Hilbert空间上非凸函数的共轭函数与极值*

CONJUGATE FUNCTION AND EXTREMA OF NONCONVEX FUNCTION IN HILBERT SPACE

蒲 云　　段虞荣
Pu Yun　　Duan Yurong
（重庆建筑工程学院）　（重 庆 大 学）

摘 要 在Hilbert空间上对非凸函数，引进了共轭函数的概念并讨论了共轭函数的若干性质及与闭包函数之间的关系。利用共轭函数和闭包函数刻划了问题(P)的一些最优性条件。这里，

$$(P) \qquad \min_{x\in H} f(x)$$

$f: H\to(-\infty, +\infty]$ 为任一函数，H为一Hilbert空间。

关键词 共轭函数；下半连续函数；正常函数；闭包函数；Hilbert空间
中国图书资料分类法分类号 O221

ABSTRACT The concept of conjugate function of nonconvex function is introduced in Hilbert space, and some properties of conjugate function and its relationship with closure function are discussed, and several optimal conditions of problem (P) are obtained on the basis of conjugate function and closure function, where

$$(P) \qquad \min_{x\in H} f(x)$$

$f: H\to(-\infty, +\infty]$ is any function, H is a Hilbert space.

KEY WORDS conjugate function, lower semi-continuous function; proper function; Closure function; Hilbert space

0 引 言

本文中，设 H 为一Hilbert空间，$f: H\to(-\infty, +\infty]$ 为一正常函数；cl f 为 f 的闭包函数。设，

* 收文日期 1989—10—16

$$(P)\qquad \min_{x\in H} f(x)$$

$$(P')\qquad \min_{x\in H} \mathrm{cl}\, f(x)$$

本文中的极小值，一般是指全局极小值。本文主要研究问题(P)解的存在性。

在凸分析和非光滑分析中，早已熟知，在 $\dim H<+\infty$ 及 f 下半连续、强制性条件的假设下，存在 x_0 是问题(P)的解。当 $\dim H=+\infty$，且既没有紧性，又没有泛函凸性的情况下，一般不能使 f 达到极小值；仅有 *Ekeland* 的"近似极小值"原理。但是当 H 为自反的 *Banach* 空间，f 是正常凸函数时，在下半连续和强制性条件下，f 在 H 上可达到极小值。

本文，不直接研究(P)的存在性，而是通过共轭函数和闭包函数作为媒介：讨论以闭包函数为目标函数的极小化问题(P')及与问题(P)之间的关系。以闭包函数和共轭函数为条件，刻划了(P)有解的一个充要条件。并在下半连续和强制性条件下，证明了一般正常函数在 H 上可达到唯一极小值的条件是它的闭包函数有唯一解。

1　共轭函数及性质

对 H 上的函数 f，定义 dom f 为：

$$\mathrm{dom}\, f=\{x\in H\,|\,f(x)<+\infty\}$$

称为 f 的有效域。

若 dom $f\neq\Phi$，则称函数 f 为正常的。定义 epi f 为：

$$\mathrm{epi}\, f=\{(x,u)\,|\,x\in H,\mu\in R,f(x)\leqslant\mu\};$$

称为 f 的上图。包含 epi f 的所有凸集的交记为 conv(epi f)，称为 epi f 的凸包。

1.1　定义1[4]　设 $f:H\to(-\infty,+\infty]$ 为任一函数。若 $L(f)\neq\Phi$，定义($L(f)=\{(y,\beta)\,|\,(y,\beta)\in H\times R$，且 $(x,y)-\beta\leqslant f(x),\forall x\in H\}$)．

$$\mathrm{cl}\, f(x)=\sup_{(y,\beta)\in L(f)}\{(x,y)-\beta\};$$

若 $L(f)=\Phi$，定义

$$\mathrm{cl}\, f(x)=-\infty$$

cl f 称为 f 的闭包函数。

1.2　定理1[4]　设 $f:H\to(-\infty,+\infty]$ 为一非凸函数。则 cl $f(x)$ 是被 $f(x)$ 所控制的最大的凸的下半连续函数。进一步有，cl $f(x)=$ cl $\bar{f}(x)$。

