

# 多刚体离散方法在圆环振动分析中的应用

THE APPLICATION OF MULTIBODY DISCRETE METHOD IN RING'S  
VIBRATION ANALYSIS

殷学纲 王亚

Yin Xuegang Wang Ya

(工程力学系)

**摘 要** 本文论述了圆环的多刚体离散模型, 推导出了圆环平面几何非线性振动方程。通过和有限元方法和集中质量法的比较可以看出本方法的正确性及优越性。最后具体求出了圆环的动特性值及前九阶振型, 并计算出了圆环强迫几何非线性振动的位移响应。

**主题词** 圆环; 振动; 非线性分析/多刚体方法

中国图书资料分类法分类号 TH113.1; O327; O313.3

**ABSTRACT** A ring's multibody discrete model is discussed in this paper. The ring's plane geometric nonlinear vibration equations are derived. Compared with the finite element and lump mass methods, this method is better. In the last part of the paper, the eigenvalues, the first 9 modes of the ring, the geometric nonlinear dynamic responses of the ring are calculated.

**SUBJECT WORDS** circular ring; vibration; nonlinear / multibody method

## 一、引 言

圆环是常见的工程结构, 通常对圆环进行静力或动力分析需用分析方法或有限元方法, 这两种方法对于圆环的非线性分析—包括几何非线性与材料非线性—是比较困难的。使用有限元进行非线性动力分析时, 由于没有考虑单元的转动惯量的影响, 不得不将结构分成足够的单元, 取相当小的时间步长, 并用增量迭代法, 这样就使得计算工作量比较大。

对结构使用多刚体离散方法, 并由此建立结构的多刚体—弹簧—阻尼系统模型, 对结构进行静力或动力分析, 是一个正在探索的课题。在国外, R.L.Huston等人(见[1—4])已成功地解决了链、悬索等的大振动。日、英等国的学者已解决了岩土结构的滑移(滑坡)以及管道碰撞时的大变形等问题。与非线性有限元方法相比, 多刚体离散方法有其独特的优越

收文日期 1989年6月30日

性。在国内，我们用这种方法已解决了梁、拱结构的几何非线性振动问题（见〔5,6〕），及梁、柱的屈曲，后屈曲问题（见〔7,8〕）。本文则是使用这种方法解决圆环的几何非线性振动问题。

用多刚体方法进行结构分析的基本思想是：首先将结构进行多刚体离散化处理，建立结构的多刚体—弹簧—阻尼系统的离散模型，然后，用多刚体动力学的方法建立该离散化模型的动力学方程，最后进行数值求解。由这样的离散化模型所得到的系统动力学方程，对结构的变形大小没有限制，而材料的非线性，则反应在离散的非线性单元弹簧的弹性系数上。这样的系统动力学方程（舍去变化的阻尼矩阵与质量矩阵，就是系统的静力学方程）对结构的线性小变形，材料非线性与几何非线性具有通用性，而对其数值求解，可用现行的求解多自由度非线性系统微分方程的数值方法进行。由最后的算例可以看出，特别是进行非线性分析，多刚体离散方法具有比有限元法简单，所费机时少的优点。

## 二、圆环的多刚体—弹簧系统模型

本节我们讨论在平面内变形的圆环的多刚体—弹簧系统模型，结构阻尼暂不考虑。研究如图 1 (a) 所示的均质，等截面圆环， $\delta \ll r$ ，在这种情况下，圆环的变形主要是弯曲变形。把圆环分为  $n$  个等长的直线型小段，把每一个小段视为一个“单元刚体”，而在单元刚体之间则以光滑铰链和弯曲单元弹簧相连，若要考虑结构振动时的阻尼，则可在单元刚体之间增加单元阻尼元件。单元刚体长度： $l = 2\pi r/n$ ；单元弹簧刚度系数： $K_s = nEI/2\pi r$ ，设圆环的截面积为  $A$ ，则单元体的质量和对质心的惯性矩分别

