面积向量法计算梁及刚架的位移

AREA-VECTOR METHOD CALCULATING THE DISPLACEMENTS OF BEAMS AND FRAMES

胡国华

Hu Guohua

（工程力学系）

摘　要　本文提出一种计算梁及刚架位移的新方法，它将梁或刚架的弯矩图面积及坐标原点处的截面转角当成旋转向量，用这些向量的投影或取矩就可计算角位移或线位移。本方法可用于线弹性材料或非线性弹性材料的杆或杆系（包括空间杆或杆系）的位移计算，杆的横截面可以是变化的。

关键词　梁的变形；面积向量法；面矩法；共轭梁法；初参数法

中国图书资料分类法分类号　TB301

ABSTRACT　A new method with which to calculat the displacements of beams and frames is presented. The areas of bending moment diagram of beam or frame and the slope at the origin of the elastic curve are treated as some rotatable vectors with this method. Angular displacement and in-line displacement can be calculated by using the projection and moment of these vectors. This method can be used to calculate displacement of the bar and the bar system (including three dimensional forms.), which made from linear or nonlinear elastic materials. The cross section of the bar is changeable.

KEY WORDS　deflection of beam, area-vector method, area-moment method, method of conjugate beam, method of initial parameter

0　引言

梁及刚架的位移计算，是工程设计中经常要碰到的问题，同时也是一个饶有兴趣的数学问题，三百多年来，不少的数学家、力学家和工程师研究它、丰富它。著名数学家和力学家欧拉（*L. Euler*）在这方面作了突破性的工作。到目前为止，已提出了18种以上的方法，它们是积分法[1]、初参数法[1]、虚梁法[2]、图解法[2]、迭加法[3]、差分法[3]、奇异函数法[4][9]、面积-力矩法[5]、迈克勒法[6]、逐次面积矩法[7]、拉普拉斯变换法[8]、三角

收文日期　1986-09-29

级数法[10]、能量法及虚位移法[3]、导线法、剪力面矩法、常数相等法、焦点法、近似计算法。这些方法中，大多数方法只能计算直梁的位移而不能直接应用于计算刚架的位移，少数方法虽能计算梁及刚架的位移，但用起来不够方便。本文作者提出了一种新的方法—面积向量法，这个方法将弯矩图（或其他内力图）的面积视为一可旋转的向量，再将它对某一轴投影或对另一轴取矩，就能很方便地计算直梁、曲梁或刚架的位移。本方法不但适用于平面杆或杆系，也适用于空间杆或杆系。对于组成杆或杆系的材料，可以是线弹性的，也可以是非线性弹性的。各杆可以是变截面的。杆件在组合变形时的位移也可用本方法计算。

1 面积向量法计算等刚度直梁的位移

下面讨论发生平面弯曲的直梁在小变形条件下且梁材料服从虎克定律时的位移计算。

1.1 基本公式及方法

图1(*a*)中，曲线AB表示挠曲线的一部份，A点及B点间任一截面的弯矩如图1(*b*)所示。设挠曲线上的A点变形前在坐标原点O，并以f_0代表A点的挠度（沿y轴正方向为正），θ_0代表坐标原点处梁截面的转角（逆钟向为正）。θ代表B截面的转角。θ_r代表B截面相对于A截面的转角。y_r代表B点相对于A点切线的挠度。当梁截面抗弯刚度EJ为常数且不考虑剪力对梁变形的影响时，由[5]可知：

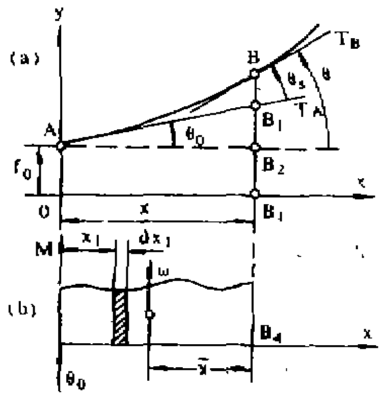

图1

相对转角： $$\theta_r=\int_0^x \frac{M}{EJ}dx_1=\frac{\omega}{EJ} \tag{1}$$

相对挠度： $$y_r=\overline{BB_1}=\int_0^x \frac{M}{EJ}(x-x_1)dx_1=\frac{\omega\cdot\bar{x}}{EJ} \tag{2}$$

