

三维心电场的计算数学模型和 一种特殊的边值问题

THE THREE-DIMENSIONAL CALCULATING MODEL OF INVERSE PROBLEM
IN ECG AND A SPECIAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM

何 为 谭邦定
He Wei Tan Bangding
(电气工程系)

摘 要 本文主要讨论了分层均匀且各向异性的人体胸腔场域内心电场逆问题的数学模型和有限元模型,其主要涉及了下面内容:1.建立了一种微分型的心电场数学模型,使心电场逆问题可以直接应用数值计算方法求解。2.定义了一类特殊边值问题为不适定边值问题。3.建立了三维分层均匀且各向异性媒质中的心电场逆问题有限元计算公式。4.简要讨论了心电场逆问题的优化解法。

主题词 逆问题; 不适定性问题; 有限单元法; 心电图; 数学模型
中国图书资料分类法分类号 R540.4; TM151.2

ABSTRACT In this paper, the mathematical model and the three-dimensional finite element formulation of inverse problem in electrocardiography (ECG) under a general inhomogeneous and anisotropic configuration of the torso conductor is focused on. The following points are especially considered: 1. The mathematical model is described by a differential equation instead of the Fredholm integral equation. 2. A kind of special boundary value problem is defined as ill-posed boundary value problem. 3. A group of finite element formulation, in which the method that treats anisotropic medium, is built up. 4. The calculating method of ill-posed boundary value problem is discussed.

SUBJECT WORDS inverse problem, ill-posed problem, finite element method, electrocardiography, mathematical model

一、引 言

利用人体表面测量生物电信号逆推体内生物电源的等效数值，是生物医学工程上一项重要的研究课题，被称为逆问题 (Inverse Problem)。目前主要涉及由体表电位图逆向解算心外膜 (epicardic membrane) 上的电位数值及分布。由于心脏电源产生的电信号是经由一个复杂的场域传导到体表，其中不同媒质的影响，由源到场的迭加性，以及传导过程中信号的损失和畸变，使体表测量到的心电信号已严重的失真，信息量也嫌不足。再者目前心脏病变是由体表测量电位目测和经验逆推，使ECG在临床应用上确诊率很低，尤其对局部性病变。所以，应用心电场数学模型和数值计算方法，借助计算机代替人完成由场到源的逆推过程，是ECG无损伤诊断的重要发展方向。

但是，人作为一个复杂生物体，要完成这种逆向求解，首先就必须建立较准确的心电场计算数学模型。过去，一些文献曾对心电场的数学模型做了描述^[1-2]，但多为做了大量简化的解析算法模型。近年，由于计算机以及数值计算方法在生物医学中应用逐渐增多，许多重要的生物数学模型都必须修改乃至重建。本文的主旨就是根据人体胸腔的解剖结构和心电场的分布特点，建立一种新的心脏电场数学模型和计算模型。鉴于本文建立的数学模型的特殊性，还新补充定义了一种电磁场理论中未见描述的特殊边值问题，并提出了相应优化解法。

二、人体心电场微分数学模型

(一) 人体胸腔场域模型

图1为解剖上的人体胸腔结构。根据目前国外采用的胸腔场域模型以及作者的简化，图2所示的分层均匀媒质胸腔模型认为是较符合实际

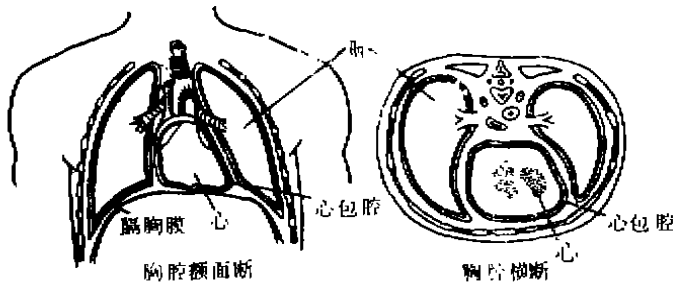
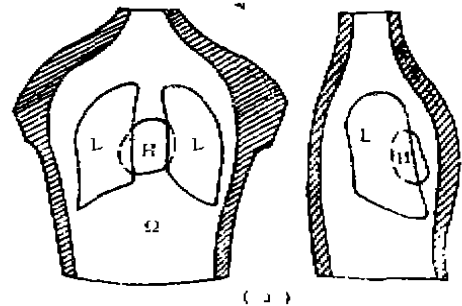


