1991年3月
第14卷第2期

重 庆 大 学 学 报
JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY

Vol. 14, №. 2
Mar. 1991

带临界指数非线性椭圆方程非平凡解的存在性*

THE EXTENCE OF NONTRIVIAL SOLUTIONS FOR NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS INVOLVING CRITICAL SOBOLEV EXPONENTS

何传江
He Chuanjiang
（应用数学系）

摘　要　讨论了有界区域上的 Dirichlet 问题 $-\triangle u-\lambda u=a(x)|u|^{p-1}u+f(x,u),x\in\Omega$，$u=0,x\in\partial\Omega$ 非平凡解的存在性。其中 $p=\dfrac{n+2}{n-2},n\geqslant 3,f(x,u)$ 是关于 $|u|$ 的增涨阶低于 p 的连续函数，λ 是正参数。我们先证明了一个不具(PS)条件的临界点定理。据此并利用 Sobolev 嵌入定理的最优常数，克服了失去紧性的困难，从而得到非平凡解的存在性。与 Brezis－Nirenberg 结果不同的是，我们没有假设 $\lambda<\lambda_1$，λ_1 是 $-\triangle:H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ 的第一本征值。

关键词　变分法；非线性椭圆方程/非平凡解；临界 Sobolev 指数

中国图书资料分类法分类号　O175.29

ABSTRACT　The existence of nontrivial solutions of the Dirichlet $-\triangle u-\lambda u=a(x)|u|^{p-1}u+f(x,u)$ in $\Omega,u=0$ on $\partial\Omega$ is studied, in which $p=\dfrac{n+2}{n-2},n\geqslant 3,f(x,u)$ is a lower－order perturbation of $|u|^p$ in the sense that $=\lim\limits_{|u|\to\infty}f(x,u)/|u|^p=0,\lambda>0$ is a real parameter. First a critical point theorem without the (PS) condition is proved. The problem of the lack of compactness is solved. In our main results we don't suppose $\lambda<\lambda_1$ which is necessary for the relative results of Brezis－Nirenberg, where λ_1 is the first eigenvalue of the operator $-\triangle:H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$.

KEY WORDS　variational method; nonlinear elliptic equation/nontrivial solution; critical Sobolev exponent

0　引　　言

在非线性椭圆方程边值问题

$$\begin{cases}-\triangle u=g(x,u) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

其中 $g(x,u)=O(|u|^p)$ 在 $u=\infty,1<p\leqslant\dfrac{n+2}{n-2},n\geqslant 3$ 的研究中，临界点方法是一强有力的工

* 收文日期　1989－10－20

具。当$p<\frac{n+2}{n-2}$时，利用嵌入$H_0^1(\Omega)\to L^{p+1}(\Omega)$的紧性，对$g$作适当的补充假设，可证(1)对应的变分泛函

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega G(x,u)\mathrm{d}x \tag{2}$$

这里$G(x,t)=\int_0^t g(x,s)\mathrm{d}s, x\in\Omega, t\in R$满足(PS)条件。从而，容易利用已知的临界点存在性定理证明泛函I的临界点存在，进而可解决问题(1)解的存在性。

但是，当$p=\frac{n+2}{n-2}$时，这类问题出现于许多数学分支，也见于物理问题中(见[1]及其参考文献)。因为$p+1=\frac{2n}{n-2}$是嵌入$H_0^1(\Omega)\to L^p(\Omega)$的临界指数，嵌入$H_0^1(\Omega)\to L^{p+1}(\Omega)$是非紧的，泛函$I$一般不再满足(PS)条件，直接使用标准的变分方法存在着极大的困难。

Brezis－Nirenberg在文[1]中讨论了如下的问题

$$\begin{cases}-\triangle u-\lambda u=|u|^{p-1}u+f(x,u) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{3}$$

其中$f(x,0)=0$且$f(x,u)$是关于$|u|^p$的低阶扰动项，即在$u=\infty$处满足$f(x,u)=o(|u|^p)$，$p=\frac{n+2}{n-2}$，$n\geqslant 3$。Ω是R^n中光滑有界区域，$\lambda>0$是实参数。在限制$\lambda<\lambda_1$下，λ_1是$-\triangle:H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$的第一本征值，得到下面的主要结果：