式中，M为x_1截面的弯矩，ω为A及B截面间弯矩图的面积，$\bar{x}$为面积ω的形心至变形前的B截面的距离（或至BB_3线段的延线的距离）。

B截面的绝对转角：

$$\theta=\theta_0+\theta_r=\theta_0+\frac{\omega}{EJ} \tag{3}$$

B截面的绝对挠度：

$$y=\overline{BB_3}=\overline{B_3B_2}+\overline{B_2B_1}+\overline{B_1B}$$

即 $$y=f_0+\theta_0\cdot x+\frac{\omega\cdot\bar{x}}{EJ} \tag{4}$$

公式（3）和（4）就是计算等截面直梁位移的基本公式。在必要时，面积ω可以分为几块面积计算。式中的$\omega\cdot\bar{x}$代表ω对B_4点的矩（B_4点是弯矩图上代表B截面位置的点）。

位移的符号规则是：杆轴为x轴，向右为正。y轴向上为正。弯矩图绘在梁的受压纤维一侧。处在x-M坐标平面的一、三象限中的弯矩图面积ω规定为正，否则为负。$\bar{x}$及x尺寸在

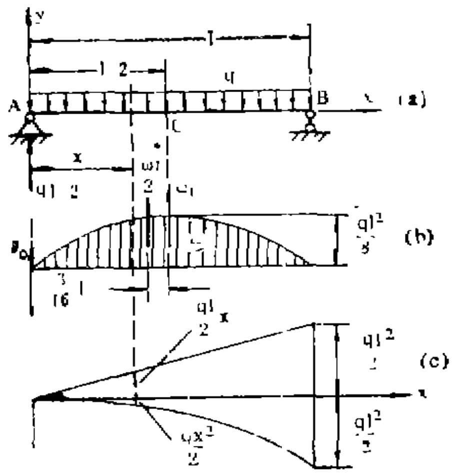

图 2

坐标原点右侧为正，左侧为负。θ_0 逆钟向为正。据此由（4）式算得的线位移为正者，表示它沿 y 轴正方向，反之沿 y 轴负方向。同样，按（3）式算得的转角为正者，表示它是逆钟向的，反之为顺钟向的。

面积ω可用一个向量表示，它平行于y轴且通过面积ω的形心，当ω为正时，它指向y轴正方向。θ_0用一个沿着y轴的向量表示，θ_0为正，其向量与y轴同向。计算位移时，利用ω及θ_0在y轴上的投影和对一点的矩。这种计算位移的方法暂命名为面积向量法。

1.2 简支梁位移计算

为了计算图 2 (a)所示简支梁中点C的挠度，可将坐标原点设在A点，此处挠度f_1为零，由（4）式可得：

$$y=\theta_0\cdot x+\frac{\omega\cdot\overline{x}}{EJ} \qquad (a)$$

由上式并利用图 2 (b)计算B支座处的挠度应为零，故得：

$$0=\theta_0\cdot l+\frac{1}{EJ}\left(\frac{2}{3}\cdot l\cdot\frac{ql^2}{8}\right)\cdot\frac{l}{2}$$

解得　$$\theta_1=-ql^3/24EJ=\theta_A$$

用（a）式计算C截面挠度时，要用θ_0和A及C截面间弯矩图面积向量$\omega_1/2$对C截面的对应点取矩，得

$$y_C=\left(-\frac{ql^3}{24EJ}\right)\cdot\frac{l}{2}+\frac{1}{EJ}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{ql^2}{8}\right)\cdot\frac{3}{16}l=-\frac{5ql^4}{384EJ}$$

