非线性Hammerstein型积分方程的多重解及其应用

MULTIPLE SOLUTIONS OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF HAMMERSTEIN TYPE AND ITS APPLICATIONS

何 传 江
He Chuanjiang
（应用数学系）

摘 要 在讨论非线性Hammerstein型积分方程$(*)\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy$，$0<mesG<+\infty$时证明了，当$f(x,u)$满足文中假设(ii)—(iv)时，方程$(*)$具有三个互异解。作为其应用，还讨论了非线性Sturm-Liourille问题$(**)\ \frac{d^2u}{dx^2}+f(x,u)=0$，$au(0)+bu'(0)=0$，$cu(1)+du'(1)=0$，得到问题$(**)$三个互异$C^2$类解的存在性。本文使用变分方法，主要结果的证明基于文[1]中建立的“等高”山路定理。

关键词 变分法；解／山路定理；Hammerstein积分方程；Sturm-Liouville问题
中国图书资料分类法分类号 O175.5

ABSTRACT Nonlinear integral equations of Hammerstein type$(*)\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy$, where $0<\text{mes}\,G<+\infty$ are discussed in this paper. Under suitable hypotheses the author, with variational methods, obtained the existence of three solutions of Eq.$(*)$, and gave an application to the nonlinear Sturm-Liouville problems $(**)$ $\frac{d^2u}{dx^2}+f(x,u)=0$, $au(0)+bu'(0)=0$, $cu(1)+du'(1)=0$. The proof of the main result is based on the Mountain Pass Theorem with "zero height" (see[1]).

KEY WORDS variational method; solution / mountain pass theorem; integral equation of Hammerstein type; Sturm-Liorville problem.

收文日期 1989-10-25

1 主要结果

本文研究非线性Hammerstein型积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy=A\varphi(x) \tag{1}$$

多重解的存在性，其中G是R^N中可测集，$N\geqslant 1, 0<mesG<+\infty$．$f(x,u)$满足Caratheodory条件．$f(x,0)=0$，我们作如下一般假设：

(i) L_2正定核$k(x,y)$满足$\iint_{G\times G}|k(x,y)|^p dxdy<+\infty$，$p>2$

(ii) $f(x,u)$满足不等式

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1} \tag{2}$$

$$F(x,u)\leqslant\frac{1}{2}a_1u^2+b_1(x)|u|^{2-\sigma}+c_1(x) \tag{3}$$

其中$F(x,u)=\int_0^u f(x,t)dt$，$b\geqslant 0$，$0\leqslant a(x)\in Lq(G)$，q为p之对偶，$0<\sigma<2$，$b_1(x)\in L_{2/\sigma}(G)$，$c_1(x)\in L(G)$，$0\leqslant a_1<\lambda_0^{-1}$，$\lambda_0$为核$k(x,y)$的最大固有值．

(iii) $\lim\limits_{u\to 0}f(x,u)/u=a_0(x)$，$a_0(x)\in L^\infty(G)$且$a_0(x)\leq\lambda_0^{-1}$ (4)

(iv)存在$u_0\in L_2(G)$，$u_0\neq 0$，满足

$$\|u_0\|^2\leqslant 2\int_G F(x,Hu_0)dx \tag{5}$$

算子H的定义见后，本文恒用$\|\cdot\|$表L_2范数

定理 1 假设条件(i)—(iv)成立，那么积分方程(1)在$L_p(G)$中至少有三个互异解．

作为定理的应用，本文最后讨论了非线性Sturm-Liouville问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dx^2}+f(x,u)=0\\ au(0)+bu'(0)=0,\ cu(1)+du'(1)=0\end{cases} \tag{6}$$

其中$\Delta=bc-ac-ad\neq 0$，当f满足前述条件(ii)—(iv)时，问题(6)有三个互异C^2解。

定理的证明基于文[1]中建立的"等高"山路定理，即下面的

定理 2 设E是实Banach空间，$I\in C^1(E,R)$，满足(PS)条件，假设下面的条件成立：

(I_1)存在常数a，r，R，$0<r<R$使

$$I(x)\geqslant a,\ x\in A=\{x\in E\,|\,r<\|x\|<R\}$$

(I_2) $I(0)\leqslant a$且$I(e)\leqslant a$，对某个e，$\|e\|\geqslant R$，那么存在异于o和e的临界点$x_0\in E$，且当$I(x_0)=a$时，$x_0\in A$。

