1989年11月　　重庆大学学报　　Vol.12. No 6
第12卷第6期　　JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY　　Nov.1989

幻体的构造

THE CONSTRUCTURE OF A MAGIC N-CUBE OF ORDER T

周振黎

Zhou Zhengli

（应用数学系）

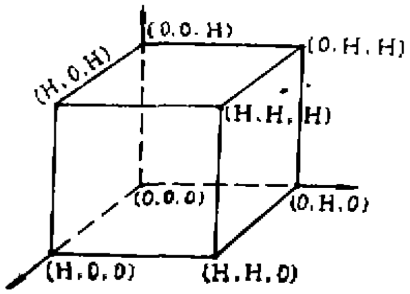
摘　要　幻体是幻方的推广，它是一类特殊的组合设计。本文对正整数 $N=6$，7，8，9和任意的奇素数T，给出了N维T阶幻体的构造公式。对任意的正整数N和奇素数T，N维T阶幻体的构造公式、也可类似地推出。

关键词　幻方；幻体；组合设计

中国图书资料分类法分类号　O157.2

ABSTRACT　A magic N-cube of order T is the extension of a magic square. In this paper, the formulars of constructing of a magic N-cube of order T have been driven where N= 6, 7, 8, 9 and T is arbitrary prime odd integer. For arbitrary positive integer N and prime odd integer T, the formular of constructing of a magic N-cube of order T, can be derived similarly.

KEY WORDS　magic square; magic N-cube of order T; design of combination



一、定义和记号

称点集

$$A=\left\{(i_0,\ \cdots i_{N-1})\ \middle|\ \begin{array}{l} i_K\in[0,\ T-1] \\ k\in[0,\ N-1]\end{array}\right\}$$为N维T阶点阵或N维T阶超立方体．它是图中所示的三维T阶点阵的推广．称A的子集

$$L=\{i_0,\ \cdots,\ i_{K-1},\ t,\ i_{K+1},\ \cdots,\ i_{N-1})\mid t=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1\}$$

为A的一个直条．若A的点$I=(i_0,\ \cdots,\ i_{N-1})$的坐标非$O$即$T-1$，则称$I$为$A$的一个角顶点．$A$共有$T^N$个点，$2^N$个角顶点．若$A$的一对对角顶点$(i_0,\ \cdots,i_{N-1})$和$(j_0,\ \cdots,\ j_{N-1})$的坐标

本文于1988年3月23日收到

满足$i_K+j_K=T-1$，$K=0,1,\cdots,(N-1)$，则称之为A的一对对角顶点。由A的一对对角顶点确定的A的子集

$$\left\{\left(i_0+\frac{j_0-i_0}{T-1}t,\cdots,i_{N-1}+\frac{j_{N-1}-i_{N-1}}{T-1}t\right)\middle| t=0,1,\cdots,T-1\right\}$$

称为A的一个主对角条。A只有2^{N-1}个主对角条。由于$\frac{j_K-i_K}{T-1}=1$或-1，A的主对角条可分为下列各类：

$$S_+=\{(t,\cdots,t)\mid t=0,1,\cdots,(T-1)\};$$

$$S_1=\left\{(t,\cdots,t,\overset{K}{T-1}-t,t,\cdots,t)\middle| \begin{array}{l}t=0,1,\cdots,T-1\\K=0,\cdots,N-1\end{array}\right\};$$

$$S_2=\left\{(t,\cdots,t,\overset{i}{T-1}-t,t,\cdots,t,\overset{j}{T-1}-t,t,\cdots,t)\middle| \begin{array}{l}t=0,1,\cdots,T-1\\0\leqslant i<j\leqslant N-1\end{array}\right\};\cdots$$

分别称之为全正、一负、二负，……主对角条。适当选取主对角条上一对对角顶点的顺序，总可使主对角条中没有全负主对角条，而且使得任一主对角条的坐标中，t的个数不小于$T-1-t$的个数。于是A的2^{N-1}个主对角条，在N为偶数时，可分为$\frac{N}{2}+1$个类，在N为奇数时，可分为$\frac{N+1}{2}$个类。