为： $m_s = \rho A l e$ ， $I_{cs} = \frac{1}{12} m_s e l^2$ ， $\rho$  为圆环密度。

设  $i$  单元刚体的轴线与  $x_1$  轴的夹角为  $\varphi_i$ ，初始未变形时为  $\varphi_i^0$ ， $x_{i1}$  和  $x_{i2}$  表示  $i$  单元刚体的质心坐标，则

$$x_1 = l \cdot \tilde{L} \cos \varphi \quad (1)$$

$$x_2 = l \cdot \tilde{L} \sin \varphi \quad (2)$$

其中：

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1/2 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1/2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$$

$$x_1 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})^T$$

$$x_2 = (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2})^T$$

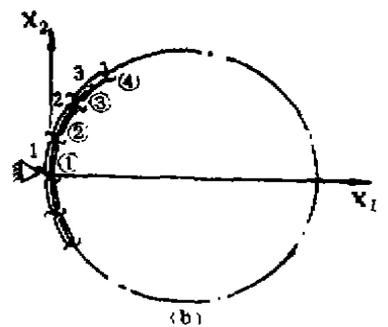
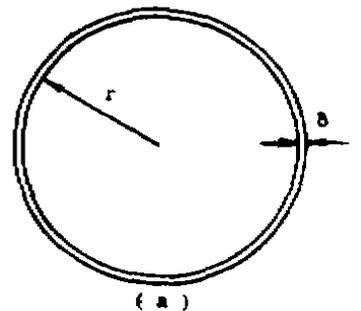


图 1

### 三、圆环的多刚体模型的动力学方程

本节我们用矩阵方法建立圆环的多刚体模型的动力学方程。图2中各符号的意义为：

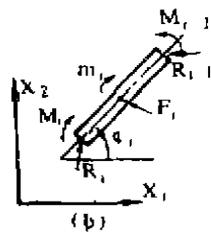
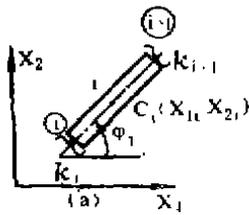


图2

$M_i$ 为第*i*个单元弹簧所产生的弹簧恢复力矩。

$$M_i = K_i (\theta_{i+1} - \theta_i)$$

其中： $\theta_i = \varphi_i - \varphi_i^0, i = 1, 2, \dots, n, \theta_{n+1} = \theta_1$

$F_i, R_i$ 为作用于第*i*个单元的主动力和对于质心的主矢和  
作用于第*i*个铰链处的约束反力，它们在 $x_1, x_2$ 轴下的分量  
分别为 $F_{ix_1}, F_{ix_2}, R_{ix_1}, R_{ix_2}$ 。 $m_i$ 为作用于第*i*个单元刚体  
上的主动力对质心的主矩。

对于第*i*个单元刚体，可写出其动力学方程为：

$$m_i \ddot{x}_{i1} = F_{ix_1} + N_{ix_1} \quad (3)$$

$$m_i \ddot{x}_{i2} = F_{ix_2} + N_{ix_2} \quad (4)$$

$$I_{ci} \ddot{\theta}_i = K_i (\theta_{i+1} - \theta_i) + m_i \quad (5)$$

其中： $N_{ix_1} = R_{(i+1)x_1} - R_{ix_1}; N_{ix_2} = R_{(i+1)x_2} - R_{ix_2}$

将上面三式合写成变分形式的一个方程式：

$$\delta x_{i1} (m_i \ddot{x}_{i1} - F_{ix_1} - N_{ix_1}) + \delta x_{i2} (m_i \ddot{x}_{i2} - F_{ix_2} - N_{ix_2}) + \\ \delta \theta_i (I_{ci} \ddot{\theta}_i - K_i (\theta_{i+1} - \theta_i) - m_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

写成矩阵形式可得：

$$\delta \underline{x}_1^T (m_i \ddot{\underline{x}}_1 - \underline{F}_{x_1} - \underline{N}_{x_1}) + \delta \underline{x}_2^T (m_i \ddot{\underline{x}}_2 - \underline{F}_{x_2} - \underline{N}_{x_2}) + \\ \delta \theta^T (I_{ci} \ddot{\theta} + \underline{K} \theta - \underline{m}) = 0 \quad (6)$$