图 1

图 2

的仿真模型^[3]。图中L为肺组织，H为心脏，阴影区为各向异性肌肉层，余下场域均为体液。

$\{\sigma_1\}$ ——各向异性肌肉层电导率张量；

σ_2 ——肺组织电导率；

σ_3 ——体液电导率。

(二) 心电场数学模型

从数学上讲, 由场解源的基本数学模型是积分方程。到目前为止, 国外从事此项研究都是采用具有退化核的第一类Fredholm方程^[3-4]。但是, 积分方程在应用于计算复杂场域时, 其方法复杂, 适用范围狭小。所以, 本文对图2所示场域内的逆问题采用了一种微分型数学模型, 使心电场逆问题能够直接用边值问题的数值解法。

从电磁理论可知, 无源区域内, 场函数是由代表域外场源的心外膜等效电位产生的。据此, 我们首先把这种源的效果转化为下面边界条件:

$$u|_{S_H} = E(x, y, z) \quad (x, y, z) \in S_H \quad (1)$$

这个边界条件包含的是一个未知函数。

在 Ω 内, 位函数 u 满足Laplace方程:

$$\nabla \cdot \{(\tilde{\sigma}) \nabla u(p)\} = 0 \quad p \in \Omega \quad (2)$$

此处 $(\tilde{\sigma})$ 为非均匀导体 Ω 内的电导率, 它在不同媒质里取值不同。

在 S_B 上, 由于空气绝缘性, 电流密度法向分量为零:

$$J_{Bn} = 0 \quad (3)$$

或写为:

$$\vec{n}_B \cdot \{(\tilde{\sigma}) \nabla u\}|_{S_B} = 0 \quad (4)$$

由于逆问题中有一个边界条件是虚设的(即式(1)), 必须补充一个边界条件才能构成边值问题。根据体表电位的可测性, 补充条件:

$$u|_{S_B} = u_B(x, y, z) \quad (x, y, z) \in S_B \quad (5)$$

在内部各媒质分界面 S_L 和 S_B' 上, 有:

$$u_1|_{S_B'} = u_3|_{S_B'} \quad (6)$$

$$u_2|_{S_L} = u_3|_{S_L} \quad (7)$$

$$(\tilde{\sigma}_1) \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{S_B'} = \sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} \Big|_{S_B'} \quad (8)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{S_L} = \sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} \Big|_{S_L} \quad (9)$$

作为衔接条件。综上所述, 描述心电场场源关系的微分数学表达式为下列边值问题:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \{(\tilde{\sigma}) \nabla u = 0 \\ \vec{n}_B \cdot \{(\tilde{\sigma}_1) \nabla u\}|_{S_B} = 0 \\ u|_{S_B} = u_B(x, y, z) \\ u|_{S_H} = E(x, y, z) \end{cases} \quad (10)$$

再加上衔接条件(6)、(7)、(8)、(9),

三、一种特殊边值问题及解的存在性

前节推导的描述心电场源关系的边值问题中，由于边界函数的特殊给定方式使它区别于常规电磁场的三类经典边值问题。下面我们详细分析它的特点及可解条件。

图3在人体胸腔场域上给出了四种边界函数，根据它们的不同组合，可以获得六类不同的边值问题（见表1），前面四种为经典的边值问题，后面两种则在传统理论上认为是无解的。无解的原因为：

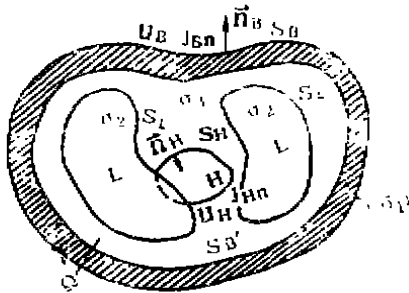


图 3

表 1

编 号	1	2	3	4	5	6
边界条件						
已知边界函数	u_B	J_{Bn}	u_B	J_{Bn}	u_B	u_H
	u_H	J_{Hn}	J_{Hn}	u_H	J_{Bn}	J_{Hn}
未知边界函数	J_{Bn}	u_B	u_H	u_B	u_H	u_B
	J_{Hn}	u_H	J_{Bn}	J_{Hn}	J_{Hn}	J_{Bn}

(一)经典电磁理论认为，如果边界上给定了第一类边界条件，就不能再任意给定第二类边界条件，否则不相容，其问题无解。

(二)由于内边界（或外边界）上的边界条件为虚设，其边界上的约束条件数不够。

但是，在实际工程中，常常要求我们求解表1中所列的第五类非经典边值问题，如地质中的磁电法勘探^[5]和心电场逆问题等。虽然它们已经作为实际问题提了出来，但由于悖于经典电磁理论，被认为不能用经典边值问题求解。