若定义在点集A上的函数$a(I)=a(i_0,\cdots,i_{N-1})$满足

（Ⅰ）　$a(\mathrm{I})$的值域为$\{0,1,2,\cdots,T^N-1\}$（共T^N个数）；

（Ⅱ）　$$\sum_{\mathrm{I}\in\text{任一直线}}a(\mathrm{I})=\sum_{\mathrm{I}\in\text{任一主对角线}}a(\mathrm{I})=\frac{T(T^N-1)}{2},$$

则称$a(\mathrm{I})$为N维T阶幻体，称$\frac{T(T^N-1)}{2}$为幻和。

二、关于幻体构造的已有结论

许多文献都已确认下列

定理　对同一N已构作T_1阶幻体A和T_2阶幻体B，则可构作T阶幻体$C(T=T_1\times T_2)$

$$C_i=B_i''\times T_1^N+A_i';\quad i_l'=i_l''+i_l',\quad l=0,1,\cdots,(N-1).$$

因为任一奇数$T(\geqslant 3)$都可分为解为奇素数之积，故由此定理可以推断：

只要能构造N维任意奇素数阶幻体，就能构造N维任意奇数阶幻体。

文〔1〕给出了N维4阶幻体的构造方法。

在已构造出N维t（奇素数）阶幻体的条件下，文〔3〕给出了构造N维$2t$阶幻体的方法。由此又可推断：

只要能构造N维任意奇素数T阶幻体就能构造N维$T=2t$（t奇素数）阶幻体。

三、N维T（奇素数）阶幻体的构造

因为$\forall b \in [0, T^N-1]$，都有

$b=(f_0)_T+(f_1)_T T+\cdots+(f_{N-1})_T T^{N-1}$，$f_i$是正整数。我们将 $a(\mathrm{I})$ 取作

$a(\mathrm{I})=(f_0(\mathrm{I}))_T+(f_1(\mathrm{I}))_T T+\cdots+(f_{N-1}(\mathrm{I}))_T T^{N-1}$，$\mathrm{I}\in A$。为简便起见，我们将$f_i(\mathrm{I})$取作$\mathrm{I}=(i_0,\cdots,i_{N-1})$的线性函数，即

$$a(\mathrm{I})=\sum_{j=0}^{N-1}\Big(\sum_{K=0}^{N-1}b_{jk}+c_j\Big)_T T^j$$

，b_{jk}、c_j整数，要（1）式定义的$a(\mathrm{I})$是N维T（奇素数）阶幻体，只须

（Ⅰ） $I\neq I'\Longrightarrow a(I)\neq a(I')$；

（Ⅱ） $\sum\limits_{I\in\text{任一直条}} a(I)=\sum\limits_{I\in\text{任一主对角条}} a(I)=\dfrac{T(T^N-1)}{2}$

怎样选取

$$B=\begin{vmatrix} b_{00}, \cdots\cdots b_{0N-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{N-1\,0}\cdots\cdots b_{N-1\,N-1}\end{vmatrix} \text{和} C=\begin{vmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_{N-1}\end{vmatrix}$$

才能使$a(I)$满足（Ⅰ）和（Ⅱ）呢？

引理1　设$f(t)=(C_1t+C_2)_T$，若C_1、C_2为整数，且$(C_1, t)=1$，则$f(0)f(1)\cdots f(T-1)$是$\{0, 1, \cdots, T-1\}$的全排列。

引理2　若$(|B|, T)=1$，则$I\neq I'\Longrightarrow a(I)\neq a(I')$。

由此可得

引理3　若$B=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2\end{vmatrix}$，对任意的$C=\begin{vmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_{N-1}\end{vmatrix}$（$C_j$是整数）都有

