

低阶奇异性边界单元法

A BOUNDARY ELEMENT METHOD WITH LOWER-ORDER SINGULARITY

曾德荣

Zeng Derong

胡国华

Hu Guohua

(重庆交通学院)

(重庆大学)

摘要 本文所提出的低阶奇异性边界单元法, 是以传统的边界单元法为基础, 通过引入一个新的角变量, 致使力的核函数由原来的 $\frac{1}{r}$ 阶奇异性, 降低为与位移核函数一样, 仅具有 $\ln r$ 阶奇异性 (r 是场点与源点之间的距离)。从而推出新的边界积分方程, 该方程具有较低奇异性, 特别是在应力计算时, 基本消除了原边界单元法的“边界层效应”——即原边界单元法在边界层附近的应力不能计算的现象。在本文中, 还将对该新方法所编制的程序用于工程构件——300T 压花机肘杆的强度分析, 其结果与原边界单元法及光弹性实验结果有较好的一致性。

关键词 数值计算; 边界元法; 奇异性

中国图书资料分类法分类号 TB 115

ABSTRACT In this paper, a lower-order singular BEM based on original BEM is presented by introducing a new variable of angle. In the new method, kernel of force is the same as kernel of displacement which is only singularity of $\ln R$ (R is the distance between a source and a field point). Hence, it results in a new BEM formulation, whose singularity is lower than that of the original BEM formulation. What's more, in calculating stress, it eliminates the boundary-layer effect in the main. A software which is based on lower-order singular formulation is used to analysis the bar of 300T coining machine, its result is coincident with that obtained by the original BEM and photo-elastic experiment.

SUBJECT WORDS numerical computation, BEM, singularity

一、引言

边界单元法是以边界积分方程为基础, 借助于计算机, 引入有限元的离散及插值方法的

收文日期 1989年4月29日

本项研究由国家自然科学基金资助。

一种数值方法。边界单元法自60年代末期以来由于Rizzo, Cruse等人的杰出工作，有了巨大的发展，今天边界单元法已广泛用于科学和工程之中，成为一门方兴未艾的学科。

本文以Rizzo^[1]提出的边界积分方程为标准，主要讨论和分析平面弹性力学问题的边界单元法。

二、原边界单元法积分公式

设有平面弹性问题，在区域 Ω 内其控制微分方程：

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0$$

边界条件： $u = \bar{u}$ 在 T_1 上

$$p = \bar{p} \quad \text{在 } T_2 \text{ 上}$$

T 是区域 Ω 的边界， $T = T_1 + T_2$

根据Rizzo的理论，边界点的积分方程：

$$C_{ij}u_j + \int_T p_{ij}^* u_j dT = \int_T u_{ij}^* p_j dT \quad (\text{不计体力}) \quad (1)$$

式中 C_{ij} 为边界影响系数，当边界光滑时：

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

内部任意一点 R 的边界积分方程：

$$u_j^R + \int_T p_{ij}^* u_j dT = \int_T u_{ij}^* p_j dT \quad (2)$$

应力公式：

$$\sigma_{ij} = \int_T D_{kij} p_k dT - \int_T S_{kij} u_k dT \quad (3)$$

式中 u_j^* ， p_j^* 分别称为位移，面力核函数，是方程：

$$E_{ijkl} u_{k,lj} + \delta(x-x_0) \delta_{ij} e_i = 0$$

的基本解， $\delta(x-x_0) \delta_{ij} e_i$ 表示在 x_0 点沿 x_i 方向作用有单位体积力（集中力）。

$$u_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} \{ (3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \} \quad (4)$$

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\{ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \} \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right] \quad (5)$$

而：
$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu)(r_{,i} \delta_{jk} + r_{,j} \delta_{ki} - r_{,k} \delta_{ij}) + 2r_{,i} r_{,j} \bar{r}_{,k} \} \quad (6)$$

$$S_{kij} = \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu)r_{,k} \delta_{ij} + \nu(r_{,i} \delta_{jk} + r_{,j} \delta_{ik}) + \right. \\ \left. - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \} + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + \right. \\ \left. + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (7)$$

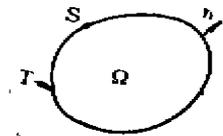


图1

由以上几式我们看出内部任意一点的位移, 应力具有一阶或二阶奇异性。

当 $r \rightarrow 0$ 时, 即内部点 P 比较接近边界点 Q 时, 位移和应力的计算出现误差, 特别是后者, 常因溢出而无法计算, 由于这是在边界附近发生, 可以把这种现象称为“边界层”效应。实际上, 许多工程构件在边界附近(例如圆孔, 槽周围)有较大的应力变化, 正是边界附近的较大应力引起构件的失效, 所以克服边界单元法的这一重要缺陷, 准确计算出边界点附近的应力具有重要的实际意义。