定理(BL) 设f满足一定的条件(类似于本文条件)，如果存在$v_0\in H_0^1(\Omega)$，$v_0\neq 0$，满足

$$\max_{t\geqslant 0}I(tv_0)<\frac{1}{n}S^{n/2} \tag{4}$$

其中S是嵌入$H_0^1(\Omega)\to L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$的最优常数，那么，问题(3)至少有一非平凡解。

本文将取消$\lambda<\lambda_1$的限制，进一步讨论这一问题。即讨论问题

$$\begin{cases}-\triangle u-\lambda u=a(x)|u|^{p-1}u+f(x,u) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{5}$$

其中$a(x)\geqslant\delta>0$是Ω是的连续函数，其余假设同前。

为此，我们先证明一个不含(PS)条件的临界点定理，即下面的

定理1 设E是一实Banach空间，$E=V\oplus X$，V是有限维子空间。$I\in C^1(E,R)$满足如下条件：

(I_1) 存在常数$\rho,\alpha>0$，使得$I|_{\partial B_\rho\cap X}\geqslant\alpha$；

(I_2) 存在$v\in\partial B_1\cap X$和常数$R>\rho$，使得$I|_{\partial Q}\leqslant 0$。

其中$Q\equiv(\bar{B}_R\cap V)\oplus\{rv|0\leqslant r\leqslant R\}$。

那么存在序列(x_j)满足(PS)$_c$假设，即

$$I(x_j) \to c, I'(x_j) \to 0$$

这里

$$c = \inf_{h\in\Gamma} \max_{x\in Q} I(h(x))$$

$$\Gamma = \{h \in C(Q,E) \mid h(x) = x, x \in \partial Q\}.$$

注1：如果$I|_V \leqslant 0$且存在$v \in \partial B_1 \cap X$和常数$\bar{R} > \rho$，使得$I(x) \leqslant 0$，对$x \in \mathrm{Span}\{V, v\}$，$\|x\| > \bar{R}$，那么，条件$(I_2)$被满足。

为了给出本文的主要结果，先作如下的一般假设

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x,u) \in C^0(\bar{\Omega} \times R); \\ \text{b)} & \lim\limits_{u\to 0} f(x,u)/|u| = 0, \text{关于 } x \text{ 一致成立}; \\ \text{c)} & \lim\limits_{u\to\infty} f(x,u)/|u|^p = 0, \text{关于 } x \text{ 一致成立}; \\ \text{d)} & uf(x,u) \geqslant 0, x \in \Omega, u \in R. \end{array}\right\} \quad (6)$$

设λ_j是$-\triangle: H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$的第$j$个本征值，$\lambda_0 = 0$。让$V_j$表示前$j$个本征函数$e_1, \cdots, e_j$张成的子空间。本文的主要结果是下面的

定理 2　假设f满足(b)(a)－(d)，$\lambda \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$，$j = 0,1,2,\cdots$。如果存在$v \in \partial B_1 \cap V_j^\perp$，$R > 0$常数，满足

$$\max_{e\in V_j, 0\leqslant t\leqslant R} I(e + tv) < \frac{1}{n}(\max_{\bar{\Omega}} a(x))^{-(n-2)/2} S^{n/2} \quad (7)$$

那么，问题(5)至少有一非平凡解。

最后，我们还给出条件(7)成立的一个充分条件，从而得到一个显然的存在定理。

1　定理1的证明

分两步来完成

1)　$c \geqslant \alpha$，这是直接用Brouwer度理论的结果，证明见[2]，我们省去细节。

2)　假设结论不成立，那么，存在常数$M > 0$，$\sigma > 0$，满足

$$\|I'(x)\| \geqslant M, \forall\, x \in E_\sigma = I^{-1}([c - \sigma, c + \sigma]) \quad (8)$$