利用θ_0及图 2 (c)所示弯矩图，可得挠曲线方程：

$$y=\theta_0\cdot x+\frac{\omega\cdot\overline{x}}{EJ}=-\frac{ql^3}{24EJ}\cdot x+\frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{qlx}{2}\right)\cdot\frac{x}{3}-\left(\frac{1}{3}\cdot x\cdot\frac{qx^2}{2}\right)\cdot\frac{x}{4}\right]$$

即　$$y=-\frac{qx}{24EJ}(x^3-2lx^2+l^3)$$

对于梁上受多个载荷作用和其他约束的情况，用面积向量法计算位移也是很方便的。

2 面积向量法计算变刚度直梁的位移

对于变刚度直梁，由（1）至（4）式可得计算位移的公式为：

$$\theta=\theta_0+\int_0^x\frac{M}{EJ}dx, \qquad (5)$$

$$y=f_0+\theta_0\cdot x+\int_0^x(x-x_1)\frac{M}{EJ}dx_1 \qquad (6)$$

式中，M/EJ为梁挠曲线上任一点的曲率。若绘出梁的曲率图，令

$$\omega_k=\int_0^x\frac{M}{EJ}dx_1$$

及

$$\omega_k\cdot\overline{x}=\int_0^x(x-x_1)\frac{M}{EJ}dx_1$$

那么，ω_k为坐标原点至欲求位移的坐标为x的截面之间梁的曲率图面积；$\overline{x}$为此面积的形心至x截面的距离。由此，计算变刚度直梁位移的公式为：

$$\theta=\theta_0+\omega_k \qquad (7)$$

$$y=f_0+\theta_0\cdot x+\omega_k\cdot\overline{x} \qquad (8)$$

图3(a)示一阶梯轴，其惯性矩$J_1=J_0/2$。用面积向量法计算梁中点C的挠度及A截面的转角。图3(b)是梁的曲率图。将坐标原点设在A点，此处挠度$f_0=0$，(8)式成为：

$$y=\theta_0\cdot x+\omega_k\cdot\overline{x} \qquad (b)$$

当$x=l$时$y=0$，代入上式并计算图中向量ω_{k1}和ω_{k2}对B_1点之矩，得：

$$0=\theta_0\cdot l+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{Pl}{4EJ_0}\right)\cdot\frac{2}{3}l+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{Pl}{2EJ_0}\right)\cdot\frac{l}{3}$$

解得：　$\theta_0=-Pl^2/12EJ_0=\theta_A$

在(b)式中令$x=l/2$及$\omega_k=\omega_{k1}$，得C截面挠度：

$$y_C=-\frac{Pl^2}{12EJ_0}\cdot\frac{l}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{Pl}{4EJ_0}\right)\cdot\frac{l}{6}=-\frac{Pl^3}{32EJ_0}$$

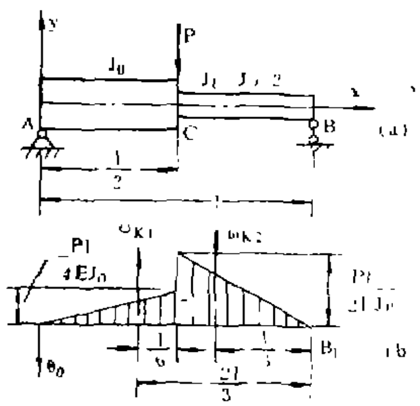

图3

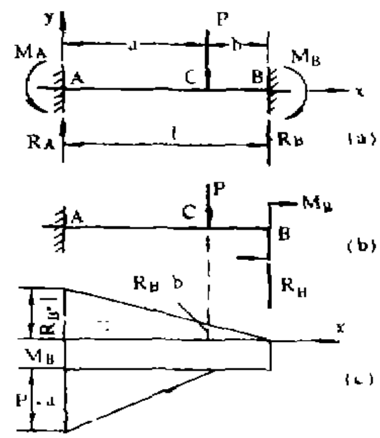

图4

3　用面积向量法解静不定直梁

下面用一个简单的例子说明这种解法。

对于图4(a)所示等刚度梁，以M_B和R_B为多余约束力，得等效系统如图4(b)，其弯矩

图如图 4 (c)。将坐标原点设在梁的A端。变形几何条件为B端转角$\theta_B=0$及挠度$y_B=0$。利用（3）及（4）式，令其中的$\theta_0=0$、$f_0=0$及ω为梁AB间弯矩图的面积，可得：

