

频域分析的实阻性模型

THE REAL RESISTIVE MODEL FOR
FREQUENCY-DOMAIN ANALYSIS

吴宁 朱拥军

Wu Ning Zhu Yongjun

(电气工程系)

摘要 本文应用复数网络理论,提出了一种用于频域分析的新模型—实阻性模型。该模型仅含电源与电阻类元件,因而对其建立的网络方程不含复数。在此模型的基础上,文中给出了一种计算机辅助频率特性分析的新算法。该算法避免了传统算法中因复数运算而带来的困难。算法简便,易于推广。

关键词 频域分析;回转器材/复数网络理论;实阻性模型

中国图书资料分类法分类号 TM131.4; TM133

ABSTRACT A new model for frequency-domain analysis—the real resistive model which is based on Complex Network Theory is proposed in this paper. The network equations formed with the new model without contain complex numbers because there are only sources and resistive elements in the model. A CAA algorithm for frequency analysis by using the new model is also given. It is shown that the trouble with the complex operation in the traditional algorithm has been avoided. The algorithm presented in this paper is simple and convenient, hence it is easy to popularize.

KEY WORDS frequency domain analysis; gyrators / complex network theory; real resistive model

0 引言

在传统的频域分析法中,由于直接利用相量模型,网络参数及网络变量均为复数,需要建立和求解复数方程。在计算机辅助电路分析与设计中,复数运算使交流分析在矩阵的存贮及方程的求解等方面均较其它电路复杂,须占用较多机时及内存。

针对以上问题,本文以复数网络理论为基础,将用以进行交流分析的相量模型网络视为含有虚数电阻的复数网络,进而将其变换为等效的实参数纯阻性网络。这种频域实阻性模型为在实数范围内进行频域分析提供了数学模型。以此为基础进行频域分析,不仅网络方程系数矩阵各元素及变量均为实数,而且由于实阻性模型拓扑结构的特点,矩阵具有明显的对称性和稀疏性,且矩阵元素与网络元件间有清晰的对应关系。这些特性十分有利于矩阵元素的选值、节约内存以及方程的化简。

利用频域实阻性模型,文中提出了一种计算机辅助频率分析的新算法。该算法通过巧妙选

择修正节点法的增补变量,使含角频率 ω 的项聚集于矩阵的某些部分,使方程易于简化,且在多频率点下作频率响应计算时,显著减小计算量。该算法特别有利于对电阻元件数与动态元件数相差较大的电路进行频率特性分析。

1 复数网络理论简介

在复数网络和系统中,任何信号及参数均为复数。一个复数时间信号 $x(t)$,可以分解为其实部信号 $x_r(t)$ 与虚部信号 $x_i(t)$,即

$$x(t) = x_r(t) + jx_i(t) \quad (1)$$

$x_r(t)$ 与 $x_i(t)$ 都是时间 t 的实函数。

对式(1)进行拉普拉斯变换,得

$$X(s) = X_r(s) + jX_i(s) \quad (2)$$

式中实部 $X_r(s)$ 及虚部 $X_i(s)$ 都是复频率 s 的实函数(即当 $\text{Im}[s] = 0$ 时函数值为实数)。

复数系统的转移函数为

$$H(s) = H_r(s) + jH_i(s) \quad (3)$$

当一个复数信号 $F(s) = F_r(s) + jF_i(s)$ 作为输入而作用于该系统时,系统的输出为复数信号 $F(s) = Y_r(s) + jY_i(s)$ 。系统的输入—输出关系为

$$Y(s) = F(s)H(s) \quad (4)$$

故有

$$Y_r(s) = F_r(s)H_r(s) - F_i(s)H_i(s) \quad (5-a)$$

$$Y_i(s) = F_r(s)H_i(s) + F_i(s)H_r(s) \quad (5-b)$$

复数系统的以上输入—输出关系可用如下框图表示。

在复数电网络中,电压、电流以及各类电路元件的参数均为复数。例如,复数电阻 $R = R_r + jR_i$,实数电路元件和虚数电路元件均可视为复数电路元件的特例。