1.3　定理2[4]　设 $f:H\to(-\infty,+\infty]$ 为任一函数。那么，

1)　若 $\bar{f}$ 是闭的，则 $\bar{f}(x)=\mathrm{cl}\, f(x),\forall x\in H$；

2) epi $\tilde{f} \supset \operatorname{conv}(\operatorname{epi} f)$;

3) $\operatorname{cl} f(x) = \liminf_{y \to x} \tilde{f}(y)$.

由 $\operatorname{cl} f \leqslant \tilde{f}$ 立即得，$\operatorname{epi} \operatorname{cl} f \supset \operatorname{epi} \tilde{f} \supset \operatorname{conv}(\operatorname{epi} f)$.

1.4 **定义2** 设 $f: H \to (-\infty, +\infty]$ 为一非凸函数。它的共轭函数 $f^*: H^* \to (-\infty, +\infty]$ 定义为

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in H}[(x^*, x) - f(x)]$$

它的二次共轭函数 $f^{**}: H \to (-\infty, +\infty]$ 定义为

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in H}[(x, x^*) - f^*(x^*)].$$

1.5 **定义3** 一个仿射函数是定义在子集 $c \subset H$ 上的有限的，既是凸的又是凹的函数。

1.6 **定义4** 对任意非零 $x \in H$ 和任意 $\beta \in R$，集合：

$$\{x \in H \mid (x, \hat{x}) \leqslant \beta\}, \{x \in H \mid (x, \hat{x}) \geqslant \beta\}$$

称为闭半空间。

集合 $$\{x \in H \mid (x, \hat{x}) < \beta\}, \{x \in H \mid (x, \hat{x}) > \beta\}$$

称为开半空间。

1.7 $H \times R$ 中的闭半空间的类型

由于 $H \times R$ 中的超平面，能由 $H \times R$ 上的线性函数来表示，且线性连续函数能表示为

$$(x, \mu) \to (x, x^*) + \mu\beta_0, x^* \in H, \beta_0 \in R.$$

所以 $H \times R$ 中的闭半空间必是下列类型之一。

1) $\{(x, \mu) \mid (x, x^*) \leqslant \beta\}$;

2) $\{(x, \mu) \mid \mu \geqslant (x, x^*) - \beta\}$;

3) $\{(x, \mu) \mid \mu \leqslant (x, x^*) - \beta\}$。

我们将分别称这些类型为垂直的、上的和下的。

1.8 **定理3**[6] 若 $f: H \to [-\infty, +\infty]$ 为一正常凸函数，且 $x \in \operatorname{ri}(\operatorname{dom} f)$，则

$$\operatorname{cl} f(y) = \lim_{\lambda \uparrow 1} f[(1-\lambda)x + \lambda y], \forall y \in H。$$

1.9 **引理1** 一个仿射函数 $h: H \to (-\infty, +\infty]$ 是一下半连续函数。

证：由定义3及定理3，

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}\ h(y) &= \lim_{\lambda\uparrow 1} h[(1-\lambda)x+\lambda y], \qquad \forall\ x\in ri(\mathrm{dom}\ h), y\in H\\ &= \lim_{\lambda\uparrow 1}[(1-\lambda)h(x)+\lambda h(y)]\\ &= h(y) \qquad\qquad \forall\ y\in H\end{aligned}$$

所以 $h(x)$ 为一下半连续函数。

当对任意 $x\in$ H 有 $\bar{f}(x)>-\infty$ 时，由 cl f 的定义及引理 1 可得：若 Ω 是形如 $h(x)\leqslant f(x)(\forall\ x\in \mathrm{H})$ 的一族仿射函数集且 $\Omega\supset\{(x,y)-\beta|(y,\beta)\in L(f)\}$，那么必有 cl $f(x)=\sup\limits_{h\in\Omega} h(x)$。

