1991年3月
第14卷第2期

重庆大学学报
JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY

Vol.14,No.2
.1991

一类含任意参量的B样条型三次参数曲线*

A CLASS OF CUBIC PARAMETER CURVES OF B-SPLINE TYPE WITH ARBITRARY PARAMETER

赵学军
Zhao Xuejun
（应用数学系）

摘　要　构造了一类含四个参量的B样条型三次参数曲线，它以三次Hermite曲线、Ball曲线、Bézier曲线、Timmer曲线和B样条曲线为其特例。本文还给出了曲线与其特征多边形各边相切的条件。通过调整曲线的四个参量便可改变曲线的形状（包括端点位置、凸向及弯曲程度等）以满足实际需要。

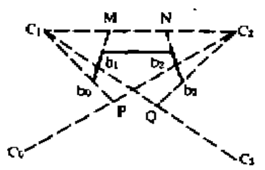
关键词　三次参数曲线；B样条曲线 / Bézier 曲线

中国图书资料分类法分类号　O241.5

ABSTRACT　A class of cubic parameter curve of B-spline type is constructed in this paper with four arbitrary parameters, the cubic Hermite curve, Ball curve, Bézier curve, Timmer curve and B-spline curve as its special cases. The condition in which the curves contact with each edge of characteristic polygon is also given. In order to satisfy the actual riquirements, the shape (i. e. location of end point, direction of convexity and flexion, etc.) of curves can be modified by adjusting the four parameters.

KEY WORDS　cubic parameter curve; B-spline curve / Bézier curve

1　曲线的构造



如图，给定四点 $\vec{b}_i, i=0,1,2,3$。另外构造四点 $\vec{C}_i, i=0,1,2,3$ 如下：

$$\vec{M}=\vec{b}_0+\lambda(\vec{b}_1-\vec{b}_0)$$

$$\vec{N}=\vec{b}_3+\lambda(\vec{b}_2-\vec{b}_3)$$

$$\vec{c}_1=\vec{N}+\mu(\vec{M}-\vec{N})=\mu(1-\lambda)\vec{b}_0+\lambda\mu\vec{b}_1+\lambda(1-\mu)\vec{b}_2+(1-\lambda)(1-\mu)\vec{b}_3$$

$$\vec{c}_2=\vec{M}+\mu(\vec{N}-\vec{M})=(1-\lambda)(1-\mu)\vec{b}_0+\lambda(1-\mu)\vec{b}_1+\lambda\mu\vec{b}_2+\mu(1-\lambda)\vec{b}_3$$

$$\vec{P}=\vec{c}_1+\tau(\vec{b}_0-\vec{c}_1),\quad \vec{Q}=\vec{c}_2+\tau(\vec{b}_3-\vec{c}_2)$$

$$\vec{c}_0=\vec{c}_2+\gamma(\vec{P}-\vec{c}_2)=[(1-\lambda)\mu(1-\tau)\gamma+(1-\lambda)(1-\mu)(1-\gamma)+\tau\gamma]\vec{b}_0$$

* 收文日期　1989—06—30

$$+ [\lambda\mu(1-\tau)\gamma + \lambda(1-\mu)(1-\gamma)]\vec{b}_1 + [\lambda(1-\mu)(1-\tau)\gamma + \lambda\mu(1-\gamma)]\vec{b}_2$$

$$+ [(1-\lambda)(1-\mu)(1-\tau)\gamma + (1-\lambda)\mu(1-\gamma)]\vec{b}_3$$

$$\vec{c}_3 = \vec{c}_1 + \gamma(\vec{Q} - \vec{c}_1) = [(1-\lambda)\mu(1-\gamma) + (1-\lambda)(1-\mu)(1-\tau)\gamma]\vec{b}_0$$

$$+ [\lambda\mu(1-\gamma) + \lambda(1-\mu)(1-\tau)\gamma]\vec{b}_1 + [\lambda(1-\mu)(1-\gamma) + \lambda\mu(1-\tau)\gamma]\vec{b}_2$$

$$+ [(1-\lambda)(1-\mu)(1-\gamma) + (1-\lambda)\mu(1-\tau)\gamma + \tau\gamma]\vec{b}_3$$