式中： $\underline{F}_{x_1} = (F_{1x_1}, F_{2x_1}, \dots, F_{nx_1})^T$

$\underline{F}_{x_2} = (F_{1x_2}, F_{2x_2}, \dots, F_{nx_2})^T$

$\underline{N}_{x_1} = (N_{1x_1}, N_{2x_1}, \dots, N_{nx_1})^T$

$\underline{N}_{x_2} = (N_{1x_2}, N_{2x_2}, \dots, N_{nx_2})^T$

$\underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$



$$= \begin{pmatrix} n-\frac{5}{4} & n-\frac{5}{2} & n-\frac{5}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ & n-\frac{7}{4} & n-\frac{5}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ & & n-\frac{11}{4} & \cdots & \frac{1}{2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \frac{1}{4} \\ & & & & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{n \times n}$$

对称

对于圆环的多刚体模型， $\theta$  不是独立的广义坐标，其间存在两个约束：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \sin \varphi_j = 0 \\ \sum_{j=1}^n \cos \varphi_j = 0 \end{cases} \quad (13)$$

对(13)式求变分，并写成矩阵形式可得：

$$\tilde{J}_j \delta \theta = 0 \quad (14)$$

式中：
$$\tilde{J}_j = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \cos \varphi_2 & \cdots & \cos \varphi_n \\ \sin \varphi_1 & \sin \varphi_2 & \cdots & \sin \varphi_n \end{pmatrix}^{2 \times n}$$

若选择  $q = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-2})^T$  为独立的广义坐标，则可建立如下的虚位移关系式：

$$\begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{O} \\ \tilde{J}_{j_1} & \tilde{J}_{j_2} \end{pmatrix} \delta \theta = \begin{pmatrix} \delta q \\ \underline{O} \end{pmatrix} \quad (15)$$

式中： $\underline{I}$  是  $n \times n$  单位阵； $\underline{O}$  是  $(n-2) \times 2$  零阵。

$\underline{O}$  是  $1 \times 2$  零列阵；

$$\tilde{J}_{j_1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \cos \varphi_2 & \cdots & \cos \varphi_{n-2} \\ \sin \varphi_1 & \sin \varphi_2 & \cdots & \sin \varphi_{n-2} \end{pmatrix}^{2 \times (n-2)}$$

$$\tilde{J}_{j_2} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{n-1} & \cos \varphi_n \\ \sin \varphi_{n-1} & \sin \varphi_n \end{pmatrix}^{2 \times 2}$$

由(15)式可求得：

$$\delta \theta = \underline{D} \delta q \quad (16)$$

式中：

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \underline{I} \\ \tilde{J}_{j_1}^{-1} & \tilde{J}_{j_2}^{-1} \end{pmatrix}^{(n-2) \times n} \quad (17)$$

将(16)式代入(12)式,并根据 $\delta q^T$ 的独立性可得:

$$\underline{D}^T (\underline{\mu} \ddot{\underline{\theta}} + \underline{\xi} \dot{\underline{\theta}} + \underline{K} \underline{\theta} - \underline{\Phi}) = \underline{O} \quad (18)$$

由(13)式对时间求两阶导数并写成矩阵形式可得:

$$\underline{J}_1 \ddot{\underline{\theta}} + \underline{J}_2 \dot{\underline{\theta}} = \underline{O} \quad (19)$$

将(19)式与(18)合并写成一个方程组可得圆环振动应满足的动力学方程式:

$$\underline{\mu}^* \ddot{\underline{\theta}} + \underline{\xi}^* \dot{\underline{\theta}} + \underline{K}^* \underline{\theta} = \underline{\Phi}^* \quad (20)$$

式中:

$$\underline{\mu}^* = \begin{pmatrix} \underline{D}^T \underline{\mu} \\ \underline{J}_1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\xi}^* = \begin{pmatrix} \underline{D}^T \underline{\xi} \\ \underline{J}_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{K}^* = \begin{pmatrix} \underline{D}^T \underline{K} \\ \underline{O} \end{pmatrix}, \quad \underline{\Phi}^* = \begin{pmatrix} \underline{D}^T \underline{\Phi} \\ \underline{O} \end{pmatrix}$$