显然，集 $\Omega=\{h(x)=(x,x^*)-\beta|x^*\in H,\beta\in R,h(x)\leqslant f(x),\forall\ x\in H\}$ 包含集 $\{(\mathrm{x},\mathrm{y})-\beta|(\mathrm{y},\beta)\in \mathrm{L}(\mathrm{f})\}$。因此 $cl\ \mathrm{f}(\mathrm{x})=\sup\limits_{h\in\Omega}\mathrm{h}(\mathrm{x})$；从而 $epi\ (cl\ \mathrm{f})=epi(\sup\limits_{h\in\Omega}\mathrm{h}(\mathrm{x}))=\{(\mathrm{x},\mu)|\sup\limits_{h\in\Omega}\mathrm{h}(\mathrm{x})\leqslant\mu\}=\bigcap\limits_{h\in\Omega}\{(\mathrm{x},\mu)|\mathrm{h}(\mathrm{x})\leqslant\mu\}$。即 $epi\ (cl\ f)$ 正是包含 epi f 的上闭半空间的交。

由 f^* 的定义，我们知道 f^* 是 $(\mathrm{x},\mu)\in epi$ f 的仿射函数 $\mathrm{g}(\mathrm{x}^*)=(\mathrm{x},\mathrm{x}^*)-\mu$ 的点态上确界（因为 $\mathrm{g}(\mathrm{x}^*)\leqslant(\mathrm{x},\mathrm{x}^*)-\mathrm{f}(\mathrm{x})$，且由这种仿射函数组成的集包含集 $\{(\mathrm{x},\mathrm{x}^*)-\mathrm{f}(\mathrm{x})|\mathrm{x}\in\mathrm{H}\}$。）令 F^* 是 $H\times R$ 中所有点偶 (x^*,μ^*)；这里 $\mathrm{h}(\mathrm{x})=(\mathrm{x},\mathrm{x}^*)-\mu^*$ 被 f 所控制。那么，对任意 $\mathrm{x}\in H$ 有 $\mathrm{h}(\mathrm{x})\leqslant\mathrm{f}(\mathrm{x})$ 当且仅当

$$\mu^*\geqslant \mathrm{Sup}\{(x,x*)-f(x)|x\in H\}$$

因此，F^* 实际上是 f^* 的上图。由[6]知 cl f 是被 f 所控制的最大的凸的下半连续函数；因此仿射函数 h 小于 f 等价于 h 小于 cl f。从而 F^* 也是 $(\mathrm{cl}\ f)^*$ 的上图。故 $(\mathrm{cl}\ f)^*=f^*$。因为 f^{**} 是这样一些仿射函数的点态上确界：$h(x)=(x,x^*)-\mu^*$，使得 $(x^*,\mu^*)\in F^*=\mathrm{epi}\ f^*$。而 $h(x)\leqslant f(x),\forall\ x\in \mathrm{H}$，当且仅当 $(x^*,\mu^*)\in F^*=\mathrm{epi}\ f^*$。所以由 cl f 的定义得，$f^{**}=\mathrm{cl}\ f$。

总结上面结果，得知下述定理为真。

1.10　**定理4**　设 f:H $\to(-\infty,+\infty]$ 为一非凸函数，且对任意 $x\in H$，$\bar{f}(x)\supset-\infty$。那么 epi (cl f) 正好是包含 epi f 的所有上闭半空间的交集。

1.11　**定理5**　设 f:H $\to(-\infty,+\infty]$ 为任一函数，且对任意 $x\in$ H，$\bar{f}(x)>-\infty$。那么 f^* 是一下半连续的凸函数：f^* 正常当且仅当 f 正常。且 $f^*=(\mathrm{cl}\ f)^*$，$f^{**}=\mathrm{cl}\ f$。