$$\theta_B=\frac{1}{EJ}\left[-M_B\cdot l+\frac{1}{2}(R_B\cdot l)\cdot l-\frac{1}{2}Pa\cdot a\right]=0$$

$$y_B=\frac{1}{EJ}\left[-M_B\cdot l\cdot\frac{l}{2}+\left(\frac{1}{2}R_B l^2\right)\frac{2}{3}l-\left(\frac{1}{2}Pa^2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a+b\right)\right]=0$$

解得　　$R_B=Pa^2(3b+a)/l^3$，$M_B=Pa^2b/l^2$

计算C截面的挠度时，较简便的是以B点为坐标原点。令（4）式中ω代表梁BC段弯矩图的面积，可得：

$$y_C=\frac{1}{EJ}\left[\left(-\frac{R_Bb^2}{2}\right)\left(-\frac{b}{3}\right)+(M_B\cdot b)\left(-\frac{b}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{b^3}{6EJ}\left(R_B-\frac{3M_B}{b}\right)$$

即　　$$y_C=-\frac{Pa^3\cdot b^3}{3l^3EJ}.$$

4　面积向量法计算平面刚架的位移

这里只讨论具有刚节点的简单平面刚架的弯曲位移，暂不考虑轴力及剪力对位移的影响。所得结论对多层多跨的复杂刚架也是适用的。下面推导平面刚架任意截面的转角及沿任意方向的线位移的计算公式。

先介绍如何用面积向量法计算梁截面形心沿任意方向的线位移。

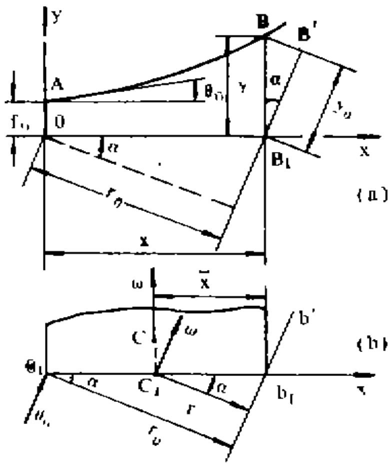

图 5

图 5 (a)中的等直梁OB_1变形后为AB曲线。按（4）式，B_1截面沿y轴方向的位移为：

$$y=f_0+\theta_0\cdot x+\frac{\omega\cdot\overline{x}}{EJ}\qquad(c)$$

B_1截面沿α方向的位移B_1B'为：

$$y_\alpha=y\cdot\cos\alpha$$

（c）式代入上式得：

$$y_\alpha=f_0\cdot\cos\alpha+\theta_0\cdot x\cdot\cos\alpha+\frac{\omega\cdot\overline{x}\cdot\cos\alpha}{EJ}$$

令　　$f_{1\alpha}=f_0\cos\alpha$，$r_0=x\cdot\cos\alpha$，$r=\overline{x}\cdot\cos\alpha$，上式成为：

$$y_\alpha=f_{1\alpha}+\theta_0\cdot r_0+\frac{\omega\cdot r}{EJ}\qquad(9)$$

式中f_{0a}为坐标原点处的截面沿a方向的位移。(9)式的含意是：当计算a方向的线位移时，除考虑f_{0a}以外，将θ_0及ω均看成向量并指向a方向，ω的作用线通过弯矩图面积形心C点在x轴上的投影点C_1，θ_0过坐标原点，再将θ_0及ω/EI分别对b_1点取矩即得。这就是面积向量法计算任意方向的线位移的要点。至于B_1截面的转角，它与a方向无关，故仍按(3)式计算，它可视为向量θ_0及ω/EI在b_1b'线上的投影之和。

