1990年11月 重庆大学学报 Vol.13, No.6
第13卷第6期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY Nov.1990

矩形网格中Hamilton圈个数的计算

THE NUMBERING OF HAMILTONIAN CYCLES IN A RECTANGULAR GRID

哈姆雷特·左拉基·阿科彼阳 段虞荣

Hamlet Tsolaki Akopian Duan Yurong

（苏联·埃里温大学） （中国·重庆大学）

摘　要　讨论了$n\times m$阶矩形网格（其中n和m中至少有一个为偶数）中Hamilton圈个数$F(n,m)$，获得下列结果：

$F(n,3)=2^{\frac{n}{2}-1}$，对任何偶数n；

$F(n,4)=2[F(n-1,4)+F(n-2,4)-F(n-3,4)]+F(n-4,4)$，对$n\geqslant 6$；

$F(n,5)=11F(n-2,5)+2F(n-6,5)$，对$\geqslant 8$的偶数$n$；

其中$F(2,4)=1$，$F(3,4)=2$，$F(4,4)=6$，$F(5,4)=14$，$F(2,5)=1$，$F(4,5)=14$，$F(6,5)=154$。

本文也指出$n\times m$阶矩形网格的两点间的平均距离等于$(n+m)/3$，且对于k维空间推广了这个结果。

关键词　组合数学；图论；Hamilton圈；变换／矩形网格；递推关系

中国图书资料分类法分类号　O157.5

ABSTRACT Rectangular grids of order $n\times m$, where at least one of n and m must be even are discussed. For the number F(n,m) of the hamiltonian cycles in such a grid, the following results are obtained.

$F(n,3)=2^{n/2-1}$ for any even n,

$F(n,4)=2[F(n-1,4)+F(n-2,4)-F(n-3,4)]+F(n-4,4)$ for $n\geqslant 6$,

$F(n,5)=11F(n-2,5)+2F(n-6,5)$, for even $n\geqslant 8$,

where $F(2,4)=1$, $F(3,4)=2$, $F(4,4)=6$, $F(5,4)=14$, $F(2,5)=1$, $F(4,5)=14$ and $F(6,5)=154$.

It shows that the average distance between two points of a rectangular grid of order $n\times m$ is equal to $(n+m)/3$, and this result for k-dimensional space is also generalized.

KEY WORDS combinatorial mathematics; graph theory; hamiltonian cycle; tran-

收文日期　1989-05-15

sformation/rectangular grid; recursion relation.

我们讨论$n\times m$阶矩形网格。该网格可用图$T_{n,m}=P_n\times P_m$表示，其中P_i为有i个顶点的路[1]。许多实际问题和理论问题都可归结为与所研究的矩形网格有联系的问题。这些问题在一些文献[2-4]中已有研究。本文讨论$m\leqslant 5$的网格的Hamilton圈，并得到计算这种网格的Hamilton圈个数的递推公式。甚易证明，$n\times m$阶矩形网格是Hamilton网格当且仅当n和m中至少有一个是偶数。下面将仅讨论Hamilton圈，并简称为圈。两个圈认为是不同的，倘若它们有不同的边集。我们用$F(n,m)$来表示网格$T_{n,m}$中不同的圈的个数。

定理 1　对任何正偶数n，$F(n,3)=2^{\frac{n}{2}-1}$。

a　b

图

a　b　c　d　e　f

图 2

证．对于$n=2$定理显然为真。假定$n\geqslant 4$和$F(n-2,3)=2^{\frac{n-2}{2}-1}$　$n\times 3$阶网格的每一个圈属于图1所示的两种类型a和b中的一种。去掉圈中那些与最后两列中至少一个顶点有关联的边，再加入图1中用虚线表示的一条边，我们就得到网格$T_{n-2,3}$中的圈，从而$F(n,3)=2F(n-2,3)$，因此$F(n,3)=2^{\frac{n}{2}-1}$。

定理 2　$F(2,4)=1$，$F(3,4)=2$，$F(4,4)=6$，$F(5,4)=14$，
$F(n,4)=2[F(n-1,4)+F(n-2,4)-F(n-3,4)]+F(n-4,4)$对$n\geqslant 6$。