1.12　**推论**　对 H 上的任意函数 f。若 $\bar{f}(x)>-\infty$ 对任意 $x\in$ H 成立。则

$$f^*(x^*)=\sup\{(x,x^*)-f(x)|x\in ri(\mathrm{dom}\ f)\}。$$

2　最优性条件

这一节，利用闭包函数和共轭函数的性质，讨论问题(P)的最优性条件。

令集 $S_a=\{x|f(x)\leqslant\alpha\}$，称为 f 的水平集。显然，当 f 为下半连续函数时，$S_\alpha(f)$ 为一闭集，且 $\bigcup\limits_{\alpha\in R}S_\alpha(f)=\mathrm{dom}\ f$。$f$ 在 H 上的极小等价于在集 dom f 上的极小。

记 $\inf f = \inf\limits_{x\in H} f(x)$；由水平集定义，当 $\alpha < \inf f$ 时，$S_\alpha(f) = \Phi$；令 $\alpha_0 = \inf f$，则 $S_{\alpha_0}(f)$ 由这样的点组成：任意 $x \in S_{\alpha_0}(f)$，$f(x) = \inf f$。我们称这个集为 f 的极小点集。求解问题(P)的关键是研究集 $S_{\alpha_0}(f)$ 是否为空集，或非空集，或仅为一单点集等。

2.1 引理2 设 f:H → (− ∞, + ∞] 为一正常非凸函数，则 $\inf f = \inf \mathrm{cl}\, f$。

证：(1) 若 $\inf f = -\infty$，则 $\mathrm{cl}\, f \equiv -\infty$（定义 1）。所以结论为真。

(2) 若 $\inf f > -\infty$，且 $\inf f \neq \inf \mathrm{cl}\, f$。因为 $\mathrm{cl}\, f(x) \leqslant f(x)$，$\forall\, x \in H$。那么，$\inf \mathrm{cl}\, f < \inf f$；从而存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\inf \mathrm{cl}\, f + \varepsilon < \inf f$。令

$$\beta = -(\inf \mathrm{cl}\, f + \varepsilon),\ y = 0$$

则
$$(x, y) - \beta \leqslant \mathrm{cl}\, f(x),\ \forall\, x \in H;$$

故
$$\inf \mathrm{cl}\, f + \varepsilon = \inf((x, y) - \beta) \leqslant \inf \mathrm{cl}\, f,$$

矛盾！所以，$\inf f = \inf \mathrm{cl}\, f$

由引理2，易得下面的定理

2.2 定理6 设 f:H → (− ∞, + ∞] 为一正常非凸函数。若 $x \in S_{\alpha_0}(\mathrm{cl}\, f)$ 且 $x \notin U$，则 $x \in S_{\alpha_0}(f)$。更有，$S_{\alpha_0}(f) = S_{\alpha_0}(\mathrm{cl}\, f) - U$。这里 $U = \{x \in H \mid f(x) > \mathrm{cl}\, f(x)\}$

由此定理知道，若 $x \in U$，则 x 必不是 f 的极小点。且 $x_0 \in S_{\alpha_0}(\mathrm{cl}\, f)$，必有 $\mathrm{cl}\, f(x_0) = \inf f$。因此，知道 $S_{\alpha_0}(\mathrm{cl}\, f)$，就知道了 f 的最优值；但不能确定 f 是否能达到最优值，即 $S_{\alpha_0}(f)$ 是否为空。这只有通过计算 U 才能知道。由定理6易得：

2.3 定理7 设 f:H → (− ∞, + ∞] 为一正常的非凸函数。若 $S_{\alpha_0}(f) \neq \Phi$；且对任意 $x \in S_{\alpha_0}(\mathrm{cl}\, f)$，存在 $x_0 \in S_{\alpha_0}(f)$ 使得 $f(x) = \mathrm{cl}\, f(x_0) = \mathrm{cl}\, f(x) = \min\limits_{x\in H} f(x)$。