（Ⅰ） $I\neq I'\Longrightarrow a(I)\neq a(I')$；

（Ⅱ） $\sum\limits_{I\in\text{任一直条}} a(I)=\dfrac{T(T^N-1)}{2}$

（Ⅱ′）之证　对任一直条$L=\left\{(i_0,\cdots,i_{K-1},t,i_{K+1},\cdots,i_{N-1})\ \middle|\ \begin{array}{l} t=0,1,\cdots,T-1 \\ k\in[0,N-1]\end{array}\right\}$和任一$j\in[0,N-1]$都有

$$\sum_{I\in L}\Big(\sum_{l=0}^{N-1}b_{jl}i_l+C_j\Big)_T$$

$$=\sum_{i=0}^{T-1}\left(b_{jk}i+\sum_{l\neq k}b_{jl}i_l+c_j\right)_T$$

$$\xlongequal[(b_{jk},T)=1]{\text{引理 1}}\sum_{i=0}^{T-1}i=\frac{T(T-1)}{2}\text{ 于是}$$

$$\sum_{I\in L}a(I)=\frac{T(T-1)}{2}(1+T+\cdots+T^{N-1})=\frac{T(T^N-1)}{2}$$

（Ⅰ）之证　由$(|B|,T)=1$（$|B|=1$）和引理2立得。

到此，N维T（奇素数）阶幻体的构造问题，已化为确定整数阵$C'=(C_0,\cdots,C_{N-1})$使对任一主对角条S，都有

$$(\text{Ⅱ})\qquad \sum_{I\in S}a(I)=\frac{T(T^N-1)}{2}$$

成立的问题。下面分别$N=6$、7、8、9、……，T为任意奇素数的情况，确定整数阵C'，从而得到6、7、8、9、……维奇素数阶幻体的构造公式。（$N=2$、3、4、5的情况，文〔3〕已讨论过）。

（一）　6维T（奇素数）阶幻体

$$a(I)=\sum_{j=0}^{5}(f_j(I))_T T^j$$

$$\begin{aligned}&=(i_0+i_1+\cdots+i_5+C_0)_T+(i_0+2i_1+i_2+\cdots+i_5+C_1)_T T\\&+(i_0+i_1+2i_2+i_3+i_4+i_5+C_2)_T T^2+(i_0+i_1+i_2+2i_3+i_4+i_5\\&+C_3)_T T^3\\&+(i_0+i_1+i_2+i_3+2i_4+i_5+C_4)_T T^4+(i_0+i_1+i_2+i_3+i_4+2i_5\\&+C_5)_T T^5\end{aligned}$$

的$(f_j(I))_T$在四类主对角条S_+、S_1、S_2、S_3上的表示如表1所示。

表1

j	$(f_j)_T$	$(f_j)_T$在S_+上的表示	$(f_j)_T$在S_1上的表示	(f_j)在S_2上的表示	$(f_j)_T$在S_3上的表示	C_j的值
0	$(i_0+i_1+i_2+i_3+i_4+i_5+C_0)_T$	$(6t+C_0)_T$	$(4t+T-1+C_0)_T$	$(2t+2(T-1)+C_0)$	$(0\cdot t+3(T-1)+C_0)_T$	$T=3$, $C_0=1$, $T\neq3$由$(-3+C_0)_T=\frac{T-1}{2}$确定C_0
1	$(i_0+2i_1+i_2+i_3+i_4+i_5+C_1)_T$	$(7t+C_1)_T$	$(5t+T-1+C_1)_T$ $(3t+2(T-1)+C_1)_T$	$(3t+2(T-1)+C_1)_T$ $(t+3(T-1)+C_1)_T$	$(t+3(T-1)+C_1)_T$ $(-t+4(T-1)+C_1)_T$	$T=7$, $C_1=3$ $T=5$, $C_1=3$ $T=3$, $C_1=3$
2	$(i_0+i_1+2i_2+i_3+i_4+i_5+C_2)_T$	同上	同上	同上	同上	$C_2=3$
3	$(i_0+i_1+i_2+2i_3+i_4+i_5+C_3)_T$	同上	同上	同上	同上	$C_3=3$