事实上，若不然，存在序列$(x_j) \subset E$，满足$\|I'(x_j)\| < \frac{1}{j}$，$x_j \in E_{\frac{1}{j}}$。这表明序列$(x_j)$满足(PS)$_c$假设，矛盾。

其次，可不妨取$\sigma \leqslant \frac{\alpha}{2}$。根据Palais定理，令$v(x)$为$I$在$E_\sigma$是的伪梯度向量场，即满足

$$\begin{gathered} \|v\| \leqslant 2\|I'(x)\| \\ \langle I'(x), v \rangle \geqslant \|I'(x)\|^2 \end{gathered} \quad (9)$$

取 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant M$ 在 E 上是局部Lipschitz连续的，且 $\varphi(x)=M,x\in E_{\sigma/2},\varphi(x)=0,\varphi\notin E_{\sigma}$. 构作 E 上的向量场

$$V(x)=\begin{cases}0 & x\in E/E_{\sigma}\\ \varphi(x)v(x)/\|v(x)\|^2 & x\in E_{\sigma}\end{cases}$$

它显然在 E 上是局部Lipschitz连续的，且 $\|V(x)\|\leqslant 1$。考虑由 $V(x)$ 生成的流，即如下问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(t,x)=-V(\eta(t,x))\\ \eta(0,x)=x\end{cases}\tag{10}$$

的解。因为 $V(x)$ 是局部Lipschitz连续的，且 $V(x)$ 有界，故问题(10)有唯一连续可微解 $\eta(t,x)$ 且其最大存在区间为 $(-\infty,+\infty)$，它满足

$$\eta(t,x)\equiv x,x\in E\backslash E_{\sigma},t\in(-\infty,+\infty)\tag{11}$$

又
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(\eta(t,x))&=<I'(\eta(t,x)),-\varphi(\eta(t,x))v(\eta(t,x))\|v(\eta(t,x))\|^{-2}>\\ &\leqslant-\varphi(\eta(t,x))\|v(\eta(t,x))\|^{-2}\|I'(\eta(t,x))\|^2\\ &\leqslant-\frac{1}{4}\varphi(\eta(t,x))\end{aligned}\tag{12}$$

可见，$I(\eta(x,t))$ 关于 t 是单调非增的。根据 c 的定义，存在 $h\in\Gamma$ 使

$$\max_{x\in Q}I(h(x))\leqslant c+\frac{\sigma}{2}\tag{13}$$

由(11)及(I_2)知，$\eta(t,h(x))=\eta(t,x)=x,\forall x\in\partial Q$. 从而 $\eta(t,h(\cdot))\in\Gamma$. 但是 $0\leqslant I(\eta(t,h(x)))\leqslant I(\eta(0,h(x))\leqslant c+\frac{\sigma}{2}$，可见 $\eta(t,h(x))\in E_{\sigma/2},x\in Q$. 又根据(12)及 φ 之定义，我们有

$$I(\eta(t,h(x)))-I(h(x))\leqslant-\frac{1}{4}\int_0^t\varphi(\eta(s,x))\mathrm{d}s=-\frac{1}{4}Mt.$$

特别取 $t=4\sigma M^{-1}$，即

$$I(\eta(4\sigma M^{-1},h(x)))\leqslant I(h(x))-\sigma\leqslant c+\frac{\sigma}{2}-\sigma=c-\frac{\sigma}{2}.$$

然而 $\eta(t,h(\cdot))\in\Gamma$，对 $t\in(-\infty,+\infty)$，这与 c 的定义矛盾。证明得以完成。

2　定理2的证明

2.1　引理　对于 $\lambda\in(\lambda_j,\lambda_{j+1})$，$j=0,1,2,\cdots$，如果泛函 I 满足：存在一序列 $(u_n)\subset H_0^1(\Omega)$，使得

$$
\begin{aligned}
&I(u_n)\to c<\frac{1}{n}(\max_{\bar\Omega}a(x))^{-(n-2)/2}S^{n/2}\\
&I'(u_n)\to 0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

