1990年5月 重庆大学学报 Vol.13 No.3
第13卷第3期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY May, 1990

集结降阶方法及其在系统设计中的应用

AGGREGATION METHOD AND ITS APPLICATION IN SYSTEM DESIGN

曹长修 王万良*

Cao Changxiu Wang Wanliang

（重庆大学） （郑州轻工学院）

摘 要 本文提出能保证精确集结简化线性连续、离散系统模型的一种简便方法，而且被应用于系统简化设计，从而简化了控制器和状态观测器结构，而且减少了系统设计的计算量。

主题词 系统设计／模型简化；集结法

中国图书资料分类法分类号 TP11

ABSTRACT A new aggregation method for order-reduction of linear continuous or discrete systems is proposed in this paper. This method is easy for system design and it makes the structure of the controller and the state observer simple. It also reduces the computation of the system design.

SUBJECT WORDS system design/model reduction; aggregation method

一、引 言

集结法模型简化在复杂系统分析、设计方法和计算机在线控制工业过程等方面已有许多应用，结果表明选择合适的集结矩阵是集结法能否成功应用的关键。对于某种特殊的目的和应用，精确集结是非常有用的（Bertrand, 1977; Aoki, 1978）。已有的集结方法中，有的计算量大，有的是用试凑的方法，有的放弃了动态精确性条件[1]。

本文提出一种能保证精确集结的降阶方法，不仅计算量较小，而且能提供一族精确集结矩阵；本文将集结法用于系统设计，不仅减少了设计计算量，而且得到低阶状态反馈增益阵。当只需配置主要极点时，由简化模型设计与由高阶模型设计具有相同效果；本文将集结矩阵结合进状态观测器，得到与简化模型同维的“降阶观测器”，而且没有增加新的误差。文中证明，带有这种状态观测器的闭环系统仍具有“分离特性”。

收文日期 1989年4月24日

*重庆大学自动化系访问学者

二、集结法的基本问题

设线性连续系统的状态空间描述为

$$S_1: \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t)=Dx(t) \quad (2)$$

式中　$x\in R^n$, $y\in R^p$, $u\in R^m$. A、B、D分别为$n\times n$, $n\times m$, $p\times n$常量矩阵。

设简化模型的状态空间描述为

$$S_2: \dot{z}(t)=Fz(t)+Gu(t) \quad (3)$$

$$\tilde{y}(t)=Hz(t) \quad (4)$$

$z\in R^l$, $\tilde{y}\in R^p$, $u\in R^m$, F, G, H分别为$l\times l$, $l\times m$, $p\times l$常量矩阵。

为了使S_2成为S_1的一个集结模型，要求对所有的t均有

$$z(t)=Cx(t) \qquad z(o)=Cx(o) \quad (5)$$

其中C为常数矩阵，令$\text{rank}C=l$。（5）式称为动态精确性要求。已经证明，当且仅当满足矩阵方程

$$FC=CA \quad (6)$$

$$G=CB \quad (7)$$

时才能满足动态精确性要求。一般称式（6）、（7）为动态精确性条件。

若S_1可简约，且不可简约实现的维数为l阶或小于l阶，则当

$$HC=D \quad (8)$$

时将保持输入输出关系不变。即

$$\tilde{y}(t)=y(t) \quad (9)$$

若S_1不可简约，且$l<n$，则由微分方程解的唯一性定理可知，$\tilde{y}(t)$只能是近似输出向量，

即　$$\tilde{y}(t)\approx y(t) \quad (10)$$

或　$$HC\approx D \quad (11)$$

在实际应用中，有重要意义的是寻找简化模型S_2满足式（6）、（7）、（11）。这样的模型一般称为精确集结模型，其中C称为精确集结矩阵。

现有确定｛F，G｝的一大类方法来源于Penrose可解性条件，即

$$F=CAC^T(CC^T)^{-1} \quad (12)$$

$$G=CB \quad (13)$$

但任意选择C（满足$\text{rank}C=l$）后，由式（12）求得的F并不保证满足动态精确性条件（6）。因此这类方法的问题是如何确定合适的C阵。模态集结法如Davison(1966, 1968), Chidambara（1969）的方法计算量大，要计算A阵的特征向量以及由此构成的模态矩阵的逆。很多方法，如Chidambara（1967）以及由Chen和Shieh（1968）首先提出的连分式展开法不能保证精确集结。另一类方法是放弃动态精确性条件，如Aoki（1968）提出的方法。这类