在一般情况下,  $\underline{\mu}^*$  是  $\underline{\theta}$  的函数,  $\underline{\xi}^*$  是  $\underline{\theta}$ ,  $\dot{\underline{\theta}}$  的函数,  $\underline{K}^*$ ,  $\underline{\Phi}^*$  是  $\underline{\theta}$  的函数, 故(20)式是一组非线性二阶常微分方程组, 可用现行数值方法求解。

#### 四、求解圆环的动特性

动特性问题, 就是求系统在微幅自由振动时所具有的固有频率及相应的主模态的问题。为了求得圆环的动特性, 必须对(20)式进行线性化处理, 其中  $\underline{\xi}^* \dot{\underline{\theta}}$  项是  $\dot{\underline{\theta}}$  的函数, 在微幅振动时,  $\underline{\xi}^* \dot{\underline{\theta}}$  是含  $\dot{\underline{\theta}}$  的高阶小量, 可略去。由于无外力,  $\underline{\Phi}^* = \underline{O}$ 。将  $\underline{\mu}^*$  及  $\underline{K}^*$  进行线性化处理后可得:

$$\underline{\mu}^* \ddot{\underline{\theta}} + \underline{K}^* \underline{\theta} = \underline{O} \quad (21)$$

则特征问题为求解以下的广义特征问题:

$$(\underline{K}^* - \lambda^2 \underline{\mu}^*) \underline{A} = \underline{O} \quad (22)$$

$\underline{\mu}^*$  与  $\underline{K}^*$  阵是实非对称矩阵, 不利用现行简便的计算程序, 比如广义Jacobi方法, 进行求解。下面采用凝聚技术, 使  $\underline{\mu}^*$ ,  $\underline{K}^*$  在聚缩中对称化。

将(22)式分块化后可得:

$$\left( \begin{pmatrix} \underline{K}_{11}^* & \underline{K}_{12}^* \\ \underline{O} & \underline{O} \end{pmatrix} - \lambda^2 \begin{pmatrix} \underline{\mu}_{11}^* & \underline{\mu}_{12}^* \\ \underline{J}_{11} & \underline{J}_{12} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \end{pmatrix} = \underline{O} \quad (23)$$

解得:

$$(\underline{K}^0 - \lambda^2 \underline{M}^0) \underline{A}_1 = \underline{O} \quad (24)$$

$$\text{其中: } \underline{K}^0 = \underline{K}_{11}^* - \underline{K}_{21}^* \underline{J}_{11} \underline{J}_{12}^{-1} \quad (25)$$

$$\underline{M}^0 = \underline{\mu}_{11}^* - \underline{\mu}_{21}^* \underline{J}_{11} \underline{J}_{12}^{-1} \quad (26)$$

将  $\underline{\mu}$  与  $\underline{K}$  分块化可得:

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_{11} & \tilde{\mu}_{12} \\ \tilde{\mu}_{21} & \tilde{\mu}_{22} \end{pmatrix}; \quad \tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{pmatrix}$$

其中  $\tilde{\mu}_{11}$ ,  $\tilde{\mu}_{12}$ ,  $\tilde{\mu}_{22}$  分别为  $(n-2) \times (n-2)$ ,  $(n-2) \times 2$ ,  $2 \times 2$  矩阵

同样,  $\tilde{K}_{11}$ ,  $\tilde{K}_{12}$ ,  $\tilde{K}_{22}$  分别为  $(n-2) \times (n-2)$ ,  $(n-2) \times 2$ ,  $2 \times 2$  矩阵