续表

4	$(i_0+i_1+i_2+i_3+2i_4+i_5+C_4)_T$	同上	同上	同上	同上	$C_4=3$
5	$(i_0+i_1+i_2+i_3+i_4+2i_5+C_5)_T$	同上	同上	同上	同上	$C_5=3$

因为要(Ⅱ)成立，即对任一主角条S，都有

$$\sum_{I \in S} a(I)=\frac{T(T^N-1)}{2} \Longleftarrow \sum_{I \in S}(f_j(\mathrm{I}))_T=\frac{T(T-1)}{2},$$

$j=0,\cdots,N-1$，于是C_0应是同余式组

$$\sum_{t=0}^{T-1}(6t+C_0)_T=\frac{T(T-1)}{2} \tag{1}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1}(4t+C_0)_T=\frac{T(T-1)}{2} \tag{2}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1}(2t+C_0)_T=\frac{T(T-1)}{2} \tag{3}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1}(0.t+C_0)_T=\frac{T(T-1)}{2} \tag{4}$$

的解。当$T\neq 3$时，由引理1知，(1)－(3)对任意的整数C_0都是成立的，要(4)式成立，只须$(-3+C_0)_T=\frac{T-1}{2}$。故

$T\neq 3$时，C_0由$(-3+C_0)_T=\frac{T-1}{2}$确定。

当$T=3$时，(2)、(3)两式对任意的整数C_0都成立。要(1)式成立，只须$C_0=\frac{3-1}{2}=1$此时，(4)式也成立；于是

$t=3$时，$C_0=1$。

类似地可以确定，只要T为奇素数，都有$C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=3$，这就得到了6维T(奇素数)阶幻体的构造公式。

表2

j	$(f_j(\mathrm{I}))_T$	$(f_j(\mathrm{I}))$在s_0上的表示	$(f_j(\mathrm{I}))_T$在s_1上的表示	$(f_j(\mathrm{I}))_T$在s_2上的表示	$(f_j(\mathrm{I}))_T$在s_3上的表示	C_j的值
0	$(i_0+i_1+\cdots+i_5+C_0)_T$	$(7t+C_0)_T$	$(5t+T-1+C_0)_T$	$(3t+2(T-1)+C_0)_T$	$(t+3(T-1)+C_0)_T$	$C_0=3$
1	$(i_0+2i_1+i_2+\cdots+i_5+C_1)_T$	$(8t+C_1)_T$	$(6t+T-1+C_1)_T$ $(4t+2(T-1)+C_1)_T$	$(4t+2(T-1)+C_1)_T$ $(2t+3(T-1)+C_1)_T$	$(2t+3(T-1)+C_1)_T$ $(2t+4(T-1)+C_1)_T$	$T=3$时，$C_1=2$，$T\neq 3$时，由$(-4+C_1)_T=\frac{T-1}{2}$确定C_1。

续表

2	$(i_0+i_1+2i_2+i_3+\cdots+i_6+C_2)_T$	同上	同上	同上	同上	$T=3$时，$C_2=3$，$T\neq3$时，C_2由$(-4+C_2)_T=\frac{T-1}{2}$确定
3	$(i_0+i_1+i_2+2i_3+i_4+i_5+i_6+C_3)_T$	同上	同上	同上	同上	
4	$(i_0+\cdots+i_3+2i_4+i_5+i_6+C_4)_T$	同上	同上	同上	同上	$T=3$时，$C_j=2$，$T\neq3$时，C_j由$(-4+C_j)=\frac{T-1}{2}$确定，$j=3, 4, 5, 6$
5	$(i_0+\cdots+i_4+2i_5+i_6+C_5)_T$	同上	同上	同上	同上	
6	$(i_0+\cdots+i_5+2i_6+C_6)_T$	同上	同上	同上	同上	

