1990年11月　　重庆大学学报　　Vol.13, №.6
第13卷第6期　　JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY　　Nov.1990

一类稳定波方程的极大值原理与非平凡解

MAXIMUM PRINCIPLE AND NONTRIVAL SOLUTION FOR A STATIONARY WAVE EQUATION

杨　杰

Yang Jie

（应用数学系）

摘　要　讨论了一类非线性方程的边值问题，证明了极大值原理，并且给出了了其非凡解存在的一个必要条件。

关键词　非线性方程；轨道／极大值原理；非平凡解
中国图书资料分类法分类号　O175.14

ABSTRACT　The boundary-value problem of a non-linear equation is discussed. A necessary condition for existence of nontrival solution and a maximum priciple are proved.

KEY WORDS　nonlinear equation, orbit / maximum principle, nontrival solution.

0　引　言

V. Janovsky和J. Neuberg在〔3〕中讨论了以下非线性常微分方程边值问题：

$$\left.\begin{array}{ll} -u''+(\lambda-u^2)u=0 & x\in(0,\ 1) \\ u(0)=u(1)=u_0 & u_0\geqslant 0\ \text{为常数} \\ \lambda=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}u^2(x) & \end{array}\right\} \qquad (*)$$

方程(*)反应了一种等离子体共振激发达到稳定状态（即与时间无关）时的某些特征，这种等离子波是由激光引起的，详见〔1〕或〔2〕。上述问题一个显著的特点是其唯一的系数项有特殊的形式。Janovsky和Neuberg研究了(*)的非平凡解以及分歧问题，并且考虑了相应的复方程，本文讨论型如(*)，但具有高阶非线性项的一类边值问题，证明了一个极大值原理，并且给出了其非平凡解存在的必要条件，这里的非平凡解是指满足(1)，但不恒等于

收文日期　1988—11—03

常数u_0的函数。

1 极大值原理

我们考虑下述边值问题：

$$\left.\begin{aligned} & -u''+(\lambda-u^p)u^{p-1}=0 \qquad x\in(0,1) \qquad (a) \\ & u(0)=u(1)=u_0 \qquad u\geqslant 0 \text{ 为常数} \qquad (b) \\ & \lambda=\max_{0\leqslant x\leqslant 1} u^p(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中$p>0$为偶数

现令

$$H(u,q,\mu)=-\frac{1}{2}q^2+\frac{\mu}{p}u^p-\frac{1}{2p}u^{2p}$$

其中$\mu>0$为参数，则H为

$$-u''+(\mu-u^p)u^{p-1}=0$$

的第一积分，即$u\in C^2(-\infty,+\infty)$且

$$\left.\begin{aligned} & -u''+(\mu-u^p)u^{p-1}=0 \\ & u(0)=u_0,\ u'(0)=q_0 \end{aligned}\right\}$$

的充要条件为

$$H(u,q,\mu)=H(u_0,q_0,\mu) \qquad \forall x\in(0,1)$$

现$\forall h\in(-\infty,+\infty)$，定义轨道

$$O_h(\mu)=\{(u,q)\in R^2|H(u,q,\mu)=h\}$$

即

$$-\frac{1}{2}q^2+\frac{\mu}{p}u^p-\frac{1}{2p}u^{2p}=h$$

也即是

$$\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{2p}(u^p-\mu)^2=\frac{\mu^2}{2p}-h \tag{2}$$

因而，要使$O_h(\mu)\neq\phi$，其充要条件为

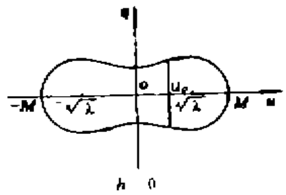
$$h\leqslant\frac{\mu^2}{2p}$$

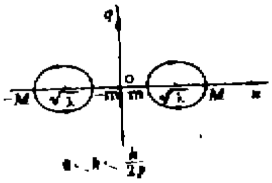
下图是当$p=2$时，分别对于h的不同情况作出的轨道$O_h(\mu)$，易知，所有轨道都是按顺时针方向运动的。

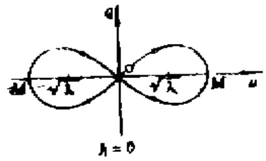
由(2)式得

$$u^p=\mu\pm\left[2p\left(\frac{\mu^2}{2p}-h-\frac{1}{2}q^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

设u为(1)非平凡解，则必有$\lambda>0$。(因为$\lambda=0$对应于平凡解$u=u_0=0$，这时若$u_0>0$，则无解)这时由(3)，有







$$u^p = \lambda \pm \left[2p\left(\frac{\lambda^2}{2p} - h - \frac{1}{2}(u')^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

因而，存在唯一的 $h \leqslant \frac{\lambda^2}{2p}$，使

$$(u(x),u'(x))_{0\leqslant x\leqslant 1} \subset O_h(\lambda)$$

若存在 $x_0 \in (0,1)$，使

$$\lambda = u^p(x_0) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} u^p(x)$$

则 $u'(x_0) = 0$，由(2)知

$$h = \frac{\lambda^2}{2p}$$

这时，由前面的讨论易知，$O_h(\lambda)$退缩为两点，也即(1)只有平凡解 $u \equiv u_0$。这与 u 是非平凡解的假设矛盾，所以，我们得到下面的极大值原理。

定理1　设 $u \in C^2[0,1]$ 为(1)的任意一个解，如果存在 $x_0 \in (0,1)$，使

$$\lambda = u^p(x_0) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} u^p(x)$$