60年代以来,复数网络理论逐渐得到了实际的应用。迄今,它主要用于网络综合、滤波器设计方面。

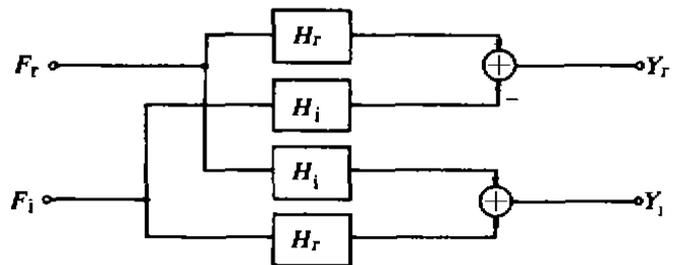


图1 复数系统的输入—输出关系框图

2 复数电阻网络的实等效法则

研究图2所示复数电阻 $R = R_r + jR_i$ 。其二端复电压为 $v = v_r + jv_i$,流过的复电流为 $i = i_r + ji_i$ 。复数电压与复数电流间的关系为

$$v = Ri \quad (6)$$

$$v_r = R_r i_r - R_i i_i \quad (7-a)$$

$$v_i = R_r i_i + R_i i_r \quad (7-b)$$

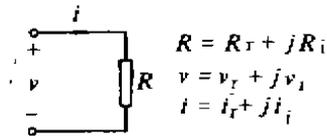


图2 复数电阻

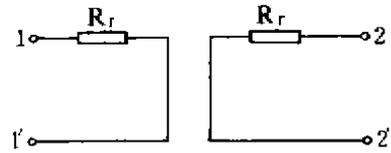
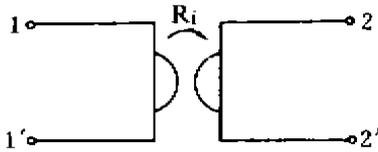
图3 两个 R_r 构成的二端口网络

图4 回转器

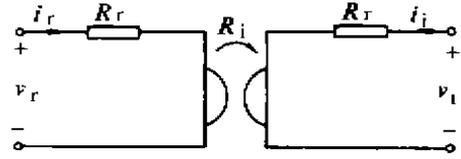


图5 复数电阻的等效实模型

根据式(7),图2所示复数电阻的电压、电流关系可表示为如下矩阵形式的方程:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_r \\ v_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_r & -R_i \\ R_i & R_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_r \\ i_i \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{pmatrix}}_{Z_r} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -R_i \\ R_i & 0 \end{pmatrix}}_{Z_i} \begin{pmatrix} i_r \\ i_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

上式右端矩阵 Z_r 为图3所示二端口网络的开路阻抗矩阵,矩阵 Z_i 为图4所示回转器的开路阻抗矩阵。故矩阵 $Z_r + Z_i = \begin{pmatrix} R_r & -R_i \\ R_i & R_r \end{pmatrix}$ 为由以上两个二端口网络串联而得的图5所示二端口网络的开路阻抗矩阵。因此,复数电阻 $R = R_r + jR_i$ 的等效实模型就是图5所示二端口网络,其中所有参数均为实数。等效实模型的左半部为信号的实部所在的部分,称为“实部网络”;右半部为信号的虚部所在的部分,称为“虚部网络”。实、虚两部分网络间由回转器相耦合。

虚数电阻 jR_i 可视为实部 $R_r = 0$ 的复数电阻,故其等效实模型即图4所示的回转器。

由复数电阻的等效实模型,可以推论得到一般复数电阻网络的下列实等效法则:

1) 一个复数电阻网络的等效实参数模型由实部网络、虚部网络两部分构成。实部网络为信号的实部所在部分;虚部网络为信号的虚部所在部分。实、虚两部分网络的拓扑结构均与原网络相同。

2) 原网络中复数电阻(电导)的实部和实数电阻(电导)在等效网络的实、虚两部分网络中保持不变。原网络中每一复数电阻(电导)的虚数部分或一个虚数电阻(电导)则变换为等效网络中的一个回转器,成为使实、虚两部分网络相耦合的“纽带”。回转器的回转电阻(回转电导)等于电阻(电导)虚部之值,回转方向由实部网络(虚部网络)指向虚部网络(实部网络)。

3) 原网络中的复数输入信号,其实部与虚部分别作为等效网络中实、虚两部分网络的输入信号,策动点位置与原网络相同。

以上实等效法则可根据对原复数网络及其等效实参数网络建立的 KCL、KVL 方程以及支路电压、电流关系方程均相同得到证明^[5]。

3 频域实阻性模型

相量法是进行频域分析的有效方法。用相量法分析正弦稳态电路时,网络变量变换为相应

的频域变量(相量),网络参数变换为频域导出参数(阻抗、导纳),整个网络采用相量模型。其中,电感和电容元件的频域阻抗为 $j\omega L$ 和 $-j\frac{1}{\omega C}$,即为虚数,正是由于这种虚数参数的出现,给频域分析引入了复数运算。电感类及电容类的二端口元件和多端元件也具有以上特点,其频域模型必然出现虚数的阻抗(及导纳)参数。