然而，认为边值问题五、六无解的原因一是建立在边界条件具有数学上的任意性。但是，对特定的实际问题，边界条件并不一定就具有这种任意性。如心电场逆问题， u_B 是一个确定的可测函数，它与 J_{Bn} 是由同一心脏电源产生的位和场函数，它们自然蕴含着相互联系，不是相互独立的。所以，若对表中的两类非经典边值问题予以限制，其不相容性是可以消除的：

1. 场域 Ω 由线性媒质组成。
2. 场域内部无源。
3. u_B 和 J_{Bn} 不是任意给定，而是由等效替代心电源的 u_H 唯一产生，由边界 S_B 上测量获得，它们三者之间自然蕴含着相互联系。

但是，消除了边界条件的不相容并不意味着这种特殊边值问题能够用常规方法求解。因为边界条件约束数不够，这种特殊边值问题即使能够求解，其求解条件也是十分恶劣。实际上表1所列的两类非经典边值问题从数学上讲是属于不适定性问题（ill-posed problem）^[6]，它们呈现的特殊性质必须用特殊的解法。鉴于这种不适定性，本文定义表1所列的两类非经典边值问题为不适定性边值问题，其解法将在后面引入了数值计算模型后再讨论。

四、人体胸腔三维电流场的有限元模型

对较复杂的场域内的场计算，一种有效的方法为有限元法。本文讨论的不适定边值问题由于一部分边界函数不确定，能量泛函无法获得，故尔采用加权余量法求取有限元方程。

对图2所示场域内电场方程组(10)取其加权余量积分：

$$R_n = \int_{\Omega} W_n \cdot \nabla \cdot ((\tilde{\sigma}) \nabla u) d\Omega + \int_{S_B} \overline{W}_n \cdot \vec{n}_B \cdot ((\tilde{\sigma}) \nabla u) dS + \int_{S_H} \overline{\overline{W}}_n \cdot (u - \tilde{u}) dS \quad (11)$$

$W_n, \overline{W}_n, \overline{\overline{W}}_n$ ——加权函数；
 $u|_{S_H}$ ——心外膜电位数值解；
 $\tilde{u}|_{S_H}$ ——心外膜电位理论解。

由向量恒等式变换，式(11)可写为：

$$R_n = - \int_{\Omega} \nabla W_n \cdot ((\tilde{\sigma}) \nabla u) d\Omega + \int_{S_B} (W_n + \overline{W}_n) \cdot \vec{n}_B \cdot ((\tilde{\sigma}) \nabla u) dS + \int_{S_H} W_n \cdot \vec{n}_H \cdot ((\tilde{\sigma}) \nabla u) dS + \int_{S_H} \overline{\overline{W}}_n \cdot (u - \tilde{u}) dS \quad (12)$$

令 $W_n + \overline{W}_n = 0$

$$u|_{S_H} = \tilde{u}|_{S_H}$$

则： $R_n = - \int_{\Omega} \nabla W_n \cdot ((\tilde{\sigma}) \nabla u) d\Omega + \int_{S_H} W_n \cdot \vec{n}_H \cdot ((\tilde{\sigma}) \nabla u) dS \quad (13)$

将连续的场域 Ω 离散为 e_n 个单元、 N_n 个节点，则余量函数 R_n 可以近似地表达为各个单元 e 中的余量函数之和：

$$R_n \approx \sum_{e=1}^{N_n} e_n \quad (14)$$

若把每个单元内的电位函数近似地用各节点位函数值的插值函数表示：

$$u' = \sum_{i=1}^{N_n} N_i u_i \quad (15)$$

由Galerkin有限元法则，取权函数 W_n 与各点的插值函数一致：

$$W_n = N_n \quad (n=1, 2, 3, \dots, N_n) \quad (16)$$

再令每个离散单元内的余量函数经加权平均后的和式为零，即：

$$R_n = \sum_{e=1}^{N_n} e_n = 0 \quad (17)$$

我们可以获得下面有限元方程式:

$$\sum_{i=1}^8 \left[\int_{\Delta V_e} \nabla N_i \cdot (\tilde{\sigma}) \nabla N_j u_j d\Omega \right] = \sum_{i=1}^8 \left[\int_{\Delta S_H} (\tilde{\sigma}) N_i \frac{\partial N_i}{\partial n} u_i dS \right] \quad (18)$$

($i = 1, 2, 3, \dots, 8$; $j = 1, 2, 3, \dots, 8$)

下面,我们就单元所处媒质的性质和是否与心外膜相关联这两个条件,推导三种形式的有限单元矩阵方程.