那么，存在 (u_m) 的子列，其弱极限是问题(5)的非平凡解。

证明　根据(14)，我们有

$$\frac{1}{2}\int(|\nabla u_n|^2-\lambda u_n^2)-\frac{1}{p+1}\int a(x)|u_n|^{p+1}-\int F(x,u_m)=c+o(1)\tag{15}$$

$$\int(|\nabla u_m|^2-\lambda u_m^2)-\int a(x)|u_n|^{p+1}-\int u_mf(x,u_m)=\langle\varphi_n,u_m\rangle\tag{16}$$

其中 $\varphi_n\to0$ 在 $H^{-1}(\Omega)$ 中。

让(15)$-\frac{1}{2}$(16)，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\int a(x)|u_m|^{p+1}&\leqslant\int\{F(x,u_n)-\frac{1}{2}u_nf(x,u_m)\}+c+o(1)+\|\varphi_m\|_{H^{-1}}\|u_n\|_{H_0^1}\\
&\leqslant\int F(x,u_n)+c+o(1)+\|\varphi_n\|_{H^{-1}}\|u_m\|_{H_0^1}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

另一方面，由(6)(c)知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在常数 C_ε，使 $|f(x,u_n)|\leqslant\varepsilon|u_n|^p+C_\varepsilon$，代入(17)，并取 $\varepsilon>0$ 充分小，我们有

$$\int a(x)|u_n|^{p+1}\leqslant C+C\|u_m\|\tag{18}$$

从(15)和(18)不难得到

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant C\tag{19}$$

事实上，由(15)和(18)及H older 不等式知，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_n\|^2&=\frac{1}{2}\lambda\int u_n^2+\frac{1}{p+1}\int a(x)|u_n|^{p+1}+\int F(x,u_n)+c+o(1)\\
&\leqslant\frac{1}{2}\lambda|\Omega|^{\frac{2}{n}}(\min_{\bar\Omega}a(x))^{-2/p+1}(\int a(x)|u_n|^{p+1})^{2/p+1}+\frac{1}{p+1}\int a(x)|u_n|^{p+1}
\end{aligned}
$$

$$+ [(p+1)\min_{\bar\Omega} a(x)]^{-1}\int a(x)|u_m|^{p+1} + \int C_\varepsilon |u_m| + c + o(1)$$
$$\leqslant C(1+\|u_m\|)^{2/p+1} + C(1+\|u_m\|) + c + o(1)$$

注意到 $p+1>2$，(19) 由此推出。

根据(19)，可选取子列，仍记为本身，使

$$u_m \rightharpoonup u \quad 在\ H_0^1(\Omega)\ 中$$
$$u_m \to u \quad 在\ L^2(\Omega)\ 中, \quad u_m \to u \quad a.e.\ x\in\Omega.$$
$$a(x)|u_m|^{p+1} \rightharpoonup a(x)|u|^{p-1} \quad 在 (L^{p+1}(\Omega))^*\ 中$$
$$f(x,u_m) \rightharpoonup f(x,u) \quad 在 (L^{p+1}(\Omega))^*\ 中.$$

其中"⇀"表弱收敛，"→"表强收敛。

由此不难知，u 是问题(5) 的弱解。

最后只需证 $u\neq 0$。事实上，若不然，有

$$\int u_m f(x,u_m) \to 0, \int F(x,u_m) \to 0 \tag{20}$$

这是因为，根据(6)(c)－(d)，

$$0\leqslant \int u_m f(x,u_m) \leqslant \varepsilon(\min_{\bar\Omega} a(x))^{-1}\int a(x)|u_m|^{p+1} + C_\varepsilon\int |u_m|.$$
$$0\leqslant \int F(x,u_m) \leqslant \varepsilon[(p+1)\min_{\bar\Omega} a(x)]^{-1}\int a(x)|u_m|^{p+1} + C_\varepsilon\int |u_m|$$

又 $\int a(x)|u_m|^{p+1}\leqslant C$，$\int |u_m|\to 0$，$\varepsilon>0$ 是任意的，因此(20) 成立。