证．容易验证定理对于$n\leqslant 5$均为真。假定$n\geqslant 6$，网格$T_{r,4}(r\geqslant 3)$中的每一个圈属于图2中类型a、b、c、d、e、f之一。类型i的圈的个数将用$i(r)$来表示。因为每一个圈仅属于这些类型中的一类，所以

$$F(r,4)=a(r)+b(r)+c(r)+d(r)+e(r)+f(r)$$

当$r\geqslant 5$时，网格$T_{r-1,4}$中的每一个圈采用加一列和将圈的最后两列进行变换的办法就可将其变换为网格$T_{r,4}$的圈。这些圈的变换如图3所示。在该图中，例如，$a\to e$表示从类型a的圈我们可以得到类型e的圈。虚线表示从圈中去掉的那些边，而粗体线则表示加到圈中的那些边。不难证明，这样构造的网格的圈都是彼此不同的并且该网格的每一个圈都可以用这样的方法得到。因此，下面的递推关系成立：$a(r)=a(r-1)+b(r-1)+c(r-1)$；$i(r)=d(r-1)+e(r-1)$对$i=b$、$c$、$d$；$e(r)=a(r-1)+b(r-1)+c(r-1)+f(r-1)$，$f(r)=e(r-1)$。我们注意等式$b(r)=c(r)$也可从对称性推出，易证$r=4$时这些递推关系仍成立。对$r=n$，将上面这些等式加起来我们得到

$$F(n,4)=2a(n-1)+2b(n-1)+2c(n-1)+3d(n-1)+4e(n-1)+f(n-1)$$

将最后这个表达式进行变换，我们就得到所欲证的定理。

注．定理2给出的$F(n,4)$的递推关系是一个4阶齐次线性递推关系[5]$a_i=2a_{i-1}+2a_{i-2}-$

$2a_{n-3}+a_{n-4}$。可以通过解一个四次方程$x^4-2x^3-2x^2+2x-1=0$进一步给出$F(n,4)$用n直接表达的形式。但我们认为从计算的角度讲，通过这种齐次线性递推关系由右端关于较小的n的已知信息可以十分方便地算出左端当前n的有关信息，就没有必要去解四次代数方程求出通解，追求理论上的完善。

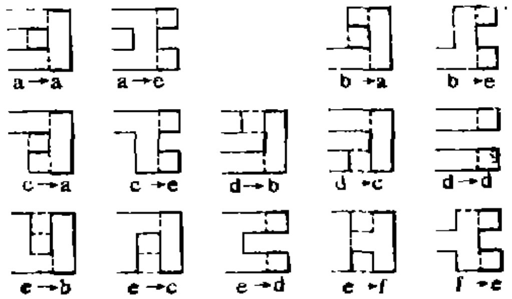

图 3

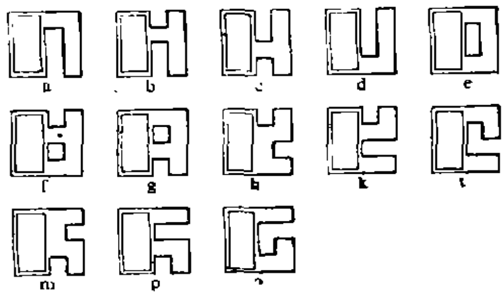

图 4

定理 3　$F(2,5)=1$，$F(4,5)=14$，$F(6,5)=154$，$F(n,5)=11F(n-2,5)+2F(n-6,5)$，对$\geqslant 8$的偶数$n$。

证．不难验证定理对于小于8的n值为真。假定$n\geqslant 8$。与定理2的证明类似我们注意网格$T_{n,5}$的每一个圈属于图4中所示类型a、b、c、d、e、f、g、h、k、t、m、p、o中的一类。相应地，网格$T_{n,5}$中的类型i的圈的个数用$i(n)$来表示。由于网格$T_{n,5}$关于第三行是对称的，推出$a(n)=d(n)$，$b(n)=c(n)$，$f(n)=g(n)$，$h(n)=m(n)$，$t(n)=o(n)$，$k(n)=p(n)$。类似于定理2的证明，网格$T_{n,5}$的每一个圈可从网格$T_{n-2,5}$的圈采用加两列和修改网格$T_{n,5}$的圈中最后四列的办法而得到。我们注意$a(n)=t(n)=F(n-2,5)$，这是从下述事实推知的。网格$T_{n-2,5}$的每一个圈是一对一映射到网格$T_{n,5}$中类型a（相应地类型t）的圈。图5中的前两个图形表明了这种映射。网格$T_{n,5}$中类型b（相应地类型f）的每一个圈是一对一映射到类型k（相映地类型h）的圈。这种映射如图5的第三个和第四个图形所示。于是，我们有$a(n)=d(n)=t(n)=o(n)=F(n-2,5)$，$b(n)=c(n)=k(n)=p(n)$，$f(n)=g(n)=h(n)=m(n)$。