(一)与心外膜相关联的单元

与心外膜相关联的单元是处于媒质 σ_3 中.这类单元的有限元方程可以由(18)演化为:

$$\int_{\Delta V_e} \nabla N_i \cdot \sigma_3 \nabla N_j u_j d\Omega = \int_{\Delta S_H} \sigma_3 N_i \frac{\partial N_i}{\partial n} u_i dS \quad (19)$$

($i = 1, 2, 3 \dots 8$; $j = 1, 2, 3 \dots 8$)

如果就图4所示的单纯形坐标(ξ, η, ζ)下讨论此类单元方程,那它与整体坐标(x, y, z)构成下列关系:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \quad (20)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \quad (21)$$

$$z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i \quad (22)$$

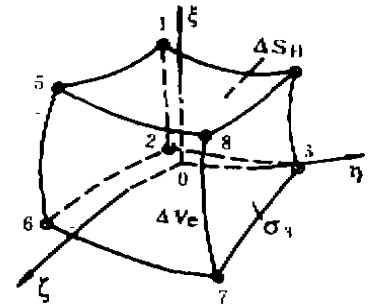


图 4

此式中 x_i, y_i, z_i 分别为节点 i 的整体坐标值, N_i 为该点的插值形函数,用单纯形坐标表示为:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (23)$$

在式(19)中,右端项为一个曲面积分,它的插值函数实际是二维的,与 N_i 有下面关系:

$$p_n = N_n |c_{n-1}| \quad (n = 1, 2, 3, 4) \quad (24)$$

所以,我们可以把式(19)写为矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{81} & K_{82} & \dots & K_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{14} & 0 & \dots & 0 \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{24} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{41} & P_{42} & \dots & P_{44} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_8 \end{pmatrix} \quad (25)$$

式中:

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma_3 \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] |J| d\xi d\eta d\zeta$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, 8; j = 1, 2, 3, \dots, 8) \quad (26)$$

$$P_{i,j} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma_3 P_i \frac{\partial P_j}{\partial n} |G| d\xi d\eta \quad (27)$$

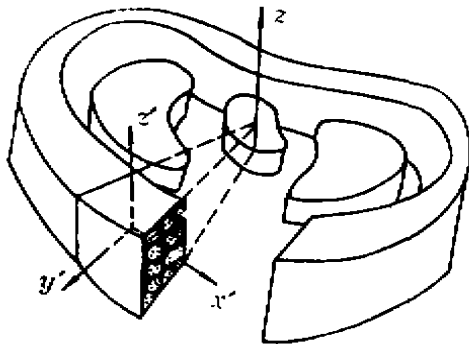


图5

$$(n = 1, 2, 3, 4; m = 1, 2, 3, 4)$$

$|J|$ 和 $|G|$ 分别为三维和二维Jacobi矩阵。

(二)与心外膜无关且各向同性的单元

由方程(18)可知,这类单元与 S_H 无关,故右端项为零,单元方程可写为:

$$[K_{ij}][u_j] = 0 \quad (28)$$

其 K_{ij} 的求法与式(26)相同。

(三)各向异性肌肉层内的单元

如图5所示肌肉单元的电导率在局部坐标 (x', y', z') 下可以表示为下面的正交各向异性形式:

$$[\tilde{\sigma}'_i] = \begin{pmatrix} \sigma_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z'} \end{pmatrix} \quad (29)$$

且 $\sigma_{y'} = \sigma_{z'}$

但是,这种局部坐标下的正交各向异性在整体坐标 (x, y, z) 下则不再是正交各向异性。下面我们就图5所示的两个坐标系推导整体坐标下电导率表达式。

(x, y, z) 与 (x', y', z') 有下列关系:

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta \quad (30)$$

$$y' = -x \sin\theta + y \cos\theta \quad (31)$$

$$z' = z \quad (32)$$

整体坐标下的电导率与局部坐标下的电导率有:

$$[\tilde{\sigma}_i] = T^{-1}[\tilde{\sigma}'_i]T \quad (33)$$

T 为变换矩阵:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

变换后的电导率矩阵为:

$$[\tilde{\sigma}_i] = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z'} \end{pmatrix} \quad (35)$$

式中,

$$a = \sigma_{x'} \cos^2\theta + \sigma_{y'} \sin^2\theta \quad (36)$$

$$b = (\sigma_{x'} - \sigma_{y'}) \sin\theta \cos\theta \quad (37)$$

$$c = \sigma_{x'} \sin^2\theta + \sigma_{y'} \cos^2\theta \quad (38)$$

在肌肉层的单元矩阵方程可写为:

$$[K'_{ij}](u_j) = 0 \quad (39)$$

式中:

$$K'_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ a \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + b \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] + c \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \sigma_r \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} |J| d\xi d\eta d\xi \quad (40)$$