根据(19)，选取另一子列，仍记为本身，使 $\int|\nabla u_m|^2\to \alpha\geqslant 0$，$\alpha$ 是某个常数，先在(16) 中，后在(15) 中令 $m\to\infty$，不难得到

$$\int a(x)|u_m|^{p+1} \to \alpha. \quad 和\ \frac{1}{n}\alpha = c \tag{21}$$

另一方面，我们有

$$\|\nabla u_m\|_2^2 \geqslant S\|u_m\|_{p+1}^2 \geqslant S(\max_{\bar\Omega} a(x))^{-2/p+1}\left(\int a(x)|u_m|^{p+1}\right)^{2/p+1}$$

从而 $\alpha\geqslant S(\max_{\bar\Omega} a(x))^{-2/p+1}\alpha^{2/p+1}$，再由(21) 知，$c\geqslant \frac{1}{n}(\max_{\bar\Omega} a(x))^{-(n-2)/2}S^{n/2}$，这与假设矛盾。

2.2 定理2的证明 由(7)易知 $c<\frac{1}{n}(\max_{\bar\Omega} a(x))^{-(n-2)/2}S^{n/2}$. 因此，我们只需验证 I 满足定理 1 的条件(I_1)，(I_2).

(I_1) 的验证　让 $E=H_0^1(\Omega)$，$V=V_j$，$X=V_j^{\perp}$。根据(6)(a)—(d)，我们有，对 $\forall\varepsilon>0$，存在常数 C_ε，使 $F(x,u)\leqslant\varepsilon u^2+C_\varepsilon|u|^{p-1}$。又

$$\begin{aligned}\Psi(u)&=\frac{1}{p+1}\int a(x)|u|^{p+1}+\int F(x,u)\\&\leqslant\frac{1}{p+1}\max_{\bar{\Omega}}a(x)\int|u|^{p+1}+\int(C_\varepsilon|u|^{p+1}+\varepsilon u^2).\\&\leqslant C\|u\|^{p+1}+\varepsilon C\|u\|^2\end{aligned}$$

注意到 $p+1>2$，$\varepsilon>0$ 任意，从而

$$\Psi(u)=o(\|u\|^2),\quad 当\ \|u\|\to 0. \tag{22}$$

根据本征值的极值性质，不难知，

$$\int(|\nabla u|^2-\lambda u^2)\geqslant(1-\lambda\lambda_{j+1}^{-1})\|u\|^2,\quad\forall u\in X=V_j^{\perp} \tag{23}$$

结合(22)、(23)，I 显然满足条件(I_1)。

(I_2) 的验证　设 $u\in\mathrm{Span}\{V,e_{j+1}\}$，显然 $\|u\|_2^2\geqslant\lambda_{j+1}^{-1}\|u\|^2$，$\|u\|_2\leqslant|\Omega|^{\frac{1}{n}}\|u\|_{p+1}$，从而 $\|u\|_{p+1}^2\geqslant|\Omega|^{-\frac{2}{n}}\lambda_{j+1}^{-1}\|u\|^2$。

故

$$\begin{aligned}I_\lambda(u)&=\frac{1}{2}\int(|\nabla u|^2-\lambda u^2)-\frac{1}{p+1}\int a(x)|u|^{p+1}-\int F(x,u)\\&\leqslant\frac{1}{2}(1-\lambda\lambda_{j+1}^{-1})\|u\|^2-\min_{\bar{\Omega}}a(x)(|\Omega|^{-\frac{2}{n}}\lambda_{j+1}^{-1}\|u\|^2)^{p+1/2}(p+1)^{-1}\end{aligned}$$

可见，根据注1，欲使 $I(u)\leqslant 0$，$\|u\|>R$，只要令

$$\begin{aligned}R^2&=\Big[\frac{1}{2}(|\Omega|^{2/n}\lambda_{j+1})^{n/n-2}(p+1)(1-\lambda\lambda_{j+1}^{-1})(\min_{\bar{\Omega}}a(x))^{-1}\Big]^{n-2/2}\\&=|\Omega|\lambda_{j+1}^{n/2}\Big(\frac{n}{n-2}\Big)^{n-2/2}(1-\lambda\lambda_{j+1}^{-1})^{n-2/2}(\min_{\bar{\Omega}}a(x))^{-(n-2)/2}\\&=|\Omega|\lambda_{j+1}\Big[\frac{n}{n-2}(\lambda_{j+1}-\lambda)(\min_{\bar{\Omega}}a(x))^{-1}\Big]^{n-2/2}\end{aligned} \tag{24}$$