方法的近似性质更难估计。

三、精确集结简化连续模型方法

由式（1）得

$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s) \tag{14}$$

系统的脉冲响应为

$$X(s)=(sI-A)^{-1}B[1\ \ 1\cdots 1]^T_{m\times l} \tag{15}$$

计算式（15）中的$(sI-A)^{-1}$的方法很多，对手算和编程都比较简单的是下列递推算法[2]：

$$(sI-A)^{-1}=adj(sI-A)/det(sI-A) \tag{16}$$

记
$$det(sI-A)=s^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0 \tag{17}$$

$$adj(sI-A)=R_{n-1}S^{n-1}+\cdots+R_1S+R_0 \tag{18}$$

式中a_0，a_1，…，a_{n-1}，R_{n-1}，…．R_0由下列递推公式求

取
$$\begin{array}{ll} R_{n-1}=I & a_{n-1}=-tr(A) \\ R_{n-2}=AR_{n-1}+a_{n-1}I & a_{n-2}=-\frac{1}{2}tr(AR_{n-1}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ R_{n-k}=AR_{n-k+1}+a_{n-k+1}I & a_{n-k}=-\frac{1}{k}tr(AR_{n-k}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ R_0=AR_1+a_1I & a_0=-\frac{1}{n}tr(AR_0) \end{array} \tag{19}$$

记
$$X(s)=[X_1(s)\quad X_2(s)\cdots X_n(s)]^T \tag{20}$$

设系统S_1的特征值为λ_i，$i=1$，2，…，n。则$x(t)$的元素可表示为

$$X_i(t)=L^{-1}[X_i(s)]=\sum_{j=1}^{n}P_{ij}e_j(t) \tag{21}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

当λ_j为单根时，$e_j(t)=e^{\lambda_j t}$，当λ_j为r重根时，$e_j(t)$为$e^{\lambda_j t}$，$te^{\lambda_j t}$，…，$t^r e^{\lambda_j t}$等。

记
$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12}\cdots C_{1n} \\ C_{21} & C_{22}\cdots C_{2n} \\ & \cdots\cdots \\ C_{l1} & C_{l2}\cdots C_{ln} \end{bmatrix} \tag{22}$$

则第i个集结状态$z_i(t)$为

$$z_i(t)=\sum_{k=1}^{n}C_{ik}x_k(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{ik}P_{kj}e_j(t) \tag{23}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$$

不失一般性，设S_2中保留S_1的主特征值λ_i（$i=1, 2, \cdots, l$），则令$z_i(t)$中$e_j(t)$（$j=l+1, \cdots, n$）的系数均为0得

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ik}P_{k,l+1}=0$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ik}P_{k,l+2}=0 \tag{24}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ik}P_{k,n}=0$$

解线性方程组（24）可解出（$n-l$）个元，例如解出$C_{i1}, \cdots, C_{i,n-l}$，记为

$$
\begin{aligned}
C_{i1}&=f_1(C_{i,n-l+1}, \cdots, C_{in})\\
C_{i2}&=f_2(C_{i,n-l+1}, \cdots, C_{in})\\
&\cdots\cdots\\
C_{i,n-l}&=f_{n-l}(C_{i,n-l+1}, \cdots, C_{in})
\end{aligned} \tag{25}
$$

将式（25）代入式（22）得

$$C=[C_1 \vdots C_2] \tag{26}$$

其中

$$C_1=\begin{bmatrix} f_1(C_{1,n-l+1}, \cdots, C_{1n})\cdots\cdots f_{n-l}(C_{1,n-l+1}, \cdots, C_{1n}) \\ f_1(C_{2,n-l+1}, \cdots, C_{2n})\cdots\cdots f_{n-l}(C_{2,n-l+1}, \cdots, C_{2n}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1(C_{l,n-l+1}, \cdots, C_{ln})\cdots\cdots f_{n-l}(C_{l,n-l+1}, \cdots, C_{ln}) \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$C_2=\begin{bmatrix} C_{1,n-l+1} & \cdots\cdots & C_{1n} \\ C_{2,n-l+1} & \cdots\cdots & C_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ C_{l,n-l+1} & \cdots\cdots & C_{ln} \end{bmatrix} \tag{28}$$

式（27）中每一列的函数相同，只是变元不同，所以用相同的函数记号。在式（26）中任意选择C_2的$l \times l$个元，均满足动态精确性条件。

上述过程中很多步骤在具体计算时是不必进行的，后面将举例说明。

四、精确集结简化离散模型方法

随着计算机的飞速发展，很多控制系统要用离散模型描述。象经济、运输、能源、资源管理等方面的复杂系统，也最好用离散模型描述。上述精确集结方法容易推广到离散系统。

设线性离散系统的状态空间描述为

$$S_3 \quad x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \tag{29}$$

$$y(k)=Dx(k) \tag{30}$$

式中$x\in R^n$，$y\in R^p$，$u\in R^m$，A，B，D分别为$n\times n$，$n\times m$，$p\times n$矩阵。