图 5

现在我们来证明下面的递推关系：

$$b(n)=F(n-2,5)-F(n-4,5)-m(n-2)-p(n-2),$$
$$e(n)=F(n-2,5)+2F(n-4,5)+e(n-2),$$
$$f(n)=F(n-2,5)-F(n-4,5)-2m(n-2)-2p(n-2)。$$

为了证明这些递推关系的第一个，我们注意网格$T_{n,5}$中类型b的圈仅可由$T_{n-2,5}$中属于类型a，b，c，d，e，f，g，h，k，t的圈经变换得到。因此，我们有

$$b(n)=a(n-2)+b(n-2)+c(n-2)+d(n-2)+e(n-2)+f(n-2)+g(n-2)+h(n-2)+k(n-2)+t(n-2)=F(n-2,5)-m(n-2)-p(n-2)-o(n-2)$$

将$o(n-2)$用其值代入我们就得到所要求的等式。

为了证明关于$e(n)$和$f(n)$的递推关系，我们讨论网格$T_{n-2,5}$的圈映射到网格$T_{n,5}$的类型e和f的圈的一切变换。这些变换如图6所示，我们注意只有变换对$t\to f$和$o\to f$才能得到网格$T_{n,5}$的同一的圈，这些变换如图6中最后两个图形所示。因此

$$e(n)=2d(n-2)+2e(n-2)+c(n-2)+f(n-2)+g(n-2)+k(n-2)+t(n-2)+p(n-2)+o(n-2)+b(n-2)+h(n-2)+m(n-2)+2a(n-2)=F(n-2,5)+a(n-2)+d(n-2)+e(n-2)$$

$$f(n)=F(n-2,5)-c(n-2)-p(n-2)-g(n-2)-m(n-2)-o(n-2)=F(n-2,5)-2p(n-2)-2m(n-2)-o(n-2)$$

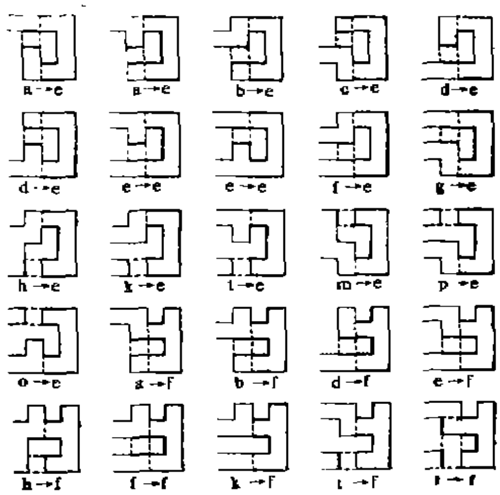

图6

将$o(n-2)$，$a(n-2)$和$d(n-2)$用它们的值代入我们就得到所要求的递推关系。

将上述函数相加，我们得到

$$F(n,5)=4a(n)+4b(n)+4f(n)+e(n)$$
$$=13F(n-2,5)-6F(n-4,5)-12p(n-2)-12m((n-2)+e(n-2($$

由于$F(n-2,5)=4F(n-4,5)+4f(n-2)+4b(n-2)+e(n-2)$，因此

$$F(n,5)=10F(n-2,5)+6F(n-4,5)+4e(n-2)$$

因为$e(n)=F(n-2,5)+2F(n-4,5)+e(n-2)$，所以

$$e(n)=F(n-2,5)+3[F(n-4,5)+F(n-6,5)+\cdots+F(2,5)]+1$$

将$e(n)$的值代入上面关于$F(n,5)$的等式我们得到

$$F(n,5)=12(F_2+F_4+\cdots+F_{n-8}+F_{n-6})+10F_{n-4}+10F_{n-2}+4$$
$$=[12(F_2+F_4+\cdots+F_{n-8})+10F_{n-6}+4]+(2F_{n-6}+10F_{n-2})$$
$$=F_{n-2}+(2F_{n-6}+10F_{n-2})$$
$$=11F_{n-2}+2F_{n-6}$$