本文的低阶奇异性边界单元法就基本克服了这一缺陷, 消除了边界层效应, 避免了计算难以计算的边界影响系数, 同时, 改善了系数矩阵, 本方法还有公式简单的优点。

三、低阶奇异性边界单元法公式

设有一线弹性的平面应变问题, 定义于单连通区域 Ω 如图 2。

定义: $r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\xi_i - x_i}{r}$$

n_1, n_2 为外法线 n 的方向余弦

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\xi_1 - x_1}{r^2} n_1 + \frac{\xi_2 - x_2}{r^2} n_2 \quad (8)$$

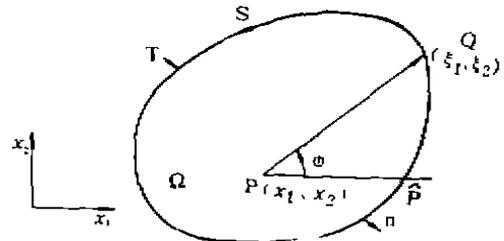


图 2

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\xi_2 - x_2}{\xi_1 - x_1}$$

这里 ϕ 为源点 P 与场点 Q 的连线与过 P 点平行于 x_1 轴的直线的正向所成的角。设该直线与区域边界线的交点为 \hat{P} (当不止一个交点时, 宜选择最远点为 \hat{P}), 显然当 Q 点沿边界曲线移动 (s 方向) 时, 在 \hat{P} 点, 角 ϕ 将不连续, 有从 2π 到 0 的跳跃。

微分方程(8)得:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\xi_1 - x_1}{r^2} n_1 + \frac{\xi_2 - x_2}{r^2} n_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (9)$$

又注意到 $\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} r_{,j} = \frac{\partial f_{ij}(\phi)}{\partial s}$

$$\text{其中 } f_{ij}(\phi) = \frac{1}{2} \phi \delta_{ij} + \frac{1}{4} E_{ij} + \frac{1}{2} E_{iK} \gamma_{,j} \gamma_{,K} \quad (10)$$

利用(9)、(10)及下式:

$$r_{,j} n_i - r_{,i} n_j = E_{ij} \frac{\partial r}{\partial s}$$

$$E_{11} = E_{22} = 0 \quad E_{12} = -E_{21} = 1$$

代入基本解：

$$p_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2(1-2\nu)\delta_{ij} + 2\tau_{,i}\tau_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(\tau_{,i}n_j - \tau_{,j}n_i)$$

得
$$p_{ij}^* = \frac{d}{ds} R_{ij}$$

其中
$$R_{ij} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2(1-\nu)\phi\delta_{ij} + \frac{1}{2} E_{ij} + E_{ik}\tau_{,i}\tau_{,k} + (1-2\nu)E_{ij} \ln r \right]$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j ds &= \int_{\Gamma} \frac{dR_{ij}}{ds} ds = \int_{\Gamma} \dot{u}_i dR_{ij} = \left[u_i R_{ij} \right]_{\Gamma} - \int_{\Gamma} R_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial s} ds \\ \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j ds &= -u_i(\hat{P})\delta_{ij} - \int_{\Gamma} R_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial s} ds \end{aligned} \quad (11)$$

令：
$$W_{ij}^* = -R_{ij} - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} E_{ij}$$

即：
$$W_{ij}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \{ 2(1-\nu)\phi\delta_{ij} + E_{ik}\tau_{,i}\tau_{,k} + (1-2\nu)E_{ij} \ln r \} \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j ds = -u_i(\hat{P}) + \int_{\Gamma} \left(W_{ij}^* + \frac{E_{ij}}{8\pi(1-\nu)} \right) \frac{\partial u_j}{\partial s} ds \quad (13)$$

将(13)式代入(2)式即：

$$u_i + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j ds = \int_{\Gamma} u_j^* p_{ij} ds$$

得低阶奇异性边界单元法任意一点(内部)的位移公式：

$$u_i - u_i(\hat{P}) + \int_{\Gamma} W_{ij}^* \frac{\partial u_j}{\partial s} ds = \int_{\Gamma} u_j^* p_{ij} ds \quad (14)$$