注1：若I有两个互异的局部极小点，则还有第三个临界点，这不难由定理2得到．

2 定理 1 的证明

将算子A分解为$A=KF$，其中K表线性积分算子$K\varphi(x)=\int_G K(x,y)\varphi(y)dy$；$F$表算子$F\varphi(x)=f(x,\varphi(x))$，根据(i)，$K$具有分解式$K=HH^*$，$H=K^{\frac{1}{2}}$：$L_2(G)\to L_p(G)$全连续，

H^*表H的共轭算子且H^*：$L_q(G)\to L_2(G)$全连续．

引理1 [2,3]方程(1)在$L_p(G)$中有解等价于方程

$$\psi=H^*FH\psi \tag{7}$$

在$L_2(G)$中有解

证明很简单，详见[3]

方程(7)的两异解可能对应于方程(1)的同一解。为此，取E为$\{u\in L_2(G)\mid Hu=0\}$在$L_2(G)$中的正交补空间。易知$E\neq\{0\}$，且H限制在E上是单映射．以下我们将在E上讨论变分泛函

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_G F(x,Hu)dx,\ u\in E \tag{8}$$

容易看出，若u_1，u_2是泛函的临界点，$u_1\neq u_2$，则Hu_1，Hu_2为方程(1)的解且$Hu_1\neq Hu_2$．

引理2　设$f(x,u)$满足(3)，那么I满足(PS)条件。

证　设$(u_n)\subset E$，$|I(u_n)|\leqslant M$，$I'(u_n)\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$

根据(3)，我们有

$$M\geqslant I(u_n)=\frac{1}{2}(u_n,u_n)-\int_G dx\int_0^{Hu_n(x)}f(x,s)\,ds$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(u_n,u_n)-\frac{1}{2}a_1(Hu_n,Hu_n)-\int_G b_1(x)|Hu_n|^{2-\sigma}dx-\int_G c_1(x)dx$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(u_n,u_n)-\frac{1}{2}a_1(Hu_n,Hu_n)-c_2(Hu_n,Hu_n)^{1-\frac{\sigma}{2}}-c_1$$

$$=\frac{1}{2}(u_n,u_n)-\frac{1}{2}a_1(Ku_n,u_n)-c_2(Ku_n,u_n)^{1-\frac{\sigma}{2}}-c_1$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(u_n,u_n)-\frac{1}{2}a_1\lambda_0(u_n,u_n)-c_2\lambda_0^{1-\frac{\sigma}{2}}(u_n,u_n)^{1-\frac{\sigma}{2}}-c_1$$

$$=\frac{1}{2}(1-a_1\lambda_0)\|u_n\|^2-c_2\lambda_0^{1-\frac{\sigma}{2}}\|u_n\|^{2-\sigma}-c_1 \tag{9}$$

其中$c_1=\int_G c_1(x)dx$，$c_2=\left(\int_G|b_1(x)|^{2/\sigma}dx\right)^{\sigma/2}$

注意到$a_1<\lambda_0^{-1}$，易知(u_n)有界，从而根据标准证明[2-3]可得I满足(PS)条件．

引理3　设$f(x,u)$满足(4)，那么存在$r>0$，满足．

$$I\big|_{\partial B_r}>0,\quad B_r=\{u\in E\mid\|u\|<r\} \tag{10}$$

进一步若$a_0(x)=0$，(10)可加强为

$$I\big|_{\partial B_r}>C_r,\ C_r\text{是依赖于}r\text{的正常数} \tag{10$'$}$$

证　根据(4)

$$\lim_{u\to0}F(x,u)/u^2=\frac{1}{2}a_0(x)$$

即

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(x,\varepsilon_x)/\varepsilon^2=\frac{1}{2}a_0(x)u^2$$

根据Fatou引理

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\int_G \varepsilon^{-2}F(x,\varepsilon Hu)dx\leqslant\frac{1}{2}\int_G a_0(x)|Hu|^2dx$$

对于充分小的$\varepsilon>0$，我们有

$$\int_G F(x,\varepsilon Hu)\leqslant\frac{1}{2}\int_G a_0(x)|\varepsilon Hu|^2 \qquad (11)$$