设简化模型为

$$S_2 \quad \omega(k+1)=F\omega(k)+Gu(k) \tag{31}$$

$$\tilde{y}(k)=H\omega(k) \tag{32}$$

式中$\omega\in R^l$，$\tilde{y}\in R^p$，$u\in R^m$，F，G，H分别为$l\times l$，$l\times m$，$p\times l$矩阵。

与连续系统类似，称

$$w(k)=Cx(k) \qquad w(o)=Cx(o) \tag{33}$$

为动态精确性。容易证明（略），动态精确性条件为

$$FC=CA \tag{34}$$

$$G=CB \tag{35}$$

由式（29）得脉冲响应的Z变换式为

$$X(z)=(zI-A)^{-1}B[1\ 1\cdots1]^T_{m\times l} \tag{36}$$

其中$(zI-A)^{-1}$仍可由式（19）求取。

记 $$X(z)=(X_1(z)X_2(z)\cdots X_n(z))^T \tag{37}$$

$$x_i(k)=z^{-1}(X_i(z))=\sum_{j=1}^{n}P_{ij}e_j(k) \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{38}$$

当λ_j为单根时，$e_j(k)=\lambda_j^k$；当λ_j为r重根时，$e_j(k)$为λ_j^k，$k\lambda_j^k$，…，$k^r\lambda_j^k$等。

记C为式（22），则第i个集结状态$w_i(k)$为

$$w_i(k)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}C_{iq}P_{qj}e_j(k) \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l \tag{39}$$

与连续情形思路相同，可得线性方程组（24）其解代入式（26）～（28）即得精确集结矩阵族C，再由式（12）、（13）确定出F和G。

五、集结法在系统设计中的应用

由S_1进行优化设计或极点配置，其计算量无疑是很大的，为减少计算量可由简化模型进行设计，设得到的控制律为

$$u=Kz+v \tag{40}$$

其中v为参考输入，K为反馈增益阵。

已有方法都是将式（5）代入式（40），控制律为

$$u=KCx+v \tag{41}$$

显然，集结法用于系统设计仅减少了设计计算量，而没有简化控制结构。本文取控制律为式（40），而将集结矩阵结合进状态观测器方程，得到与简化模型同维的“降阶观测器”，直接观测出原状态的线性组合$z(t)$，这样，集结法不仅减少了计算量，而且简化了控制结构

和观测器结构。

由S_1设计的全维状态观测器的动态方程为

$$\dot{\hat{x}}=(A-K_{e1}D)\hat{x}+K_{e1}y+Bu \tag{42}$$

设观测$z(t)$的状态观测器的动态方程为

$$\dot{\hat{z}}=W\hat{z}+Py+Qu \tag{43}$$

将式（5）代入式（43），得

$$C\dot{\hat{x}}=WC\hat{x}+Py+Qu \tag{44}$$

由式（42）得

$$C\dot{\hat{x}}=C(A-K_{e1}D)\hat{x}+CK_{e1}y+CBu \tag{45}$$

比较式（44）、（45）得

$$WC=C(A-K_{e1}D)$$

$$\begin{aligned}W&=C(A-K_{e1}D)C^T(CC^T)^{-1}\\&=F-K_{e2}H\end{aligned} \tag{46}$$

$$P=CK_{e1}\triangleq K_{e2} \tag{47}$$

$$Q=CB=G \tag{48}$$

则观测$z(t)$的观测器的动态方程为

$$\dot{\hat{z}}=(F-K_{e2}H)\hat{z}+K_{e2}y+Gu \tag{49}$$

由式（49）可见，可以直接由S_2设计观测$z(t)$的状态观测器，结果相同。

带观测器的状态反馈控制律为

$$u=K\hat{z}+v \tag{50}$$

带观测器的状态反馈系统的动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+BK\hat{z}+Bv\\&=(A+BKC)x-BK(z-\hat{z})+Bv\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}-\dot{\hat{z}}&=C\dot{x}-\dot{\hat{z}}=(CA-K_{e2}D)x-(F-K_{e2}H)\hat{z}\\&=(F-K_{e2}H)(z-\hat{z})\end{aligned} \tag{52}$$

由上式可见，状态观测器的状态渐近收敛到实际状态。

令

$$\tilde{z}=z-\hat{z} \tag{53}$$

则

$$\dot{x}=(A+BKC)x-BK\tilde{z}+Bv \tag{54}$$

$$\dot{\tilde{z}}=(F-K_{e2}H)\tilde{z} \tag{55}$$

或

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\tilde{z}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+BKC & -BK\\ O & F-K_{e2}H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \tilde{z}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B\\ O\end{pmatrix}v \tag{56}$$