事实上，对任意 $x \in S_{\alpha_0}(f)$，均有 $f(x) = \mathrm{cl}\, f(x) = \inf f$。

下面利用共轭函数与闭包函数得出了问题(P)有解的一个充要条件。

2.4 定理8 设 f:H → (− ∞, + ∞] 为一正常的非凸函数。则非零元 x_0 为 $f(x)$ 的极小点当且仅当 x_0 为 $\mathrm{cl}\, f(x)$ 的极小点，且下列泛函方程有解：

$$\|x_0\|^2 x = [f^*(x) + f(x_0)]x_0$$

证：设非零元 x_0 是 $f(x)$ 的极小点，则有 $f(x_0) = \inf f$。由定理 6 得，$x_0 \in S_{\alpha_0}(\mathrm{cl}\, f)$，即

$$\mathrm{cl}\, f(x_0) = \inf \mathrm{cl}\, f = \inf f$$

所以 x_0 是 $\mathrm{cl}\, f(x)$ 的极小点。

由于 $\inf f > -\infty$，所以，

$$\sup_{y\in H}[(0, y) - f(y)] = -\inf_{y\in H} f(y) = -\inf f$$

有意义；故

$$f^*(0) = -\inf f = -f(x_0)$$

从而零元满足方程

$$\|x_0\|^2 x = [f^*(x) + f(x_0)]x_0$$

反之,设 x_0 是 cl $f(x)$ 的极小点,且方程:

$$\|x_0\|^2 x = [f^*(x) + f(x_0)]x_0$$

有解。设 x^* 为该方程任一解;令

$$\beta^* = (x_0, x^*) - f(x_0)$$

从而,对任意 $x \in H$,

$$\begin{aligned}(x, x^*) - \beta^* &= (x, x^*) - (x_0, x^*) + f(x_0) \\ &\leqslant f^*(x^*) + f(x_0) - (x_0, x^*) + f(x) \\ &= f^*(x^*) + f(x_0) - (x_0, \frac{[f^*(x^*) + f(x_0)]x_0}{\|x_0\|^2}) + f(x) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

所以,由定义1得,$(x^*, \beta^*) \in L(f)$,从而

$$(x, x^*) - \beta^* \leqslant \text{cl } f(x), \quad \forall x \in H$$

而　$$f(x_0) = (x_0, x^*) - \beta^* \leqslant cl\ f(x_0),$$

故有,

$$f(x_0) = \text{cl } f(x_0) = \inf \text{cl } f = \inf f$$

所以,x_0 为 $f(x)$ 之极小点。

由此定理可知,求解一般非线性规划问题可以转化为求解一个凸规划问题和一个简单的线性泛函方程。

推论　在定理的假设下。零元0为 $f(x)$ 的极小点当且仅当 0 是 cl $f(x)$ 的极小点且泛函方程:

$$f(0) + f^*(x) = 0$$

有解。

对于既没有紧性，又没有泛函凸性的情况下，一般不能使 f 达到极小值，仅有 Ekeland 的"近似极小值"原理。而就是对于自反的 Banach 空间，过去仅证明了，在凸性、下半连续及强制性假设下，f 可达到极小值（见[2]，[3]）。下面，将得到一个更一般的结论。就是在没有紧性和凸性的假设下，下半连续函数 $f(x)$ 存在唯一极小点的条件是 cl $f(x)$ 存在唯一极小点。这样，当问题(P′)有唯一解时；求解问题(P)可转化为求解一凸规划(P′)。

2.5 定理9 设 $f(x):H\to(-\infty,+\infty]$ 为一正常的下半连续函数且满足强制性条件：$\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x)=+\infty$。则当$(P')$有唯一解时，$(P)$有唯一解。

证： 由 $S_{\alpha_0}(f)=S_{\alpha_0}(\mathrm{cl}\,f)-U$，得：若 x_0 是(P′)之唯一解，且 $f(x_0)=\mathrm{cl}\,f(x_0)$，则 x_0 是问题(P)之唯一解。

由条件，存在 $x_0\in S_{\alpha_0}\subset(\mathrm{cl}\,f)$，且 $S_{\alpha_0}(\mathrm{cl}\,f)=\{x_0\}$。下面证明 $f(x_0)=\mathrm{cl}\,f(x_0)$