从复数网络理论的观点来看,可以把频域相量模型视为一个复数电阻网络,相量模型中的电阻参数即复数电阻网络中的实数电阻,而相量模型中动态元件的虚数值的阻抗($j\omega L$ 、 $-j\frac{1}{\omega C}$ 等)则被看作是复数电阻网络中的虚数电阻。然后,利用前节提出的复数电阻网络的实等效法则,将其变换为等效的实参数网络,它也就是原频域相量模型的等效实阻性模型。例如,图6所示频域网络的等效实阻性模型为图7所示网络。

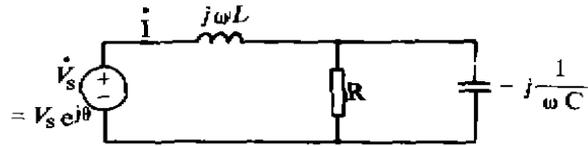


图6 频域网络

值得注意的是,原网络中的所有动态元件(电感、电容等)均转化为等效网络中的具有实参数的阻性元件回转器,整个网络变为实参数电阻性网络,这就为不含复数运算的正弦稳态分析创造了前提条件。顺便指出,对于二端口耦合电感元件,同理可导出其等效实阻性模型为四端口回转器^[5]。

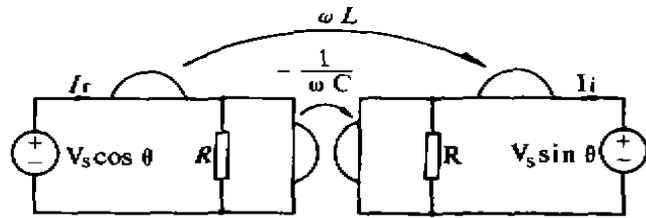


图7 频域网络的等效实阻性模型

4 频率特性分析的一种新算法—— ω 聚集法

根据本文提出的频域实阻性模型,可建立如下形式的节点方程:

$$\begin{pmatrix} Y_r & -Y_r(\omega) \\ Y_r(\omega) & Y_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_r \\ V_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{sr} \\ I_{sr} \end{pmatrix} \quad (9)$$

式中 V_r 、 V_r 为实部、虚部网络的节点电压向量; I_{sr} 、 I_{sr} 为实部、虚部网络的节点电源电流向量; Y_r 为网络中电阻对节点导纳矩阵的贡献; $Y_r(\omega)$ 为等效网络中的回转器(对应于原网络的动态元件)对节点导纳矩阵的贡献。

方程(9)为实数方程,其中系数矩阵具有明显的对称性及稀疏性,矩阵中各元素与网络元件有清晰的对应关系。这些特点在 CAA 中都有利于减少内存及方程的化简。

在电子线路的分析及设计中,常常需要作频率特分析。当频率改变时,方程(9)的系数矩阵将随角频率 ω 而改变,若计算的频率点较多,将带来很大的计算量。针对此问题,本文提出了如下的“ ω 聚集法”。

利用频域实阻性模型,将其中各回转器的两支路电流选作修正节点方程的增补变量,同时,对于每一回转器,增加以下两个支路方程:

$$I_{ra} = Y_r(V_{r(a)} - V_{r(a-1)}) \quad (10-a)$$

$$I_{rb} = Y_r(V_{r(b)} - V_{r(b-1)}) \quad (10-b)$$

式中 I_{ra} 、 I_{rb} 为回转器二支路电流; Y_r 为回转电导(即 ωC 或 $-\frac{1}{\omega L}$ 等); $V_{r(a)}$ 、 $V_{r(a-1)}$ 及 $V_{r(b)}$ 、 $V_{r(b-1)}$ 为

回转器四端的节点电压;下标 $k, k-1$ 为原网络的节点编号。

根据方程(9)和(10),写出修正节点方程,再调整变量排序,可得如下方程:

$$\begin{bmatrix} Y_r & A_{cl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_r & A_{cl} \\ 0 & 1 & -Y_d(\omega) & 0 \\ Y_d(\omega) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_{rd} \\ V_r \\ I_{rd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ I_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中 A_{cl} 为原网络的关联矩阵中对应于动态元件的分块阵。