由此，我们可以推出边界点的积分方程：

$$\int_{\Gamma} u_j^* p_{ij} ds = \int_{\Gamma} W_{ij}^* \frac{\partial u_j}{\partial s} ds \quad (15)$$

该公式对于有角点的区域边界仍是适用的，这一点不象原边界单元法积分方程中当边界不光滑时有 C_1 的出现。

对于多连通区域(这里只是一个内孔的情况，多个内孔也是一样)参考点 \hat{P} 总是在外边界 T_0 上， $T = T_0 + T_1$

对于任意一内部点 (P_1)，同样有边界积分方程：

$$u_i(P_1) - u_i(\hat{P}_1) + \int_{\Gamma} W_{ij}^* \frac{\partial u_j}{\partial s} ds = \int_{\Gamma} u_j^* p_{ij} ds$$

但是，对于边界点是不一样的。在边界 T_0 上的 P 仍有方程(15)式，而在边界 T_1 上的点 P ，则有方程：

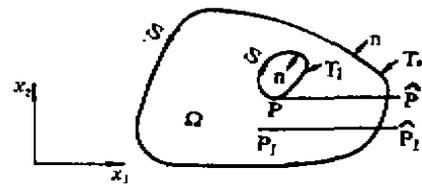


图 3

$$u_i(P) - u_i(\hat{P}) = \int_T u_{i,p}^* ds - \int_T W_{it}^* \frac{\partial u_j}{\partial s} ds \quad (16)$$

这里 \hat{P} 的定义如图 3, \hat{P} 始终是在 T_0 上。

利用内部点的位移公式, 根据下式即可计算出应力公式:

$$\sigma_{ii} = -\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

得:
$$\sigma_{ij} = \int_T D_{K,ij} p_K ds - \int_T S_{Kij}^* \frac{\partial u_K}{\partial s} ds \quad (17)$$

$$S_{Kij}^* = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ 2(1-\nu) \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \phi_{,k} \delta_{ij} + \phi_{,i} \delta_{,k} + \phi_{,j} \delta_{,k} \right) r \right. \\ \left. + (1-2\nu) \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \tau_{,j} \delta_{ik} + \tau_{,i} \delta_{,jk} + \tau_{,i} \delta_{,jk} \right) + E_{km} \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \tau_{,m} \delta_{ij} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\tau_{,m} \delta_{ij} + \tau_{,i} \delta_{mj} + \tau_{,j} \delta_{mi} - 2\tau_{,i} \delta_{,jm} \right) \right\} \quad (18)$$

对于平面应力问题, 只须将式中 ν 用 ν_1 代替:

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1+\nu}$$

在上述公式中, 对区域边界进行离散和插值, 形成边界单元, 其处理与原公式的处理相同, 只不过这里是对 p_i (面力), $\frac{\partial u_j}{\partial s}$ (位移梯度) 插值, 而不再是对面力 p_i 和位移 u_i 插值。

四、算例与应用

(一) 算例: 对图 4 带中心圆孔的方板, 在两端受拉 (单位力) 的情况进行了计算。其中 $L=10$, $a=1$, $E=5.0$, $\nu=0.3$ 。其计算结果如图 5、图 6 及表 1。

从表 1 我们可以看出“边界层”效应基本消除。图 5、图 6 证明新公式是正确的, 这一点还将在下面的实例中进一步得以证实。

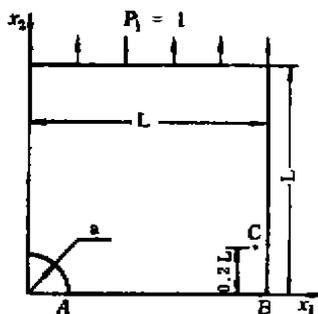


图 4

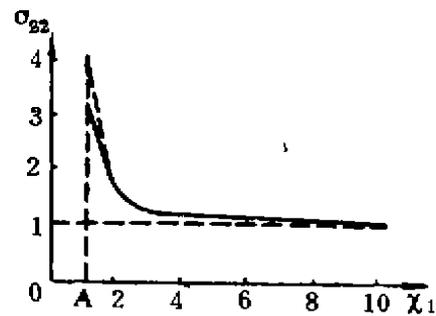


图 5

——新边界元法 - - - 原边界元法

表1 边界层C点应力计算比较

C点坐标 x_1	新方法 σ_{22}	原方法 σ_{22}
9.0000	1.0001	0.9975
9.8000	0.9990	0.9800
9.9500	0.9875	-4.9865
9.9950	0.9247	35.4247
9.9995	7.2245	41.8355