由上式可见，带有这种降阶观测器的由简化模型设计的闭环系统仍具有“分离特性”，因此仍可分别设计状态反馈阵K和观测器增益阵K_{e2}。

下面举例说明精确集结简化模型方法，以及状态反馈阵K和降阶观测器的设计方法。

例：电压调节器系统的状态空间描述为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.5 & 1.6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -14.28 & 85.71 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -25 & 75\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\30\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]x$$

A的特征值是-0.2，-0.5，-10，-14.28，-25，前面两个是主特征值，可求二阶集结模型。由式（19）得

$$X(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{5142.6}{(S+0.2)(S+0.5)(S+10)(S+14.28)(S+25)}\\[2ex] \dfrac{10285.2}{(S+0.5)(S+10)(S+14.28)(S+25)}\\[2ex] \dfrac{6428.25}{(S+10)(S+14.28)(S+25)}\\[2ex] \dfrac{75}{(S+10)(S+25)}\\[2ex] \dfrac{1}{S+10}\end{bmatrix}$$

求出所需的部分分式系数

$P_{13}=0.8603953$　　$P_{14}=-0.5776866$　　$P_{15}=0.0526355$

$P_{23}=-16.863743$　　$P_{24}=16.267655$　　$P_{25}=-2.6107219$

$P_{33}=100.1285$　　$P_{34}=-140.10518$　　$P_{35}=39.976679$

$P_{43}=5$　　$P_{44}=0$　　$P_{45}=-5$

$P_{53}=1$　　$P_{54}=0$　　$P_{55}=0$

代入式（24）得

$$P_{13}C_{11}+P_{23}C_{12}+P_{33}C_{13}+P_{43}C_{14}+P_{53}C_{15}=0$$
$$P_{14}C_{11}+P_{24}C_{12}+P_{34}C_{13}+P_{44}C_{14}+P_{54}C_{15}=0$$
$$P_{15}C_{15}+P_{25}C_{12}+P_{35}C_{13}+P_{45}C_{14}+P_{55}C_{15}=0$$

解得

$$C_{13}=-0.005154C_{11}+0.1161103C_{12}$$
$$C_{14}=-0.0224395C_{11}+0.4061864C_{12}$$
$$C_{15}=-0.3353441C_{11}+3.2068144C_{12}$$

则精确集结矩阵族C为

$$C=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & -0.005154C_{11}+0.1161103C_{12}\\ C_{21} & C_{22} & -0.005154C_{21}+0.1161103C_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.0224395C_{11}+0.4061964C_{12} & -0.3353441C_{11}+3.2068144C_{12} \\ -0.0224395C_{21}+0.4061964C_{22} & -0.3353441C_{21}+3.2068144C_{22} \end{bmatrix}$$

若取$C_{11}=C_{22}=1$，$C_{12}=C_{21}=0$，则

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.005154 & -0.0224395 & -0.3353441 \\ 0 & 1 & 0.1161103 & 0.4061964 & 3.2068144 \end{bmatrix}$$

由式（12）、（13）、（11）分别求得

$$F=\begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad G=\begin{bmatrix} -10.06 \\ 96.20 \end{bmatrix} \quad H=(1 \quad 0.1)$$

容易验证$CA=FC$。

由简化模型$\{F, G, H\}$设计状态反馈增益阵K，使闭环极点配置在$-7\pm j7$，有

$$K=[-2.1125 \quad -0.359]$$

容易验证，整个闭环系统的极点为$-7\pm j7$，-10，-14.28，-25。可见，由简化模型设计的状态反馈阵只配置了被控系统的主极点，次极点不变。因此，若次极点位置已满足要求，只需配置主极点到指定位置时，由简化模型设计和由原高阶模型设计效果相同。

由简化模型设计降阶状态观测器K_{e2}，使其极点配置在-10，-14.28，即取观测器期望特征多项式为

$$f^*(s)=(S+10)(S+14.28)=S^2+24.28S+142.8$$

观测器特征多项式为

$$f(s)=S^2+(0.7+K_{e21}+0.1K_{e22})S+(0.1+0.52K_{e22}+0.5K_{e21})$$

令　$f(s)\equiv f^*(s)$

则　$K_{e2}=(-4.27 \quad 278.53)^T$

$$F-K_{e2}H=\begin{bmatrix} 4.07 & 0.927 \\ -278.53 & -28.353 \end{bmatrix}$$

参 考 文 献

〔1〕 Jamshidi, M., Large-scale systems modeling and control, North-Holland, 1983

〔2〕 何关钰：线性控制系统理论，辽宁人民出版社，1982