从而，当 $u\in\mathrm{Span}\{V,e_{j+1}\}\backslash\bar{B}_R$ 时，$I(u)\leqslant 0$。根据注1，I 满足(I_2)。定理2获证。

3　条件(7)的进一步讨论

条件(7)在定理2中起着基本的作用，我们给出它成立的一个充分条件，从而得到一个重要的存在定理。

3.1 定理3 对 $\lambda \in (\lambda_j, \lambda_{j+1}), j = 0,1,2,\cdots$，假设

$$\lambda_{j+1} - \lambda < \left(\frac{2}{n}\right)^{2/n}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{(n-2)/n}\lambda_{j+1}^{-n/2}\left(\frac{\max a(x)}{\min a(x)}\right)^{-(n-2)/n}S|\Omega|^{-2/n} \tag{25}$$

那么，存在 $R > 0$，使(7)成立。

证明 对 $\forall e \in V$，取 $v = e_{j+1}$，则

$$\begin{aligned} I(e + te_{j+1}) &\leqslant \frac{1}{2}\int (|\nabla(e + te_{j+1})|^2 - \lambda|e + te_{j+1}|^2) \\ &= \frac{1}{2}\int (|\nabla e|^2 - \lambda e^2) + \frac{t^2}{2}\int (|\nabla e_{j+1}|^2 - \lambda e_{j+1}^2) \\ &\leqslant \frac{1}{2}t^2(\lambda_{j+1} - \lambda) \end{aligned}$$

因此，欲使(7)成立，只要取

$$R^2 < \frac{2}{n}(\lambda_{j+1} - \lambda)^{-1}(\max_{\bar{\Omega}} a(x))^{-(n-2)/2}S^{n/2}.$$

根据(24)，我们有

$$|\Omega|\lambda_{j+1}\left[\left(\frac{n}{n-2}\right)(\lambda_{j+1} - \lambda)(\min_{\bar{\Omega}} a(x))^{-1}\right]^{(n-2)/2} < \frac{2}{n}(\lambda_{j+1} - \lambda)^{-1}(\max_{\bar{\Omega}} a(x))^{-(n-2)/2}S^{n/2}$$

从而

$$\lambda_{j+1} - \lambda < \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{n-2}{n}}\lambda_{j+1}^{-n/2}\left(\frac{\max a(x)}{\min a(x)}\right)^{-(n-2)/n}S|\Omega|^{-2/n}.$$

这就完成了定理3的证明。

3.2 推论 假设(6)(a)—(d)成立，对 $\forall j \in N$，存在常数 $\lambda_j^* \in [0, \lambda_j)$，当 $\lambda \in (\lambda_j^*, \lambda_j)$ 时，问题(5)至少有一非平凡解。

该推论推广了文[3]的存在性结果。

附注 根据以上讨论，我们顺便也部分回答了[1]中提出的一个问题，即

$$\begin{cases} -\triangle u = a(x)|u|^{p-1}u + \lambda u & x \in \Omega \\ u > 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{26}$$

对 $a(x), p, \lambda$ 的假设同前。

结论：存在 $\lambda_1^* = \lambda_1^*(a,n,\Omega) \geqslant 0$，当 $\lambda \in (\lambda_1^*, \lambda_1)$ 时，问题(26)至少有一个解。($u>0$ 的讨论同文[1])

作者对陆文端教授的指导表示感谢！

参考文献

1 Brezis H, Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure. Appl. Math, 1983, (36): 437—477.

2 Rabinowitz P H. Some aspects of critical point theory, Proc. 1982 Changchun Symposium D. G. D. E. Science Press, Beijing, China, 1986.

3 Cerami G, Fortunato D, Struwe M. Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents, Ann. Inst. Henri. Poincare, 1984, (5): 341—350.