对于$n\leqslant14$，利用前面所导出的递推关系我们甚易算出函数$F(n,4)$和$F(n,5)$之值：
$F(6,4)=37$；$F(7,4)=92$，$F(8,4)=236$，$F(9,4)=596$，$F(10,4)=1517$，
$F(11,4)=3846$，$F(12,4)=9770$，$F(13,4)=24794$，$F(14,4)=62953$；
$F(8,5)=1696$，$F(10,5)=18684$，$F(12,5)=205832$，$F(14,5)=2267544$。

注，定理3给出的$F(n,5)$递推关系实际上是一个3阶齐次线性递推关系：

$$a_i=11a_{i-1}+2a_{i-3},\ (i\geqslant4),\ a_1=1,\ a_2=14,\ a_3=154$$

可以通过解一个三次方程$x^3-11x^2-2=0$，进一步给出$F(n,5)$的显式（即用n直接表达的形式）。但我们认为从计算的角度讲，通过这种齐次线性递推关系由右端关于较小的n的已知信息可以十分方便地算出左端当前n的有关信息，上面已举出数值算例，因此就没有必要去解三次代数方程求出通解，追求理论上的完善。

对于网格$T_{n,N}$，我们也有下面的定理：

定理 4　网格$T_{n,m}$的诸点对之间的平均（直角）距离（即l_1—距离）等于$(n+m)/3$。

证．矩形网格$T_{n,m}$的点可表为集

$$V(n,m)=\{(x_1,x_2)|\ x_1=0,1,\cdots,n-1,\ \ x_2=0,1,\cdots,m-1\}$$

的元素。对于集$V(n,m)$的两点$x=(x_1,x_2)$和$y=(y_1,y_2)$．x与y之间的l_1-距离定义为$d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$。我们讨论函数，$\phi(n,m)=\sum d(x,y)$，其中求和是对$V(n,m)$中所有无序的点对$(x,y)$遍取的。我们有$\phi(n,m)=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in V}\sum\limits_{y\in V}d(x,y)=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in V}\sum\limits_{y\in V}\sum\limits_{i=1}^{2}|x_i-y_i|=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in V}\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{y\in V}|x_i-y_i|=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in V}\left(m\sum\limits_{y_1=0}^{n-1}|x_1-y_1|+n\sum\limits_{y_2=0}^{n-1}|x_2-y_2|\right)=$

$\frac{1}{4}\sum\limits_{x\in V}\left\{m(x_1(x_1+1)+(n-x_1-1)(n-x_1))+n(x_2(x_2+1)+(n-x_2-1)(n-x_2))\right\}=$

$\frac{1}{4}\left\{m^2\sum\limits_{x_1=0}^{n-1}(x_1(x_1+1)+(n-x_1-1)(n-x_1))+n^2\sum\limits_{x_2=0}^{m-1}(x_2(x_2+1)+(n-x_2-1)(n-x_2))\right\}=$

$\frac{1}{6}(m^2(n^3-n)+n^2(m^3-m))=\frac{n+m}{3}\binom{nm}{2}$。因此定理为真，因为$V(n,m)$中无序点对的数目等于$\binom{nm}{2}$。

定理 4 甚易推广到更一般的情况。

我们考虑下面的集

$$V(n_1,n_2\cdots,n_k)=\{(x_1,x_2\cdots,x_k)|\ x_i=0,1,\cdots,n_i-1,\ \ i=1,2,\cdots,k\}$$

对于两个向量$x=(x_1,\cdots,x_k)$和$y=(y_1,\cdots,y_k)$，我们定义其l_1-距离为$d(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{k}|x_i-y_i|$。

定理 5　集$V(n_1,n_2,\cdots,n_k)$的诸点对之间的平均距离等于$\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{k}\left(n_i-\frac{1}{n_i}\right)\Big/\left(1-1\Big/\prod\limits_{i=1}^{k}n_i\right)$。

参 考 文 献

〔1〕 Harary F. Graph Theory. Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1969

〔2〕 Mitchison G, Durbin R. Optimal Numbering of an N×N Array, SIAM J. Alg.Disc. Meth, 1986,7(4): 571～582

〔3〕 Rossier Y, Trotond M, Liebling Th M. Probalistic Exchange Algoritms and Euclidean Traveling Salesman problems, OR Spectrum, 1986,(8):151～164

〔4〕 Mollard M. Un Nouvel Encadrement du Nombre de Cycles Hamiltonieus du n-Cube, Europ. J. Combinatorics, 1988,(9):49～52

〔5〕 全理伟，常系数线性递推方程及其应用，重庆大学学报，1982，5(1):115～127