由  $(\tilde{K}_{11} \quad \tilde{K}_{12}) = D^T \tilde{\mu}$  及  $(\tilde{\mu}_{11} \quad \tilde{\mu}_{12}) = D^T \tilde{K}$  可解得  $\tilde{K}_{11}$ ,  $\tilde{K}_{12}$ ,  $\tilde{\mu}_{11}$ ,  $\tilde{\mu}_{12}$  代入 (25) (26) 式得:

$$\tilde{K}^0 = \tilde{K}_{11} - (J_{j_2}^{-1} \quad J_{j_1})^T \tilde{K}_{21} - \tilde{K}_{12} J_{j_1} J_{j_2}^{-1} - (J_{j_2}^{-1} \quad J_{j_1})^T \tilde{K}_{22} J_{j_1} J_{j_2}^{-1}$$

$$\tilde{M}^0 = \tilde{\mu}_{11} - (J_{j_2}^{-1} \quad J_{j_1})^T \tilde{\mu}_{21} - \tilde{\mu}_{12} J_{j_1} J_{j_2}^{-1} - (J_{j_2}^{-1} \quad J_{j_1})^T \tilde{\mu}_{22} J_{j_1} J_{j_2}^{-1}$$

由于  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{K}$  是对称的, 由上式可证  $\tilde{K}^0 = \tilde{K}^{0T}$ ,  $\tilde{M}^0 = \tilde{M}^{0T}$ , 故  $\tilde{K}^0$ ,  $\tilde{M}^0$  也是对称的。

表 1

阶 数	多 刚 体 模 型	集 中 质 量 法		有 限 元 法	
		计 算 值	误 差 (%)	计 算 值	误 差 (%)
1	2.463	2.465	-0.08	2.486	-0.93
2	3.788	3.803	-0.13	3.817	-0.50
3	8.849	8.883	-0.38	8.987	-1.32
4	11.30	11.36	-0.53	11.38	-0.70
5	18.59	18.77	-0.96	18.90	-1.64
6	21.99	22.27	-1.26	22.21	-0.99
7	31.40	31.97	-1.78	32.06	-2.06
8	36.75	36.55	-2.19	36.22	-1.30
9	47.14	48.53	-2.86	48.38	-2.56
10	52.48	54.53	-3.91	53.38	-1.69
11	66.67	68.56	-4.22	67.85	-3.21
12	72.14	75.86	-4.90	73.69	-2.10
13	86.88	92.27	-5.48	90.48	-3.98
14	94.74	101.5	-6.66	97.16	-2.49
15	110.7	120.0	-7.75	116.3	-4.82
16	120.3	132.0	-8.86	123.8	-2.82
17	137.2	152.6	-10.04	145.3	-5.57
18	148.7	168.2		153.7	-3.25
19	166.5	191.5		177.6	-6.25
20	179.9	211.7		186.9	-3.75
21	198.4			213.2	-6.94
22	213.5			223.5	-4.47
23	232.5			252.3	-7.85