图6(a)表示一个分段等刚度的平面刚架。下面介绍计算它任一截面C的转角及沿a-a方向的线位移的公式。图6(b)是它的弯矩图，O及C截面间各段弯矩图面积已表示成向量并平行于a-a方向。

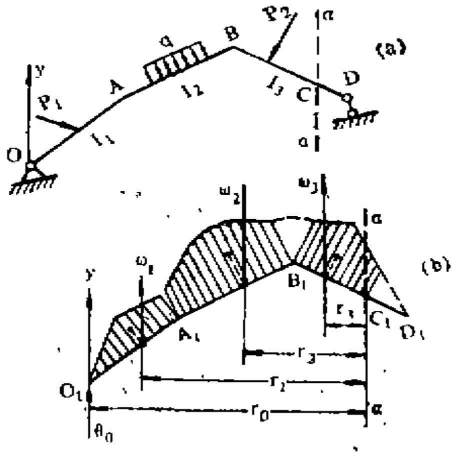

图6

依次以O、A、B三点为坐标原点用(9)式求A、B、C三点沿a-a方向的线位移，可得计算C点沿a-a方向的线位移公式(设O、C之间弯矩图面积分为n块)为

$$y_a = f_{0a} + \theta_0 \cdot r_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i r_i}{EI_i} \qquad (10)$$

计算C截面转角公式为：

$$\theta = \theta_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{EI_i} \qquad (11)$$

计算刚架位移的方法及符号规则是：选择刚架轴线的左端点为坐标原点，y轴选在欲求位移的方位上且向上为正。弯矩图绘在刚架各段受压纤维一侧。确定弯矩图面积ω的正、负号时，假想把刚架展直成一根垂直于y轴且在其右侧的直梁，那么在y坐标为正的半平面中的弯矩图面积为正，否则为负。ω向量的作用点为该面积形心在该段刚架轴线上的正投影点，ω为正则与y轴同向，否则与y轴反向。θ_0向量的作用点为坐标原点，正的θ_0与y轴同向，负的与y轴反向。

要计算某截面的转角，只要计算θ_0及各个ω/EI向量在y轴上的投影和，按(10)式计算某截面形心沿y轴的线位移，要利用θ_0及各个ω/EI向量对该截面形心取矩。注意所用的ω是坐标原点至欲求位移截面之间刚架各段弯矩图面积的向量。计算位移的截面形心在θ_0或ω_i向量的右边时，其r_0或r_i尺寸取正值，否则取负值。

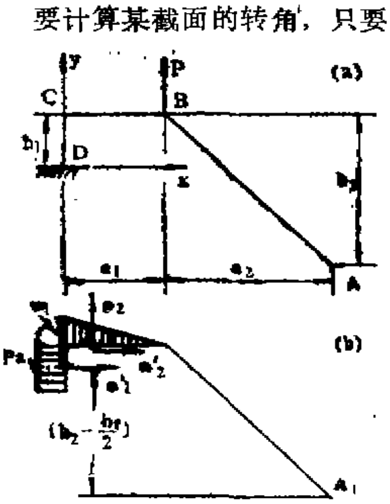

图7

按以上方法算得的转角为正者，表明它是逆钟向的；而线位移为正者，表示它与y轴同向。

若刚架是非等截面的，则用曲率图向量ω/EI代替ω向量进行计算。

为了说明(10)及(11)式的应用，现以图7(a)所示等刚度刚架为例，计算其A截面的转角、水平位移和铅垂位移。

其弯矩图绘在刚架各段的受压一侧如图7(b)。以D

点为坐标原点，其f_{Ax}及f_{Ay}皆为零。为了计算A截面的铅垂位移及转角，将弯矩图面积用铅垂方向的向量ω_1及ω_2表示，它们应该为正。由（11）式得A截面的转角为：

$$\theta_A=\Sigma\frac{\omega_i}{EJ}=\frac{1}{EJ}\left[Pa_1h_1+\frac{Pa_1^2}{2}\right]=\frac{Pa_1}{EJ}\left(h_1+\frac{a_1}{2}\right)$$

