逼近恰当罚函数法

THE APPROXIMATING EXACT PENALTY FUNCTION METHOD

付 鹂

Fu Li

（应用数学系）

摘 要 对于实际求解一般非线性规划问题，"恰当罚函数法"尚属一种未能实现的思想。本文得出的有关理论结果及其算法——"逼近恰当罚函数法"——使这一思想得以实现，并且在计算上不存在使用其它方法时所面临的数值困难。

关键词 约束优化 算法 恰当罚函数

中国图书资料分类法分类号 O221

ABSTRACT The "Exact Penalty Function Method" remains not any more than an idea for practically solving general nonlinear programming problems. This idea is carried out because of the theoretical results derived in this paper and the corresponding algorithm—— "the Approximating Exact Penalty Function Method". Moreover, it does not result in the numerical difficulty using the new algorithm while it does using the other existing methods.

KEY WORDS constrained optimizations, algorithm, exact penalty function

0 引言

设约束优化问题是

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &s.t.\quad h_i(x)=0,\quad i=1\sim l \\ &\qquad\quad g_j(x)\geqslant 0,\quad j=1\sim m \\ &\qquad\quad x\in E\subset R^n. \end{aligned} \tag{1}$$

在$f(x)$，$h_i(x)$及$g_j(x)$均为一般非线性函数的情况下，有两类主要传统解法[1-4]，即罚函数法和乘子法。前者原理简单，易于实现，但突出的缺点是易导致病态子问题[1,3,4]；后者必须调整多个参数，难以找出调整策略[1]。除以上方法外，还有一种"恰当罚函数法"，由于对

收文日期 1989-12-29

一般实际问题根本无法找出其恰当罚函数[1]，故尚处于设想阶段。本文得出的理论结果及其新算法，使这种理想的方法实用化。

1　原　理

设

$$\varphi(y)=|\min\{0,\ y\}|^r,\ (r>0),$$
$$(\text{显然}\varphi(y)\geqslant 0;\ \varphi(y)=0\Longleftrightarrow y\geqslant 0); \qquad (2)$$

$$S(x)=\sum_{i=1}^{l}|h_i(x)|^t+\sum_{j=1}^{m}\varphi(g_j(x)),\ (t>0),\ (\text{显然}S(x)\geqslant 0)。\qquad (3)$$

问题(1)中的约束集

$$C=\{x\in E\subset R^n\,|\,h_i(x)=0,\ i=1\sim l;\ g_j(x)\geqslant 0,\ j=1\sim m\} \qquad (4)$$

成为

$$C=\{x\in E\subset R^n\,|\,S(x)=0\}; \qquad (5)$$

设x^*，f^*分别为(1)的最优点及最优值，则

$$f^*=f(x^*)=\min_{x\in C}f(x)\ \text{且}\ x^*\in C\ \text{即}\ S(x^*)=0; \qquad (6)$$

引入增广目标函数

$$F(x,\ \alpha)=\varphi(\alpha-f(x))+S(x); \qquad (7)$$

显然

$$F(x,\ \alpha)\geqslant 0;\ F(x,\ \alpha)=0\Longleftrightarrow \alpha\geqslant f(x)\text{且}S(x)=0。\qquad (8)$$

考虑无约束问题$\min F(x,\ \alpha)$并设$x^*(\alpha)$，$F^*(\alpha)$分别为其最优点和最优值，则

$$F^*(\alpha)=F(x^*(\alpha),\ \alpha)=\min_{x\in E}F(x,\ \alpha),(\text{显然}F^*(\alpha)\geqslant 0)。\qquad (9)$$

下面给出：

定理1　$x^*=x^*(f^*)$。

〔证〕　令$\alpha=f^*$，则$0\leqslant F^*(f^*)=F(x^*(f^*),\ f^*)\leqslant F(x^*,\ f^*)=\varphi(f^*-f(x^*))+S(x^*)=0$，$\Longrightarrow F(x^*(f^*),\ f^*)=\varphi(f^*-f(x^*(f^*)))+S(x^*(f^*))=0$，$\Longrightarrow S(x^*(f^*))=0$且$f(x^*(f^*))\leqslant f^*=f(x^*)\leqslant f(x)$，$\forall x$满足$S(x)=0$，故$x^*(f^*)$是(6)的解，即$x^*=x^*(f^*)$。

此定理说明当原约束问题的最优值f^*已知时，$F(x,\ f^*)$即为其恰当罚函数；一般f^*是未知的，但此时有：

定理2　$F^*(\alpha)=0\Longleftrightarrow f^*\leqslant\alpha$

〔证〕　当$F^*(\alpha)=F(x^*(\alpha),\alpha)=\varphi(\alpha-f(x^*(\alpha)))+S(x^*(\alpha))=0$，则$f(x^*(\alpha))\leqslant\alpha$且$S(x^*(\alpha))=0$，故$f^*=f(x^*)\leqslant f(x^*(\alpha))\leqslant\alpha$；反之当$f^*=f(x^*)\leqslant\alpha$，则$0\leqslant F^*(\alpha)=F(x^*(\alpha),\ \alpha)\leqslant F(x^*,\ \alpha)=\varphi(\alpha-f(x^*))+S(x^*)=0$，故$F^*(\alpha)=0$。

推论　$F^*(\alpha)>0 \Longleftrightarrow \alpha<f^*$。

〔证〕　$\because \forall\alpha$，$F^*(\alpha)\geqslant 0$，故由定理2即知推论成立。

定理2及其推论说明通过判别无约束问题（9）的最小值$F^*(\alpha)$便可确定f^*的上下界。

2　算　法

定理2及其推论提供了缩小f^*所在区间的原理，再结合定理1即保证了最终逼近恰当罚函数从而求得x^*。算法如下：

1）　给定初始区间$(\alpha,\beta)\ni f^*$，则$F^*(\alpha)>0$，$F^*(\beta)=0$；

2）　令$\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$，求出$F^*(\gamma)=\min\limits_{x}F(x,\gamma)$，若$F^*(\gamma)>0$，则令$\alpha=\gamma$，返回1）；否则令$\beta=\gamma$，返回1）；

3）　重复　1）、2），直到$\beta-\alpha\leqslant\varepsilon$，则$x^*=x^*(\beta)$（必为内点），$f^*=\beta$。

3　注　记

1．初始区间$(\alpha,\beta)\ni f^*$总是能够找到的：设x_0是$f(x)$的无约束极小点，x_1是容许点，则总有$f(x_0)\leqslant f^*\leqslant f(x_1)$；另外缩小区间还可用黄金分割法。

2．本算法及其原理与罚函数法同样简单，但由于增广函数$F(x,\alpha)$最终所逼近的是恰当罚函数$F(x,f^*)$，故不会象罚函数法那样导致病态子问题[5]；与乘子法相比，所调整的参数仅是一维且具有简明的方向性，故极易实现。

（本文承蒙段虞荣教授审阅、修改和指导，在此衷心致谢！）

参 考 文 献

〔1〕 Avriel, M.: Nonlinear Programing—Analysis and Methods, Prentice-Hall(1976);

〔2〕 席少霖、赵凤治："最优化计算方法"，上海科技出版社，1983；

〔3〕 Gill, P. E. & Murray, W.: Numerical Methods for Constrained Optimization, Academic Press Inc. (1974);

〔4〕 Himmelblau, D. M.: Applied Nonlinear Programining, MacCraw-Hill Book Co. (1972);

〔5〕 Lootsma, F. A.: Boundary Properties of Penalty Functions for Constrained Minimization, Philips Res. Repts. Suppl. No. 3, (1970).