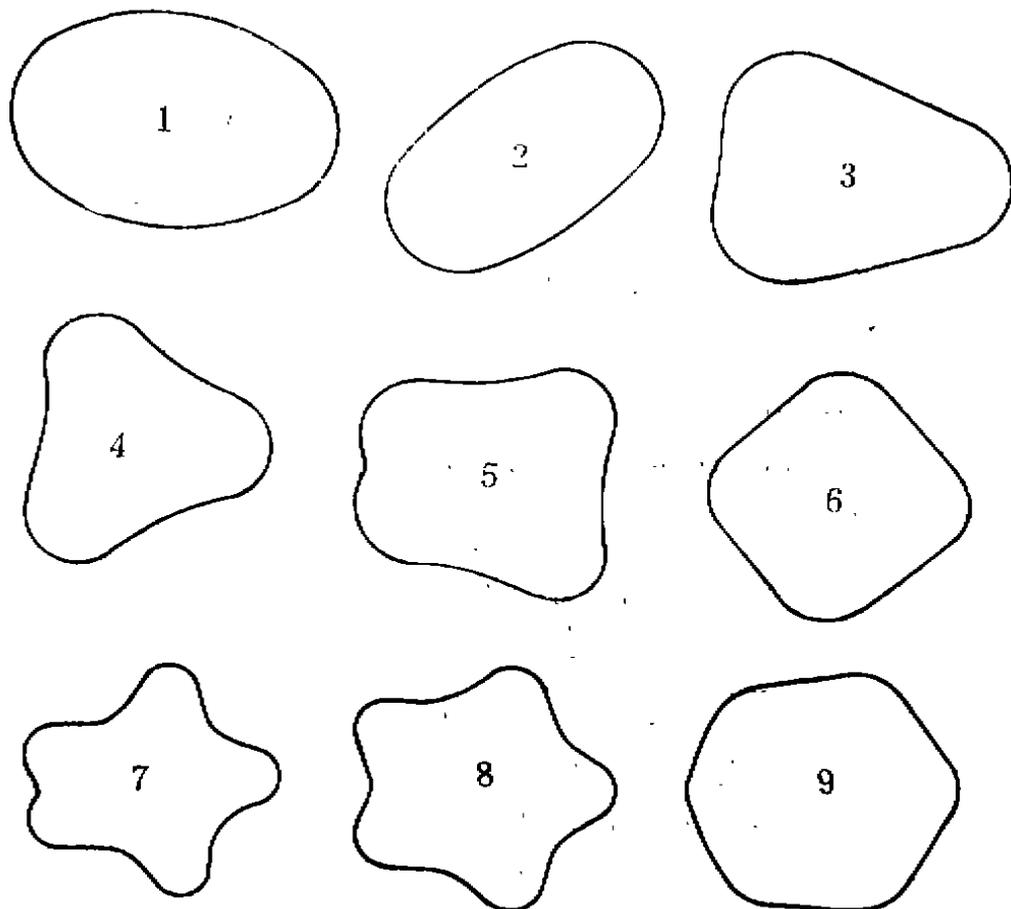


图 3

取  $n=40$  个多刚体块，若圆环半径  $r=10$  米，截面直径 0.12 米， $\rho=9.8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ， $E=2.1 \times 10^{11} \text{pa}$ ，求解结果列于表。将多刚体方法与集中质量法及有限元法进行比较，结果是比较一致的。其中有限元法的结果是用 SAP5 程序计算出的。

用多刚体方法求得的圆环前九阶振型如图 3 所示：

从以上的数值结果不但可以验证多刚体离散化方法的正确性，而且值得指出的是，多刚体方法建立的模型，在进行数值求解时，所费 CPU 时间很少，大约为有限元模型所花时间的  $1/3$ ，可见多刚体离散方法是一种较好的方法。而且由于考虑了单元刚体的转动惯量，所以其计算精度高于以 Euler 梁模型为基础的常规有限元方法的计算精度。

## 五、圆环强迫几何非线性振动的位移响应

在上述的建立圆环振动力学方程时，已消除了圆环的  $x_1$ ， $x_2$  向刚体位移，要求得圆环强迫大振幅几何非线性振动的位移响应，还必须消除圆环的刚体转动。

设圆环受力情况如图 4 所示，为消除刚体转动，可在 C 处再加一约束，限制  $x_2$  向运动，从而消除了圆环的整体转动，即：

$$x_{2e} = \sum_{r=1}^N I_r \sin \varphi_r = 0 \quad (27)$$

其中:  $N = n/2 + 1$   
对(27)式取变分, 并写成矩阵形式得:

$$\tilde{J}_e \delta \theta = 0 \quad (28)$$

式中:  $\tilde{J}_e = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{e1} & \tilde{J}_{e2} & \tilde{O} \end{bmatrix}$

$$\tilde{J}_{e1} = (\cos \varphi_1 \quad \cos \varphi_2 \quad \dots \quad \cos \varphi_{N-1})$$

$$\tilde{J}_{e2} = \cos \varphi_N$$

$\tilde{O} = (O, O, \dots, O)$  为  $1 \times (n - N)$  行阵

取新的独立的广义坐标为:

$$\tilde{q}_e = (q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_{N-1} \quad q_N \quad \dots \quad q_n)^T$$

完全类似于(13)式到(17)式的求法得:

$$\tilde{D}_e = \begin{bmatrix} \tilde{I} & \tilde{O} \\ -\tilde{J}_{e1}^{-1} \tilde{J}_{e2} & \tilde{I} \\ \tilde{O} & \tilde{I} \end{bmatrix} \dots \text{第} N \text{行}$$