表 3

j	$(f_j)_T$	$(f_j)_T$在s_+上的表示	$(f_j)_T$在s_1上的表示	$(f_j)_T$在s_2上的表示	$(f_j)_T$在s_3上的表示	$(f_j)_T$在s_4上的表示	C_j的值
0	$(i_0+i_1+\cdots+i_7+C_0)_T$	$(8t+C_0)_T$	$(6t+T-1+C_0)_T$	$(4t+2(T-1)C_0)_T$	$(2t+3(T-1+C_0)_T$	$(0.t+4(t-1)+C_0)_T$	由$(-4+C_0)_T=\frac{T-1}{2}$确定C_0
1	$(i_0+2i_1+i_2+\cdots+i_7+C_1)_T$	$(9t+C_1)_T$	$(7t+T-1+C_1)_T$ $(5t+2(T-1)+C_1)_T$	$(5t+2(T-1)+C_1)_T$ $(3t+3(T-1)+C_1)_T$	$(3t+3(T-1)+C_1)_T$ $(t+4(T-1)+C_1)_T$	$(t+4(T-1)+C_1)_T$ $(-t+5(T-1)+C_1)_T$	$T=3$时，$C_1=1$ $T=7,5$时，$C_1=4$ $T=$大于7的奇素数，C_1可为任何整数
2	$(i_0+i_1+2i_2+i_3+\cdots+i_7+C_2)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	
3	$(i_0+i_1+i_2+2i_3+\cdots+i_7+C_3)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	
4	$(i_0+\cdots+i_3+2i_4+\cdots+i_7+C_4)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	$T=3$时，$C_j=1$ $T=7,5$时，$C_j=4$ $T>7$时，C_j可为任何整数 $j=2, 3, \cdots, 7$.
5	$(i_0+\cdots+i_4+2i_5+\cdots+i_7+C_5)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	
6	$(i_0+\cdots+i_5+2i_6+i_7+C_6)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	
7	$(i_0+\cdots+i_6+2i_7+C_7)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	

表 4

j	$(f_j)_T$	$(f_j)_T$在s_+上的表示	$(f_j)_T$在s_1上的表示	$(f_j)_T$在s_2上的表示	$(f_j)_T$在s_3上的表示	$(f_j)_T$在s_4上的表示	C_j的值
0	$(i_0+i_1+\cdots+i_8+C_0)_T$	$(9t+C_0)_T$	$(7t+C_0)_T$	$(5t+C_0)_T$	$(3t+C^0)_T$	$(t+C_0)_T$	$T=3$，$C_0=1$ $T=5$，$C_0=2$ $T=7$，$C_0=3$ $T>7$的素数，C^0可为任何整数
1	$(i_0+2i_1+i_2+\cdots+i_8+C_1)_T$	$(10t+C_1)_T$	$(8t+T-1+C_1)_T$ $(6t+2(T-1)+C_1)_T$	$(6t+2(T-1)+C_1)_T$ $(4t+3(T-1)+C_1)_T$	$(4t+3(T-1)+C_1)_T$ $(2t+4(T-1)+C_1)_T$	$(2t+4(T-1)+C_1)_T$ $(0.t+5(T-1)+C_1)_T$	$T=3$时，$C_1=3$ $T\neq3$时，由$(-5+C_1)_T=\frac{T-1}{2}$确定C_1

续表

2	$(i_0+i_1+2i_2+i_3+\cdots+i_8+C_2)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	
3	$(i_0+i_1+i_2+2i_3+\cdots+i_8+C_3)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	
4	$(i_0+\cdots+2i_4+\cdots+i_8+C_4)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	$T=3$时，$C_j=3$
5	$(i_0+\cdots+2i_5+\cdots+i_8+C_5)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	$T\neq 3$时，C_j由 $(*5+C_j)_T=\frac{T-1}{2}$
6	$(i_0+\cdots+2i_6+i_7+i_8+C_6)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	确定 $j=2、3、\cdots、8$
7	$(i_0+i_1+\cdots+2i_7+i_8+C_7)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	
8	$(i_0+\cdots+i_7+2i_8+C_8)_T$	同上	同上	同上	同上	同上	