以 $\vec{c}_0$、$\vec{c}_1$、$\vec{c}_2$、$\vec{c}_3$ 为特征点构造等距节点三次参数 B 样条曲线：

$$\vec{P}(t) = (t^3, t^2, t, 1)\,\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{c}_0 \\ \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vec{c}_3 \end{bmatrix}$$

$$= (t^3, t^2, t, 1)\,\frac{1}{6}\begin{bmatrix} (1-\lambda)(2\mu-1)(4-2\gamma+\tau\gamma)-\tau\gamma & \lambda(2\mu-1)(4-2\gamma+\tau\gamma) & \lambda(1-2\mu)(4-2\gamma+\tau\gamma) & (1-\lambda)(1-2\mu)(4-2\gamma+\tau\gamma)+\tau\gamma \\ 3(1-\lambda)[(1-2\mu)(2-\gamma)-\mu\tau\gamma]+3\tau\gamma & 3\lambda(1-2\mu)(2-\gamma)-3\lambda\mu\tau\gamma & 3\lambda(2\mu-1)(2-\gamma)-3\lambda(1-\mu)\tau\gamma & 3(1-\lambda)[(2\mu-1)(2-\gamma)-(1-\mu)\tau\gamma] \\ 3(1-\lambda)\gamma(1-2\mu+\mu\tau)-3\tau\gamma & 3\lambda\gamma(1-2\mu+\mu\tau) & 3\lambda\gamma(2\mu-1+\tau-\mu\tau) & 3(1-\lambda)\gamma(2\mu-1+\tau-\mu\tau) \\ (1-\lambda)(2+2\mu-\gamma+2\mu\gamma-\mu\tau\gamma)+\tau\gamma & \lambda(2+2\mu-\gamma+2\mu\gamma-\mu\tau\gamma) & \lambda(1-\mu)(4+\gamma-\tau\gamma)+\lambda\mu(2-\gamma) & (1-\lambda)[(1-\mu)(4+\gamma-\tau\gamma)+\mu(2-\gamma)] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{b}_0 \\ \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

这也是以 $\vec{b}_0$、$\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$、$\vec{b}_3$ 为特征点的三次参数曲线，其基函数为

$$G_i(t) = \frac{1}{6}(a_{1,i+1}t^3 + a_{2,i+1}t^2 + a_{3,i+1}t + a_{4,i+1}), \quad i = 0,1,2,3 \tag{2}$$

其中 a_{ij}　$(i,j = 1,2,3,4)$ 为(1)中矩阵的元素。

2　几个简单性质

2.1　基函数的性质

1)　权性：$\sum\limits_{i=0}^{3} G_i(t) = 1$

2)　对称性：$G_i(t) = G_{3-i}(1-t)$，　$i = 0,1,2,3$

事实上，当 $i = 0$ 时：

$$G_3(1-t)=\frac{1}{6}[a_{14}(1-t)^3+a_{24}(1-t)^2+a_{34}(1-t)+a_{44}]$$
$$=\frac{1}{6}[-a_{14}t^3+(3a_{14}+a_{24})t^2-(3a_{14}+2a_{24}+a_{34})t+(a_{14}+a_{24}+a_{34}+a_{44})]$$