($i = 1, 2, 3, \dots, 8; j = 1, 2, 3, \dots, 8$)

经过上面三类单元分析, 总体合成可以得到下列矩阵方程

$$\begin{pmatrix} K_{BB} & K_{BI} & 0 \\ K_{IB} & K_{II} & K_{IH} \\ 0 & K_{HI} & K_{HH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_B \\ u_I \\ u_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_B \\ u_I \\ u_H \end{pmatrix} \quad (41)$$

u_B 、 u_I 、 u_H 分别代表体表、中间媒质, 心外膜上的节点电位分块矩阵, 而 P 为式 (18) 中的右端项系数矩阵, 最终可与 u_H 的系数矩阵合并。

五、不适定边值问题的优化算法

不适定边值问题是电磁场中新引入的概念, 下面我们先从数学上认识它的特点。

(定义 1) 若原始资料 (测量值或计算值) u 为解 z 的函数:

$$z = R(u) \quad u \in v, z \in F \quad (42)$$

如果 z 满足

1. 对所有 $u \in v$ 的元素均有空间 F 的解 z 。
2. 其解 z 被 u 唯一确定。
3. $R(u)$ 在空间偶 (F, v) 上是稳定的。

则由 v 空间的 u 确定 F 空间的 z 的问题称为在度量空间偶 (F, v) 上是适定的, 否则就是不适定⁽⁶⁾。

前节推导的不适定边值问题有限元方程组 (41) 就不满足适定性的条件 2、3, 所以它的解曲线有下列特点:

把方程 (41) 移项整理写为:

$$[A] \begin{pmatrix} u_I \\ u_H \end{pmatrix} = [B](u_B) \quad (43)$$

或写为:

$$Ax = \tilde{u} \quad (44)$$

当上式右端测量项 \tilde{u} 的近似值为 u_s , 准确值为 u_T 时, 它们之间的误差满足:

$$\rho_s(u_s, u_T) \leq \delta \quad (45)$$

若用 $Ax = u_s$ 代入上式, 则式 (45) 可写为:

$$\rho_s(Ax, u_T) \leq \delta \quad (46)$$

所以, 方程 (44) 的自然近似解必然是在满足不等式 (46) 中的元素 z 的集合 Q_δ 中去找

对适定性问题，可以唯一地找到一条解曲线 \tilde{z} ，使不等式(46)成立，但是，对不适定性问题， Q_0 中包含这样一些曲线，它们彼此相差很大，但又都满足不等式(46)。所以，对于不适定性问题只存在最优解，不存在唯一解。

一般求解不适定问题有两种方法，一种为选择法，一种为正则法^[1]。本文是应用正则法求解，具体步骤简述如下：

按拉格朗日不定因子法构成泛函：

$$M^{\alpha}(z, \tilde{u}, A) = \|Ax - \tilde{u}\|^2 + \alpha \|z - z^1\|^2 \quad \alpha > 0 \quad (47)$$

式中 α 为正则算子，它是一个恒为正的阻尼因子，由 $\|Ax^{\alpha} - \tilde{u}\| = \delta$ 决定其值。

对上述泛函求极小值，最终就演化为阻尼最小二乘法(Damped least-square method)：

$$(A^T A + \alpha I)z = A^T \tilde{u} \quad (48)$$

利用上式即可对方程(44)求解。此法具体计算效果可参阅文献(7-8)。

参 考 文 献

- [1] Nelson, C. V. ; The theoretical basis of electrocardiology, England : Oxford, 1976
- [2] Geselowitz, D. B., On bioelectric potentials in an inhomogeneous volume conductor, Biophys, 1967, 63(7) : 154
- [3] Yasuo Yamashita, Use of the finite element method to determine epicardial from body surface potentials under a realistic torso model, IEEE Trans Biomed Eng. 1984, 31(9) : 854
- [4] Plikington, T. C., The effects of thoracic inhomogeneities on the relationship between epicardial and torso potentials, IEEE Trans Bioned Eng., 1986, 33(3) : 321
- [5] 何宝侃：地球物理反问题中的最优化方法，北京：地质出版社，1980
- [6] A. H. 吉洪诺夫，不适定问题的解法，北京：地质出版社，1979
- [7] 何为等，二维非均匀各向异性心电场正问题和反问题的有限元计算，生物医学工程学杂志，1989, 6(3) : 157
- [8] 何为等，一种高阶插值边界单元法及其在人体生物电场计算中的应用，生物数学学报，1988, 3(2) : 147