（二） 由表 2 可得 7 维T（奇素数）阶幻体的构造公式。

（三） 由表 3 可得 8 维T（（奇素数）阶幻体的构造公式。

（四） 由表 4 可得 9 维T（奇素数）阶幻体的构造公式。

不难看出，对任意的正整数$N\geqslant 2$，和奇素数T，用上述方法，都可构造出N维T阶幻体

$$a(\mathrm{I})=\sum_{j=0}^{N-1}(f_j(\mathrm{I}))_T T^j$$

$$=\sum_{j=0}^{N-1}\Big(\sum_{K=0}^{N-1} b_{jk}i_k+C_j\Big)_T T^j$$

其中，b_{jk}由$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 2\end{pmatrix}$给出，而$C_j$则由$f_j(\mathrm{I}))_T$在$\frac{N}{2}+1$或$\frac{N+1}{2}$类主对角条上的通式都应满足

$$\sum_{I\in S}\Big(\sum_{K=0}^{N-1} b_{jk}i_k+C_j\Big)=\frac{T(T-1)}{2}$$

来确定。

例 由表（1）可得 6 维 3 阶幻体为

$$a(\mathrm{I})=(i_0+i_1+\cdots+i_5+1)_3+(i_0+2i_1+\cdots+i_5+3)_3\,3+(i_0+i_1+2i_2+i_3+i_4+i_5+3)_3 3^2+(i_0+i_1+i_2+2i_3+i_4+i_5+3)_3 3^3+(i_0+i_1+i_2+i_3+2i_4+i_5+3)_3 3^4+(i_0+i_1+i_2+i_3+i_4+2i_5+3)_3 3^5$$

它在各直条和主对角条上的数组分别为

(t, 0, 0, 0, 0, 0)	1	365	726
(0, t, 0, 0, 0, 0)	1	368	723
(0, 0, t, 0, 0, 0)	1	374	717
(0, 0, 0, t, 0, 0)	1	392	699
(0, 0, 0, 0, t, 0)	1	446	645
(0, 0, 0, 0, 0, t)	1	365	726
(t, 1, 1, 1, 1, 1)	2	364	726
(1, t, 1, 1, 1, 1)	6	364	722
(1, 1, t, 1, 1, 1)	18	364	710
(1, 1, 1, t, 1, 1)	54	364	674
(1, 1, 1, 1, t, 1)	162	364	566
(1, 1, 1, 1, 1, t)	486	364	242
(t, 2, 2, 2, 2, 2)	2	363	727
(2, t, 2, 2, 2, 2)	5	366	723
……			
(t, t, t, t, t, t)	1	364	727
(2 − t, t, t, t, t, t)	726	364	2
(t, 2 − t, t, t, t, t)	723	364	5
(t, t, 2 − t, t, t, t)	717	364	11
(t, t, t, t, 2 − t, t)	645	364	83
(t, t, t, t, t, 2 − t)	483	364	245
……			
(2 − t, 2 − t, 2 − t, t, t, t)	703	364	25
……			
(2 − t, 2 − t, 2 − t, t, t, t)	25	364	703
……			

由此可见，各直条和主对角条上诸数之和均为

$$\frac{3\times(3^6-1)}{2}=1092.$$

参 考 文 献

〔1〕 Adler, A. & Shuo-gen Robert Li, Magic Cubes and Prohet sequen Sequences, Amer, Math., 1977, 84: 618

〔2〕 Arkin, J. V. E. Hoggatt & E. G. Straus, System of Magic Latin K-Cubes, Canad. Jour. Math., 1976, 28: 1153

〔3〕 陈沐天，幻体的构作，北京大学学报，1979，(1)