而 $-a_{14}=a_{11}$,

$$\begin{aligned}3a_{14}+a_{24}&=3(1-\lambda)(1-2\mu)(4-2\gamma+\tau\gamma)+3\tau\gamma\\&\quad+3(1-\lambda)[(2\mu-1)(2-\gamma)-(1-\mu)\tau\gamma]\\&=3(1-\lambda)[(1-2\mu)(4-2\gamma+\tau\gamma)-(1-2\mu)(2-\gamma)-(1-\mu)\tau\gamma]+3\tau\gamma\\&=3(1-\lambda)[(1-2\mu)(2-\gamma)+(1-2\mu)\tau\gamma-(1-\mu)\tau\gamma]+3\tau\gamma\\&=3(1-\lambda)[(1-2\mu)(2-\gamma)-\mu\tau\gamma]+3\tau\gamma\\&=a_{21}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3a_{14}+2a_{24}+a_{34}&=3(1-\lambda)(1-2\mu)(4-2\gamma-\tau\gamma)+3\tau\gamma+6(1-\lambda)[(2\mu-1)(2-\gamma)\\&\quad-(1-\mu)\tau\gamma+3(1-\lambda)\gamma(2\mu-1+\tau-\mu\tau)\\&=3(1-\lambda)[(1-2\mu)(4-2\gamma+\tau\gamma)+(2\mu-1)(4-2\gamma)-2(1-\mu)\tau\gamma\\&\quad+\gamma(2\mu-1+\tau-\mu\tau)]+3\tau\gamma\\&=3(1-\lambda)[(1-2\mu)\tau\gamma-2\tau\gamma+2\mu\tau\gamma+\gamma(2\mu-1\xi\tau+\mu\tau)]+3\tau\gamma\\&=3(1-\lambda)\gamma[\tau-2\mu\tau-2\tau+2\mu\tau+2\mu-1+\tau-\mu\tau]+3\tau\gamma\\&=3(1-\lambda)\gamma[-1+2\mu-\mu\tau)+3\tau\gamma\\&=-a_{31}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{14}+a_{24}+a_{34}+a_{44}&=(1-\lambda)(1-2\mu)(4-2\gamma+\tau\gamma)+\tau\gamma+3(1-\lambda)[(2\mu-1)(2-\gamma)\\&\quad-(1-\mu)\tau\gamma]+3(1-\lambda)\gamma(2\mu-1+\tau-\mu\tau)\\&\quad+(1-\lambda)[(1-\mu)(4+\gamma-\tau\gamma)+\mu(2-\gamma)]\\&=(1-\lambda)[(1-2\mu)(4-2\gamma+\tau\gamma)+3(2\mu-1)(2-\gamma)\\&\quad-3(1-\mu)\tau\gamma+6\mu\gamma-3\gamma+3\tau\mu-3\mu\tau\gamma\\&\quad+(1-\mu)(4+\gamma-\tau\gamma)+\mu(2-\gamma)]+\tau\gamma\\&=(1-\lambda)[2+2\mu-\gamma+2\mu\gamma-\mu\tau\gamma]+\tau\gamma\\&=a_{41}\end{aligned}$$

从而 $G_3(1-t)=\frac{1}{6}[a_{11}t^3+a_{21}t^2+d_{31}t+a_{41}]=G_0(t)$.

同理可得 $G_2(1-t)=G_1(t)$, $G_1(1-t)=G_2(t)$, $G_0(1-t)=G_3(t)$。

2.2 曲线(1)具有下列性质

2.2.1 端点性质

$$\vec{P}(0)=\frac{1}{6}[(1-\lambda)(2+2\mu-\gamma+2\mu\gamma-\mu\tau\gamma)+\tau\gamma]\vec{b}_0$$

$$+\frac{1}{6}\lambda(2+2\mu-\gamma+2\mu\gamma-\mu\tau\gamma)\vec{b}_1+\frac{1}{6}\lambda[(1-\mu)(4+\gamma-\tau\gamma)+\mu(2-\gamma)]\vec{b}_2$$

$$+\frac{1}{6}(1-\lambda)[(1-\mu)(4+\gamma-\tau\gamma)+\mu(2-\gamma)]\vec{b}_3$$

$$\vec{P}(1)=\frac{1}{6}(1-\lambda)(4-2\mu+\gamma-2\mu\gamma-\tau\gamma+\mu\tau\gamma)\vec{b}_0$$

$$+\frac{1}{6}\lambda(4-2\mu+\gamma-2\mu\gamma-\tau\gamma+\mu\tau\gamma)\vec{b}_1+\frac{1}{6}\lambda(2+2\mu-\gamma+2\mu\gamma-\mu\tau\gamma)\vec{b}_2$$