由ω_1及ω_2对A_1点取矩并除以EJ得A点的铅垂位移为：

$$f_{Ay}=\frac{1}{EJ}\left[(Pa_1\cdot h_1)(a_1+a_2)+\left(\frac{Pa_1^2}{2}\right)\left(\frac{2}{3}a_1+a_2\right)\right]$$

$$=\frac{Pa_1}{EJ}\left[h_1(a_1+a_2)+a_1\left(\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{2}\right)\right]\quad（向上）$$

为了计算A点的水平位移，将ω_1及ω_2顺钟向旋转至水平方向如ω_1'及ω_2'所示，再对A_1点取矩后除以EJ而得A点的水平位移：

$$f_{Ax}=\frac{1}{EJ}\left[(Pa_1h_1)\left(h_2-\frac{h_1}{2}\right)+\left(\frac{Pa_1^2}{2}\right)\cdot h_2\right]$$

$$=\frac{Pa_1}{2EJ}\left[h_2(2h_1+a_1)-h_1^2\right]\quad（向右）$$

要计算某一截面形心沿某倾斜方向的位移，将y轴、ω_1、ω_2及θ_1（设它不为零时）顺钟向旋转至该倾斜方位再进行计算。

5　讨论

1． 这里提出的面积向量法，其计算公式的形式好像面矩法与初参数法的综合，但是后两种方法只能用于直梁，而面积向量法引入了旋转向量的概念，可方便地用于梁和刚架（包括曲梁和空间刚架）的位移计算，并能很简便地推导出梁的初参数方程式。

2． 面积向量法与共轭梁法相较，省去绘共轭梁及设置虚支座的麻烦，因而比共轭梁法更方便。由于力的投影及取力矩可用图解法求得，所以面积向量法与共轭梁法一样可推导出图解法。

3． 用能量法计算位移时，若选用卡氏定理，在无载荷的地方计算位移必须加假想力；用单位载荷法或维力沙金法，除要使用载荷弯矩方程（或图）外，首先在每个计算位移的点必需加单位力或力偶，换一个计算点，同样又要加，然后写单位力弯矩方程式或绘单位力弯矩图。而用面积向量法计算若干点的位移时只需绘载荷弯矩图就够了，因而作者认为面积向量法在许多情况下比能量法方便。例如计算图7(a)的刚架，如用维力沙金法，将多绘三个弯矩图。

参　考　文　献

〔1〕 杜庆华等：材料力学，北京，高等教育出版社，1957，193-205

〔2〕 金懋等，材料力学简明教材，南京，华东航空学院印刷，1956，220-230

〔3〕 刘鸿文主编，材料力学，第二版，北京，高等教育出版社，1982，235-249

〔4〕 Higdon A, Ohlsen, E.H.etc.: Mechanics of Materials, 3rd ed., New York, John Wiley and Sons, Inc., 1977, 368-373
〔5〕 Hearn, E.J.: Mechanics of Materials, 1st ed., Oxford, Pergamon Press Ltd.1977, 100-104
〔6〕 Warnock, F.V. & Benham, P.P.: Mechanics of Solids and Strength of Materials, 1st ed.London, Sir Isaac Pitman & Sons Ltd., 1965, 104-111
〔7〕 陈尚炯：计算梁变形的逐次面积矩法，力学与实践，1982，4(3)：65-67
〔8〕 袁祥忠：拉普拉斯变换求解梁的弯曲变形，力学与实践，1983，37-41
〔9〕 王燮山：用奇异函数法求解某些变截面梁的变形，力学与实践，1984，(4)：53-55
〔10〕 Timoshenko, S.: Strength of Materials(Part Ⅱ), 3rd ed., New York, Robert E. Krieger Publishing Company, Inc.,1957, 46-53