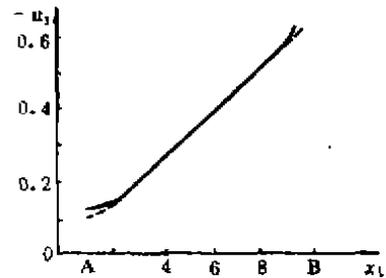


图6

(二) 应用

1. 分析：重庆某钟表厂从日本引进的300T压花机使用不到三年时间里，其时杆发生了两次断裂，本文利用低阶奇异性边界单元法对此构件进行了分析，为了保证计算结果的可靠性，也为了比较出新方法的有效性，对构件还进行了有限元计算，原边界单元法计算及光弹性实验分析。图7为构件示意图。

通过计算分析，构件最大应力发生在大头的1—1剖面，其应力分布图如图8及表2。

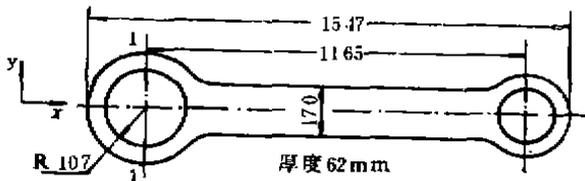


图7

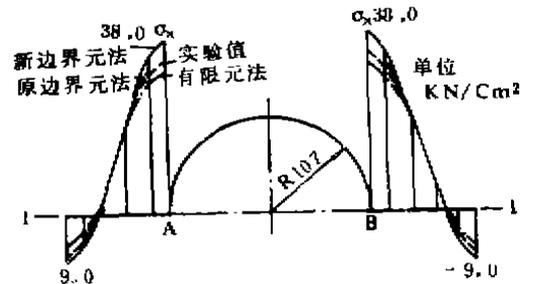


图8

表2 误差分析

计算方法	有限元	原边界单元法		光弹实验	新边界单元法	理论值
		常量	线性			
均匀拉伸应力	13.40	13.95	13.98	14.02	13.95	13.96
与理论值误差	4.01%	0.07%	0.12%	0.40%	0.07%	
最大拉伸应力	33.32	33.97	35.00	35.46	38.00	
与实验值误差	6.03%	4.20%	1.20%		7.16%	

2. 断裂原因分析：由于构件受周期性脉动载荷，我们拟采用静力等效校核，取动荷系数（由现场给定） $k=1.5$ ，构件材料40Cr调质，其强度极限 $\sigma_b=981\text{MN/m}^2$ ，屈服点 $\sigma_s=570\text{MN/m}^2$ ，而构件最大等效应力 σ

$$\sigma = k\sigma_{\text{max}} = 1.5 \times 38.0 = 57.0\text{kN/cm}^2 = 570\text{MN/m}^2$$

$$\sigma_s = \sigma < \sigma_b$$

因此, 我们断定构件为低周疲劳断裂。

五、结 论

(一) 由前面的公式及计算表明, 本文的低阶奇异性边界单元法降低了力的核函数中 r 的奇异性, 即具有 $\frac{1}{r}$ 奇异性的核函数 p_{ij}^* 为仅具有 $\ln r$ 奇异性的核函数 W_{ij}^* 所代替, 从而新方法基本消除了原公式中积分 $\int_{\Gamma} p_{ij}^* u_i ds$ 的强奇异性所带来的误差, 而且新公式的系数矩阵将得以改善。

(二) 即使对于有角点的非光滑边界, 新的边界点的边界积分方程仍没有象原公式中那样出现 C_{ij} , 这就避免了计算 C_{ij} 的麻烦, 且公式显得简单。

(三) 由于 W_{ij}^* 的低奇异性, 相应地导致了应力计算公式中新公式比原公式的奇异性低一阶。因而在计算边界附近的位移, 特别是应力时, 基本上消除了“边界层效应”, 这就使得本方法在分析和计算有应力集中的问题时有重要的实际意义。

参 考 文 献

- [1] Rizzo, F. J., An Integral Equation Approach to Boundary value problems of classical Elastostatics Quarterly of Applied Mathematics, 1967, 25, 83—95
- [2] Mukherjee, S., Boundary Element Methods in Creep and Fracture, Elsevier Applied Science Publishers, England, 1982
- [3] Brebbia, C. A., Boundary Element Techniques theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984