则 $u \equiv u_0$

2　非平凡解存在的必要条件

下面为了方便，记

$$C(x) = (u(x),\ u'(x))_{0\leqslant x\leqslant 1}$$

其中，u 为(1)的解。

由前节的讨论知，存在唯一的 $h \leqslant \frac{\lambda^2}{2p}$，使

$$C(x) \subset O_h(\lambda)$$

故由 $O_h(\lambda)$ 的对称性及边界条件 (b) 知

$$u'(0)=\pm u'(1)$$

下面，我们就 h 的几种可能情况作略为详细的讨论，不失一般性，假设$u_0>0$。

1° 当 $h<0$ 时，由$H(u,q,\lambda)=h$得

$$q^2=\frac{2}{p}\left(\lambda-\frac{u^p}{2}\right)u^p-2h$$

$$\geqslant -2h>0$$

即$O_h(\lambda)$不与u轴相交，因而$C(x)$亦不与u轴相交，也就是说不存在$x\in[0,1]$，使

$$u'(x)=0$$

所以$u(x)$不能在(0，1)达到极值。

2° 当$0\leqslant h<\frac{\lambda^2}{2p}$时，由(b)，$C(x)$必经过$(M,0)$或$(m,0)$点，其中

$$M=[\lambda+(\lambda^2-2ph)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{p}}$$

$$m=[\lambda-(\lambda^2-2ph)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{p}}$$

若$C(x)$经过$(M,0)$点，也即存在$x_0\in[0,1]$，使这

$$u(x_0)=[\lambda+(\lambda^2-2ph)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}>\lambda^{\frac{1}{p}}$$

这与λ的定义矛盾

因此，$C(x)$只能经过$(m,0)$点，这时

$$m=\min_{0\leqslant x\leqslant 1}u(x)$$

而u在$[0,1]$上的最大值只能在边界上达到，即

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}u(x)=u(x_0)$$

又因为

$$u(x)\geqslant m\geqslant 0$$

所以

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}u^p(x)=u_0^p$$

因而

$$\lambda=u_0^p$$

3° 当 $h=\frac{\lambda^2}{2p}$时，$O_h(\lambda)$退缩为两点，这时所对应的解必为平凡解。

根据上面的讨论，(1)可以重新写为

$$\left.\begin{array}{l}-u''+(u_0^p-u^p)u^{p-1}=0\\ u(0)=u(1)=u_0\end{array}\right\}\qquad(4)$$

由轨道及边界条件的对称性，容易得到：

性质1　设u为(1)的非平凡解，则

(i)　$u(x)=u(1-x)$，$\forall x\in[0,1]$且

$$m=u\left(\frac{1}{2}\right)$$

(ii)　$u'(x)\geqslant 0 \qquad \forall x\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$

$u'(x)\leqslant 0 \qquad \forall x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right)$

(iii)　若$u'(0)=q_0$，则$u'(1)=-q_0$

(iv)　$h=H(m,0,u_0^p)=\dfrac{u_0^p m^p}{p}-\dfrac{m^{2p}}{2p}$

证明　由Gidas-Ni-Nirenberg定理（文(4)定理3）易得上述结论　　Q.E.D

定理2　若问题(1)有非平凡解，则存在常数$\xi>1$，使得

$$u_0=\xi(2\sqrt{p}\,I(\xi))^{\frac{1}{p-1}}$$

其中　$I(\xi)=\int_1^\xi((v^p-1)(2\xi^p-v^p-1))^{-\frac{1}{2}}dv$

证明　设u为(1)的非平凡解，则由性质1之(iv)，有

$$-\frac{1}{2}(u')^2+\frac{1}{p}u_0^p u^p-\frac{u^{2p}}{2p}=\frac{u_0^p m^p}{p}-\frac{m^{2p}}{2p}$$

特别地，当$x\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$时，由于$u'(x)\geqslant 0$，故

$$u'=\left[\frac{2u_0^p}{p}(u^p-m^p)-\frac{1}{p}(u^{2p}-m^{2p})\right]^{\frac{1}{2}}$$

由于u单调不减，所以

$$\frac{dx}{du}=\left[\frac{2u_0^p}{p}(u^p-m^p)-\frac{1}{p}(u^{2p}-m^{2p})\right]^{-\frac{1}{2}}$$

其中$m\leqslant u\leqslant u_0$，但$x(m)=\frac{1}{2}$，$x(u_0)=1$，故

$$\frac{1}{2}=\int_m^{u_0}\left[\frac{2u_0^p}{p}(u^p-m^p)-\frac{1}{p}(u^{2p}-m^{2p})\right]^{-\frac{1}{2}}du$$

令　$v=\frac{u}{m}$，$\xi=\frac{u_0}{m}$，故$\xi>1$，因此

$$\frac{1}{2}=m\int_1^\xi((v^p-1)(2\xi^{2p}-v^p-1))^{-\frac{1}{2}}dv\cdot\frac{\sqrt{p}}{m^p}$$

$$=\frac{\sqrt{p}}{m^{p-1}}I(\xi)$$

所以 $$m=(2\sqrt{p}\,I(\xi))^{\frac{1}{p-1}}$$

因而，我们得到

$$u_0=\xi(2\sqrt{p}\,I(\xi))^{\frac{1}{p-1}} \qquad Q.E.D$$

参 考 文 献

〔1〕 Dragila R. The ponderomotive force in a gas-dynamical description of laser-induced plama, J. Phys. D:Appl. Phys. 1978, 11:1683—1691

〔2〕 Lee K, et al. Theortical derivation of laser induced plasma profiles. Phys, Fluid. 1977, 20(1):51—54

〔3〕 Janovsky V, Neuberg I, Bifurcation in a stationary wave problem, Numer. Func Anal. Optimiz. 1985—86, 8(5&6), 589—598

〔4〕 Gidas B, W-M. Ni, Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys. 1979, 68: 209—243