

$$W_m(s) = R \cdot \frac{(1 - \beta e^{-sT})}{(1 - e^{-sT}/k_1)} \cdot \frac{(1 - a e^{-sT})}{(s + a)} \quad (1 > a \gg \beta) \quad (20)$$

式中： $d = e^{-aT}$ ， $\beta = e^{-bT}$ ， $T$ 为采样周期。采用零阶或一阶保持器，其传递函数分别为

$$W_0(s) = (1 - e^{-sT})/S$$

$$W_1(s) = T(1 + Ts)(1 - e^{-sT})^2 / (sT)^2$$

由 $W_m(s)$ ， $W_0(s)$ 与 $W_1(s)$ 分别作出幅频特性如图4所示，滤波器的幅频特性在截止频率内最好，在高频段也极佳。为了比较，用不同滤波器对采样量化噪声进行滤波处理的仿真效果示于图5。

按上述原理设计的实验数字测量系统，测量闪光灯闪光过程特性。闪光灯的光强采用硅光电池接收并转换为光电流，经放大后送入双通道A/D转换器。闪光灯的特性很不一致，即使是同一型号内光灯也不相同，其启燃时间一般为5~20ms，整个闪光时间为10~100ms，因此存在采样误差，除方法误差外，主要误差源是采样与量化误差。实验采样周期 $T_s = 0.01$ ms，每次采100个样，实验测试结果与计算结果相符。

由式(13)与(18)可得

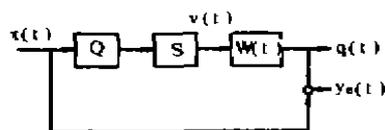


图3 采样量化与滤波原理

$$\sigma_{z_1}^2 = 7.12 \times 10^{-3}, \quad \sigma_r^2 = 2 \times 10^{-3}$$

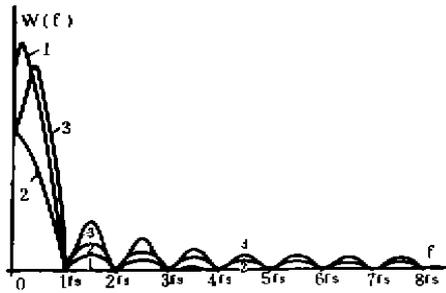
因此有

$$P_N = \sigma_{z_1}^2 / (\sigma_{z_1}^2 + \sigma_r^2) = 0.9997$$

由式(17)得采样误差熵

$$\Delta_{s_1} = 0.17\%$$

8位A/D转换步长 $q = 5/256 = 0.0195$ , 由式(14)与(15)得



1—理想滤波器, 2—零阶保持器, 3—1阶保持器

图 4 滤波器幅频特性

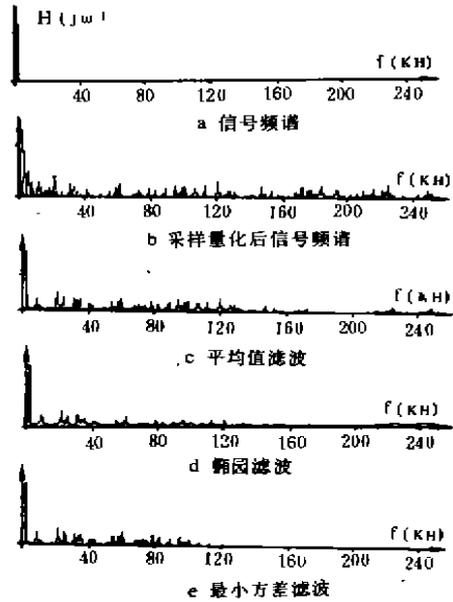


图 5 滤波器滤波效果比较

$$\sigma_{z_1}^2 = 3.54 \times 10^{-5}, \quad \sigma_q^2 = 3.17 \times 10^{-5}$$

因此有

$$P_N = \sigma_{z_1}^2 / (\sigma_{z_1}^2 + \sigma_q^2) = 0.528$$

由式(16)得量化误差熵

$$\Delta_{q_1} = 1.68\%$$

采样与量化合成误差熵

$$\Delta_{s,q} = k \sqrt{\Delta_{s_1}^2 + \Delta_{q_1}^2} = 1.97\%$$

用一般的均方差表示

$$\sigma_{s,q} = \Delta_{s,q} / k = 1.97 / 2.07 = 0.95\%$$

以相对误差表示

$$r_{s,q} = \Delta_{s,q} / E = 1.97 / 5 = 0.39\%$$

采用最优滤波处理后的方差

$$\bar{E}^2 = \sigma^2 \left[ 1 - \left( \frac{1-a^2}{2aT_s} \right) \left( \frac{(1-a\beta)^2 \gamma}{(\beta\gamma + a)(k_1 - 2a + a^2 k_2)} \right) \right]$$

当 $\beta \ll a < 1$ 时, 上式可简化为

$$\bar{E}^2 = \sigma^2 \left[ 1 - \left( \frac{1-a^2}{2aT_s} \right) \left( \frac{2\sigma^2/P}{(1-a^2)\sigma^2/P + (1-a^2) + [(1-a^2)\sigma^2/P + (1-a^2)]^2 - 4a^2} \right) \right]$$

这里 $a = 10^5$ ,  $T_s = 0.01ms$ ,  $\sigma^2/P = 1$ , 由此得

$$\overline{E^2} = 0.73\sigma_s^2;$$

即

$$\sqrt{\overline{E^2}} = 0.76\%$$

相对误差

$$\gamma_{s_0} = 2.07 \times 0.76\% / 5 = 0.31\%$$

可见，采用最优滤波处理的效果是良好的，实测结果与计算结果也一致。

## 参 考 文 献

- [1] 杨逢春译：近代信息论，北京，人民邮电出版社，1982：6—69
- [2] 王梓坤编著：概率论基础及应用，北京，科学出版社，1979
- [3] 柳群译：快速富氏变换，上海科学技术出版社，1979
- [4] 何振亚编著：数字信号处理，北京，人民邮电出版社，1983
- [5] Davoport, W.B. and Root W.L.; An Introduction to the Theory of Random of Signals and Noise, McGraw-Hill, New York, 1978: 294-335
- [6] Bingham, C., Godfrey M.D. and Tukey J.W., Modern Techniques of Power Spectrum Estimation, IEEE Trans. on Audio Electroacoust, 1987, AU-15, 56-66
- [7] Wyer A.D., Recent Results in the Shannon Theory, IEEE Trans. on Information Theory, 1974, IT-20(1), 2-9
- [8] Jaromir Smejkal, Time-Domain Approach to the problem of Sampling, IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, 1982, IM-31(2), 105-109
- [9] Galdos, J. I., Guatafson, D. E., Information and Distortion in Reduced-order Filter Design, IEEE Trans. on Information Theory, 1977, IT-23(2), 183-194