又

$$\int_G a_0(x)|\varepsilon Hu|^2<\lambda_0^{-1}\int\varepsilon^2|Hu|^2=\lambda_0^{-1}\varepsilon^2(Hu,Hu)$$

$$=\lambda_0^{-1}\varepsilon^2(Ku,u)\leqslant\varepsilon^2\|u\|^2 \qquad (12)$$

结合(11)、(12)，不难知

$$I(\varepsilon u)=\frac{1}{2}\varepsilon^2\|u\|^2-\int_G F(x,\varepsilon Hu)dx>0,\quad \varepsilon>0\text{ 充分小} \qquad (13)$$

这蕴涵(10)。

当$a_0(x)=0$，$(10)'$的证明是标准的，为便于比较，我们仍给出证明。

根据(4)，存在$\delta>0$，满足

$$|f(x,u)|\leqslant(2\|k\|_2)^{-1}|u|,\quad 0<|u|<\delta$$

其中$\|k\|_2$表示k：$L_2(G)\to L_2(G)$的范数，于是

$$F(x,u)\leqslant(4\|k\|_2)^{-1}u^2,\quad |u|<\delta \qquad (14)$$

另一方面，根据(2)

$$F(x,u)\leqslant a|u|^2+bp^{-1}|u|^p,\quad \forall x\in G,\quad u\in R^1 \qquad (15)$$

结合(14)、(15)，存在$c_3>0$使

$$F(x,u)\leqslant(4\|k\|_2)^{-1}u^2+c_3|u|^p,\quad x\in G,\quad u\in R^1 \qquad (16)$$

于是，对$u\in E$

$$\int_G F(x,Hu)dx\leqslant(4\|k\|^{-1})\int_G|Hu|^2dx+c_3\int|Hu|^p dx$$

$$\leqslant(4\|k\|)^{-1}(Ku,u)+c_3\|Hu\|_p^p$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\|u\|^2+c_3'\|H\|^p\|u\|^p$$

从而

$$I(u)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|^2-c_3'\|H\|^p\|u\|^p,\quad \forall u\in E \qquad (17)$$

这蕴涵$(10)'$

定理的证明：显然$I(0)=0$，考虑水平集$I_0=\{u\in E\mid I(u)\leqslant 0\}$。由引理知，$I\big|_{\partial B_r}>0=I(0)$，又条件(iv)表明$I(u_0)\leqslant 0$，且$r>0$充分小时，$u_0$位于$Br$外面，从而$I_0$在$Br$和$\overline{B}_r^c$中各

有一分支E_1，E_2。设 $m_i=\inf_{E_i} I$，$i=1,2$，不难知m_i是有限数，根据形变引理，易知m_i，$i=1,2$是I的临界值，这表明I有两个不同的局部极小点，根据"等高"山路定理[1]不难得到定理的结论。

最后，引用定理1来研究常微分方程边值问题(6)。

定理 2　设$f(x,u)$满足前述条件(ii)—(iv)，那么问题(6)至少有三个C^2解。

证　问题可转化为寻求积分方程

$$u(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y,u(y))dy \tag{18}$$

属于$C[0,1]$的解，其中Green函数$k(x,y)$表达式[4]为

$$k(x,y)=\begin{cases}\Delta^{-1}(ax-b)(cy-c-d) & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ \Delta^{-1}(ay-b)(cx-c-d) & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{19}$$

$k(x,y)$自然满足条件(i)，因此，根据定理1，方程(18)在$L_p[0,1]$中至少有三个不同解u_i，$i=1,2,3$即

$$u_i(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y,u_i(y))dy \quad i=1,2,3 \tag{20}$$

由于算子$F\rho(x)=f(x,\rho(x))$映$L_p[0,1]$入$L_q[0,1]$，$p^{-1}+q^{-1}=1$，故$f(x,u_i(x))\in L_q[0,1]$，再根据(20)并注意到$k(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上的一致连续性，即知$u_i(x)\in C[0,1]$。

参考文献

[1] Pucci P, Serrin J. A Mounfain Pass Theorem. J Diff. Equations, 1985, 60: 142—149

[2] Ambrosetti A, Rabinowitz P H. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications. J. Funct. Analysis, 1973, 14: 349—381

[3] 郭大钧。非线性泛函分析。济南：山东科技出版社，1985

[4] 孙经先．非线性Hammerstein型积分方程正解的存在性及其应用．数学年刊，1988，9A(1)：90—96