若 $f(x_0)>\mathrm{cl}\,f(x_0)$，令 $\mu_0=\mathrm{cl}\,f(x_0)$，则对任意 μ：$f(x_0)>\mu>\mu_0$，有 $(x_0,\mu)\in\mathrm{Conv}(\mathrm{epi}\,f)$

$$(x_0,\mu)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\bar{x}_i,\lambda_i\mu_i)$$

这里，$f(x_i)\leqslant\mu_i$；故有，

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(\bar{x}_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i=\mu$$

令 $x_\mu\in\{\bar{x}_i\}$，满足，

$$f(x_\mu)\leqslant f(\bar{x}_i),\quad i=1,\cdots,n,$$

则

$$f(x_\mu)\leqslant\mu$$

令

$$S_\mu=\{x\in H\,|\,f(x)\leqslant\mu\},$$

由上可知，对任意 μ：$f(x_0)>\mu>\mu_0$，$S_\mu\neq\Phi$ 令 μ_n：$f(x_0)>\mu_n>\mu_0$，且 $\mu_n\downarrow\mu_0$ 显然，

$$S_{\mu_1}\supset S_{\mu_2}\supset\cdots\supset S_{\mu_n}\supset\cdots$$

取 $x_n\in S_{\mu_n}$，则 $\|x_n-x_0\|\not\to 0(n\to\infty)$。因为，若 $\|x_n-x_0\|\to 0(n\to\infty)$，则由 $f(x)$ 的下半连续性得，

$$f(x_0)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}f(x_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mathrm{cl}\,f(x_0),$$

矛盾！所以，存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $\{x_n\}$ 的一子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足：

$$\|x_{n_k} - x_0\| \geqslant \varepsilon_0$$

令

$$M = \mathrm{cl}\{x_{n_k} | k = 1,2,\cdots\}$$

由 $f(x)$ 的下半连续性及强制性条件可得，M 为 H 之一有界闭集，且 $x_0 \notin M$。而 H 为一自反的 Banach 空间，所以 M 为弱紧的。又 cl $f(x)$ 为一凸的下半连续函数，所以 cl $f(x)$ 也是弱下半连续的。从而，存在 $\bar{x} \in M$ 使得，

$$\mathrm{cl}\ f(\bar{x}) = \inf_{x \in M} \mathrm{cl}\ f(x)$$

又 $x_{n_k} \in M$，从而，

$$\mathrm{cl}\ f(x_{n_k}) \leqslant \mu_{n_k}$$

$$\inf_{k>0}(\mathrm{cl}\ f(x_{n_k})) \leqslant \inf_{k>0} \mu_{n_k} = \mu_0,$$

$$\mathrm{cl}\ f(\bar{x}) = \inf \mathrm{cl}\ f = \mathrm{cl}\ f(x_0)。$$

但 $\bar{x} \neq x_0$，矛盾！那么，必有 cl $f(x_0) = f(x_0)$

2.6　定理10　设 f：H → $(-\infty, +\infty]$ 为一正常的下半连续函数且满足强制性条件：$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$. 若 cl $f(x)$ 是严格凸函数，则 $f(x)$ 必定在 H 上取到唯一的极小值。由定理9易得上面结论，证明从略。

参 考 文 献

1　Ekeland I, Nonconvex minimization problems. in: Bull. Amer. Math Soc Volume　I, Number3, May 1979

2　张恭庆. 临界点理论及其应用. 上海：科学技术出版社. 1986

3　Barbu U & Precupanu Th. Convexity and optimization in Banach Space. Bucuresti: Romania International Publishers, 1978

4　Aubin J P. Applied Functional Analysis. Wiley, 1979

5　Aubin J P. Applied Abstract Analysis. Wiley, 1979

6　蒲云. Hilbert 空间上凸函数及非凸函数的闭包函数. 重庆建筑工程学院学报. 1989, 11(2): 117～125

7　Rockafellar R T. Convex Analysis. Princeton Univ Press. 1970