$$+\frac{1}{6}[(1-\lambda)(2+2\mu-\gamma+2\mu\gamma-\mu\tau\gamma)+\tau\gamma]\vec{b}_3$$

$$\vec{P}'(0)=\frac{1}{2}[(1-\lambda)(1-2\mu+\mu\tau)\gamma-\tau\gamma]\vec{b}_0+\frac{1}{2}\lambda\gamma(1-2\mu+\mu\tau)\vec{b}_1$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\gamma(2\mu-1+\tau-\mu\tau)\vec{b}_2+\frac{1}{2}\gamma(1-\lambda)(2\mu-1+\tau-\mu\tau)\vec{b}_3$$

$$\vec{P}'(1)=\frac{1}{2}\gamma(1-\lambda)(1-2\mu-\tau+\mu\tau)\vec{b}_0+\frac{1}{2}\lambda\gamma(1-2\mu-\tau+\mu\tau)\vec{b}_1$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\gamma(2\mu-1-\mu\tau)\vec{b}_2+\frac{1}{2}[(1-\lambda)(2\mu-1-\mu\tau)\gamma+\tau\gamma]\vec{b}_3$$

2.2.2　对称性：改变特征多边形顶点的编号 ($i\to 3-i, i=0,1,2,3$) 曲线的形状不变。

2.2.3　曲线具有几何不变性。

2.3　特　例

1) 当 $\lambda=0$ 时，曲线(1) 为过点 $\vec{b}_0$、$\vec{b}_3$ 的直线；

2) 当 $\lambda=\frac{1}{3}, \mu=2, \tau=3, \gamma=2$ 时，曲线(1) 为 Hermite 曲线；

3) 当 $\lambda=\frac{2}{3}, \mu=2, \tau=3, \gamma=2$ 时，曲线(1) 为 Ball 曲线；

4) 当 $\lambda=1, \mu=2, \tau=3, \gamma=2$，时，曲线(1) 为 Bézier 曲线；

5) 当 $\lambda=\frac{4}{3}, \mu=2, \tau=3, \gamma=2$ 时，曲线(1) 为 *Timmer* 曲线；

6) 当 $\lambda=\mu=\tau=\gamma=1$ 时，曲线(1) 为 B 样条曲线；

7) 当 $\tau=3, \gamma=2$ 时，曲线(1) 为以 $\vec{b}_0$ 为起点，$\vec{b}_3$ 为终点的凸凹向及弯曲程度可调节的曲线。

3　与特征多边形相切的条件

假设 $\lambda\neq 0$

3.1　曲线(1)以 $\vec{b}_0$ 为起点、$\vec{b}_3$ 为终点的充要条件为 $\mu=\frac{1}{2}, \tau\gamma=6$；$\mu\neq\frac{1}{2}, \tau=3, \gamma=2$

证　由端点性质知，起点为 $\vec{b}_0$、终点为 $\vec{b}_3$ 的充要条件为

$$\begin{cases}\lambda(2+2\mu-\gamma+2\mu\gamma-\mu\tau\gamma)=0\\ \lambda(1-\mu)(4+\gamma-\tau\gamma)+\lambda\mu(2-\gamma)=0\\ (1-\lambda)[(1-\mu)(4+\gamma-\tau\gamma)+\mu(2-\gamma)]=0\\ (1-\lambda)(4-2\mu+\gamma-2\mu\gamma-\tau\gamma+\mu\tau\gamma)=0\\ \lambda(4-2\mu+\gamma-2\mu\gamma-\tau\gamma+\mu\tau\gamma)=0\\ \lambda(2+2\mu-\gamma+2\mu\gamma-\mu\tau\gamma)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2+2\mu-\gamma+2\mu\gamma-\mu\tau\gamma=0\\ 4-2\mu+\gamma-2\mu\gamma-\tau\gamma+\mu\tau\gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\tau\gamma=6\\ (2-\gamma)(1-2\mu)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\tau=3,\gamma=2,\text{当 }\mu\neq\dfrac{1}{2};\\ \tau\gamma=6,\text{当 }\mu=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