则不含刚体转动的圆环几何非线性振动的动力学方程为:

$$\tilde{\mu}_e \ddot{\theta} + \tilde{\xi}_e \dot{\theta} + \tilde{K}_e \theta = \tilde{\Phi}_e \quad (29)$$

式中:

$$\tilde{\mu}_e = \begin{pmatrix} \tilde{D}_e^T \tilde{D}_e \tilde{\mu} \\ \tilde{J}_1 \\ \tilde{J}_2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\xi}_e = \begin{pmatrix} \tilde{D}_e^T \tilde{D}_e \tilde{\xi} \\ \dot{\tilde{J}}_1 \\ \dot{\tilde{J}}_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K}_e = \begin{pmatrix} \tilde{D}_e^T \tilde{D}_e \tilde{K} \\ \tilde{O} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\Phi}_e = \begin{pmatrix} \tilde{D}_e^T \tilde{D}_e \tilde{\Phi} \\ \tilde{O} \end{pmatrix}$$

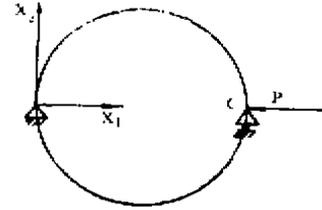


图 4

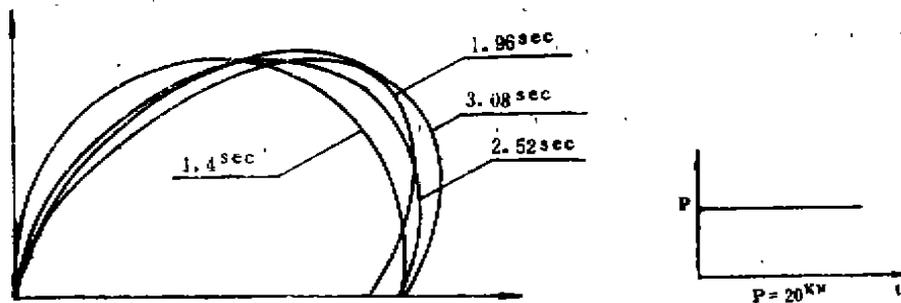


图 5

用Newmark方法求解(29)式, 取 $\alpha=0.25$ ,  $\beta=0.5$ ,  $\Delta t=0.01^{\text{sec}}$ , 圆环位移响应的计算结果绘于图5, 图中只给出了圆环的一半, 另一半是完全对称的。

### 参 考 文 献

- (1) Winget J.M. and Huston R.L., Cable dynamics—a finite segment approach, *Comput. Structure*, 1976, (6), 475-480
- (2) Huston R.L. and Kamman J.W., A Representation of Fluid Forces in Finite Segment Cable Models. Techni. Rep. ONR-UC-MIE-090180-9, University of Cincinnati, 1980
- (3) Huston R.L. and Kamman J.W., Validation of Finite Segment Cable Models, *Comput. Structure* (15), 653-660
- (4) Huston R.L. and Passerello, On the Dynamics of Chain Systems, ASME Paper 74-WA/Aut 11, 1974
- (5) 殷学纲, 建立离散系统动力学方程的矩阵方法, *重庆大学学报*, 1989, 12(1)
- (6) 殷学纲, 多刚体方法在梁拱结构分析中的应用, *全国第四次一般力学学术会议论文集*, 1987
- (7) 殷学纲, 王亚, 压杆稳定性分析的多刚体离散方法, *中南、西南九省(市)近代力学与数学方法学术交流会论文集*, 1989, 92-106
- (8) Yin Xuegang, Wang Ya, The Application of Multibody Discrete Method in Postbuckling Analysis of Beams and Columns, to be published
- (9) 刘延柱, 洪嘉振, 杨海兴, *多刚体系统动力学*, 高等教育出版社, 1989
- (10) Kane T.R., *Dynamics*, Mc Graw-Hill Book Company, 1980