方程(11)的系数矩阵中,所有含角频率 ω 的元素均聚集于子阵 $Y_d(\omega)$ 内,且位于虚线以下部分。在多频率点分析时,矩阵虚线以上部分的化简可一次性完成,而对于不同的 ω , 仅需反复计算下部分。此外,该系数矩阵虽然直接是由等效实阻性模型得到的,然而,其中各分块阵的元素与原网络均有明确的对应关系,整个矩阵完全可以根据原网络形成。换言之,这里必须用到相量网络的等效实阻性模型的概念,却并不需要具体绘出等效实阻性模型的电路图。

化简式(11)虚线以上部分所代表的方程。注意到系数矩阵虚线以上部分中的左上部分与右下部分相同,这不仅在建立方程时可节约存储空间,而且在化简方程时可只对一个 Y_r 进行对角线化(另一只需作方程右边的消去及回代)。于是,式(11)虚线以上部分方程化为:

$$1 \cdot V_r + A_{cl} I_{rd} = I_r \quad (12-a)$$

$$1 \cdot V_r + A'_{cl} I_{rd} = I_r \quad (12-b)$$

式中 A'_{cl}, I_r, I_r 分别为 Y_r 对角线化后 A_{cl}, I_r, I_r 的相应变化。

式(11)虚线以下部分可写为以下方程:

$$1 \cdot I_{rd} - Y_d(\omega) V_r = 0 \quad (13-a)$$

$$Y_d(\omega) V_r + 1 \cdot I_{rd} = 0 \quad (13-b)$$

代式(12)入式(13),消去 V_r, V_r , 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & Y_d(\omega) \\ -Y_d(\omega) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{rd} \\ I_{rd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中 $Y_d(\omega) = Y_d(\omega) A_{cl}, I_r = Y_d(\omega) I_r, I_r = Y_d(\omega) I_r$ 。由方程(14)解出回转器支路电流向量 I_{rd}, I_{rd} , 代入式(12), 即可方便地求得节点电压向量 V_r 和 V_r 。

方程(14)中矩阵的阶数等于实阻性模型中回转器数(即原网络中 L, C 元件总数)的二倍。若原网络中动态元件数远少于电阻元件数,方程(14)的规模很小,则在不同频率下需要反复计算的工作量很小。反之,若电阻元件数远少于动态元件数,可先对网络实行“虚实变换”(即用 $-j$ 进行阻抗定标),而变为前一类网络,并在方程化简的算法上作相应改变。经虚实变换后的网络在电压激励下,任意电压响应与原网络相同,电流响应乘以 j 即为原网络中相应的电流响应。

在滤波器设计中,常采用具有低灵敏度特性的双端接载 LC 梯形结构。这是一种含多个电感、电容元件而只含两个电阻元件的网络。若用本文提出的算法分析频率特性,可先对网络实行虚实变换,变为只含两个动态元件而其余均为电阻元件的网络,则方程(14)矩阵仅为4阶的。由式(14)解出的 I_{rd}, I_{rd} 对应于原网络二端接电阻的电流,进而可方便地得到转移函数(转移电压比),而无需再代回式(12)去求 V_r, V_r 。根据本文提出的模型及算法,对一个含13个 L, C 元件的带通滤波器作了频率特性的计算,验证了算法的正确及有效性。

5 结 论

1) 本文提出了一种新的频域模型——相量网络的等效实阻性模型,为不含复数运算的正弦稳态分析提供了数学模型。这种模型的提出,使复数网络理论在网络分析方面得到了新的应用。

2) 频域实阻性模型具有若干有利于计算机辅助分析的特点。便于直接形成网络方程,方程的系数矩阵具有对称性和稀疏性,因而易于化简。

3) 以频域实阻性模型为基础,文中提出了一种进行频率特性分析的新算法—— ω 聚集法。该算法适用于较多频率点下的频率响应计算。

参 考 文 献

- 1 CHua L O, Lin Penmin. Computer - Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques. Prentice-Hall
- 2 Lang G R, Brackett P O. Complex Analoguz Filters. In: Proc European Conf Circuit Theory Design. Netherland, 1981. 412~419
- 3 Regala P A, Mitra S K. Low-sensitivity Active Filter Realization Using A Complex All-Pass Filters. IEEE Trans on Circuit and Systems, 1987, CAS-34(4): 390~399
- 4 Belevitch V. Classical Network Theory. San Francisco: Holder-day, 1968
- 5 朱拥军. 一种新的频域分析模型及其在 CAD 中的应用. 重庆大学硕士学位论文. 1989