1990年7月　　重庆大学学报　　Vol.13, No.4
第13卷第4期　　JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY　　Jul.　1990

低浓度三分子模型的分岐问题

THE BIFURCATION PROBLEM OF TRIPLE-MOLECULAR MODEL WITH LOW CONCENTRATIONS

周　进*　　陈均平
Zhou Jin　　Chen Junping
（重庆工业管理学院）　　（重庆大学）

摘　要　本文应用Hopf分岐理论，研究了低浓度三分子反应模型的分岐问题。

主题词　分岐问题；极限环；Hopf分岐理论；低浓度三分子模型
中国图书资料分类法分类号　O175.12；Q550.8

ABSTRACT　In this paper, we use the Hopf bifurcation theory to investigate the bifurcation problem of triple-molecular reaction model with low concentrations.

SUBJECT WORDS　bifurcation problem; limit cycle; Hopf bifurcation theory; triple-molecular model with low concentrations

对于低浓度的三分子反应模型：

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}=A-BX-XY^2 \\ \dfrac{dY}{dt}=BX+XY^2-Y \end{cases} \qquad (A>0, B>0) \qquad (1)$$

文献[1-3]作了定性研究，得到了模型(1)存在唯一极限环的充要条件是$2A^2/(B+A^2)>B+A^2+1$。本文是应用$Hopf$分歧理论研究模型(1)的分歧问题，分析了分歧值及它的极限环随分歧参数B的变化情况，用不同于上述文献的方法得到了模型(1)极限环的存在唯一性。

模型(1)具有唯一奇点$O\left(\dfrac{A}{B+A^2}, A\right)$。引入坐标变换：

$$X=x+\frac{A}{B+A^2},\ Y=y+A,\ \ t=(B+A^2)t'$$

变换后仍将t'记为t，则模型(1)化为：

收文日期　1989年10月4日
* 应用数学系86级硕士研究生

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -(B+A^2)^2x - 2A^2y - 2A(B+A^2)xy - Ay^2 - (B+A^2)xy^2, \\
\dfrac{dy}{dt} = (B+A^2)^2x + (A^2-B)y + 2A(B+A^2)xy + Ay^2 + (B+A^2)xy^2.
\end{cases} \tag{1'}
$$

方程组(1)′有唯一的奇点$O'(0, 0)$，它的线性近似矩阵是：

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(B+A^2)^2 & -2A^2 \\ (B+A^2)^2 & A^2-B \end{pmatrix}
$$

令 $p = -(a+d) = (B+A^2)^2 - A^2 + B$,

$q = ad - bc = (B+A^2)^3 > 0$

当$0 < A < 1$时，方程 $p(B) = (B+A^2)^2 - A^2 + B = 0$ 有唯一正根：

$$
B = \varphi(A) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{8A^2+1} - (2A^2+1)\right),
$$

因此当B足够接近于$\varphi(A)$时，$p^2 - 4q < 0$（以下均假定这一条件得到满足）．于是籍助于〔3〕的结果，可以得到如下的结论：

当$B \geqslant \varphi(A)$时，方程组(1)′的奇点$O'(0, 0)$是稳定的焦点（当$B = \varphi(A)$时，$O'(0, 0)$是稳定的细焦点）；

当$B < \varphi(A)$时，方程组(1)′的奇点$O'(0, 0)$是不稳定的焦点。

以上表明$B = \varphi(A)$是方程组(1)′的分歧值。由分歧问题的 *Liapunov* 第二方法定理，当$B < \varphi(A)$但足够接近于$\varphi(A)$时，方程组(1)′在奇点$O'(0, 0)$周围至少有一个稳定的极限环（见〔4〕或〔5〕）。

下面我们进一步讨论方程组(1)′极限环随分歧参数B的变化情况及极限环的唯一性：

引入参数 $\lambda = B - \varphi(A)$，方程组(1)′变成：

$$
\frac{dx}{dt} = P(x, y, \lambda), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \lambda) \tag{1)'_\lambda}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
P(x,y,\lambda) = & -(\lambda+\varphi(A)+A^2)^2x - 2A^2y - 2A(\varphi(A)+\lambda+A^2)xy \\
& - Ay^2 - (\lambda+\varphi(A)+A^2)xy^2, \\
Q(x,y,\lambda) = & (\lambda+\varphi(A)+A^2)^2x + (A^2-\lambda-\varphi(A))y + 2A(\lambda+\varphi(A)+A^2)xy \\
& + Ay^2 + (\lambda+\varphi(A)+A^2)xy^2
\end{aligned}
$$

则方程组$(1')_\lambda$有奇点 $O'_\lambda(0, 0)$，其导算子：

$$
A(\lambda) = \begin{bmatrix} -(\lambda+\varphi(A)+A^2)^2 & -2A^2 \\ (\lambda+\varphi(A)+A^2)^2 & A^2-\lambda-\varphi(A) \end{bmatrix}
$$

由于 $Tr\ A(0) = A^2 - \varphi(A) - (\varphi(A)+A^2)^2 = -p(B) = 0$,

$Det\ A(0) = (\varphi(A)+A^2)^3 > 0$.

因此$A(0)$的特征值是纯虚数$\pm[\varphi(A)+A^2]^{3/2}i$。又矩阵$A(\lambda)$可表示为：

$$
A(\lambda) = A(0) + \lambda B(\lambda)
$$

其中

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix} -2[\varphi(A)+A^2]-\lambda & 0 \\ 2(\varphi(A)+A^2) & -1 \end{bmatrix}$$

显然$TrB(0)=-2[\varphi(A)+A^2]-1\neq 0$。这表明方程组(1)'满足分歧问题 *Friedrich* 方法定理的条件，在奇点$O'(0,0)$附近不全是闭轨的情形下，方程组(1)'在奇点附近存在唯一稳定的极限环；当$B\to\varphi(A)$时，极限环趋于奇点，周期趋于$2\pi/[\varphi(A)+A^2]^{3/2}$（见[4]或[5]中的 *Friedrich* 定理）。

综上所述，我们得到如下结果：

定理　当$0<A<1$时，模型(1)具有分歧值B：

$$B=\varphi(A)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{8A^2+1}-(2A^2+1)\right]$$

当$B<\varphi(A)$但足够接近于$\varphi(A)$时，模型(1)在奇点$O(A/(B+A^2),A)$附近存在唯一稳定的极限环；当$B\to\varphi(A)$时，极限环趋于奇点，周期趋于$2\pi/[\varphi(A)+A^2]^{3/2}$。

参 考 文 献

[1]　张棣、陈治融，低浓度三分子模型，科学通报，1982，(21)：1281-1284

[2]　陈燕，一类微分方程的定性分析，西北大学学报，1984，(2)：121-125

[3]　刘文生，一类方程极限环的不存在性，西北大学学报，1986，16(3)：15-21

[4]　张锦炎：常微分方程的几何理论与分支问题，北京大学出版社，1981

[5]　李继彬：非线性微分方程，成都科技大学出版社，1987