3.2 曲线(1)的起点和终点分别在第一、第三边上的充要条件为 $4-2\mu+\gamma-2\mu\gamma-\tau\gamma+\mu\tau\gamma=0$

证 由端点性质知，曲线(1)的起点和终点分别在特征多边形第一、第三边上的充要条件为

$$\begin{cases}\lambda(1-\mu)(4+\gamma-\tau\gamma)+\lambda\mu(2-\gamma)=0\\ (1-\lambda)[(1-\mu)(4+\gamma-\tau\gamma)+\mu(2-\gamma)]=0\\ (1-\lambda)[4-2\mu+\gamma-2\mu\gamma-\tau\gamma+\mu\tau\gamma]=0\\ \lambda(4-2\mu+\gamma-2\mu\gamma-\tau\gamma+\mu\tau\gamma)=0\end{cases}\Leftrightarrow 4-2\mu+\gamma-2\mu\gamma-\tau\gamma+\mu\tau\gamma=0$$

3.3 曲线(1)在起点和终点分别和特征多边形第一、第三边相切的充要条件为 $\tau=\dfrac{2\mu-1}{\mu-1}(\mu\neq1,\gamma\neq0)$

证 由端点性质知，曲线与第一、第三边相切的充要条件为

$$\begin{cases}\gamma(1-2\mu+\mu\tau)-\tau\gamma=0\\ \lambda\gamma(2\mu-1+\tau-\mu\tau)=0\\ (1-\lambda)\gamma(2\mu-1+\tau-\mu\tau)=0\\ (1-\lambda)\gamma(1-2\mu-\tau+\mu\tau)=0\\ \lambda\gamma(1-2\mu-\tau-\mu\tau)=0\\ \gamma(-1+2\mu-\mu\tau)+\tau\gamma=0\end{cases}\overset{\gamma\neq0}{\Leftrightarrow}1-2\mu+\mu\tau=\tau\overset{\mu\neq1}{\Leftrightarrow}\tau=\frac{2\mu-1}{\mu-1}$$

3.4 曲线以 $\vec{b}_0$ 为起点、$\vec{b}_3$ 为终点，并在 $\vec{b}_0$、$\vec{b}_3$ 处分别与特征多边形第一、三边相切的充要条件0 $\mu=2,\tau=3,\gamma=2$。

3.5 下面讨论曲线(1)与特征多边形第二边相切的条件；

为了讨论方便，不失一般性设 $\vec{b}_0=0$，即 $\vec{b}_0$ 位于原点，则曲线(1)成为

$$\vec{P}(t)=G_1(t)\vec{b}_1+G_2(t)\vec{b}_2+G_3(t)\vec{b}_3,\quad 0\leqslant t\leqslant1 \tag{3}$$

假设 $\vec{b}_1$ 不平行于 $\vec{b}_2$，则 $\vec{b}_3$ 可由 $\vec{b}_1$ 和 $\vec{b}_2$ 线性表示，即有 $\vec{b}_3 = a\vec{b}_1 + b\vec{b}_2$，其中 a，b 为常数。代入(3)得

$$\vec{P}(t) = [G_1(t) + aG_3(t)]\vec{b}_1 + [G_2(t) + bG_3(t)]\vec{b}_2$$

导矢

$$\vec{P}'(t) = [G_1'(t) + aG_3'(t)]\vec{b}_1 + [G_2'(t) + bG_2'(t) + bG_3'(t)]\vec{b}_2$$

由曲线(3)在 $t = t_0(0 < t_0 < 1)$ 处与特征多边形第二边相切的充要条件为存在常数 α，β 使成立

$$\begin{cases} \vec{P}(t_0) = \alpha\vec{b}_1 + (1-\alpha)\vec{b}_2 \\ \vec{P}'(t_0) = \beta(\vec{b}_2 - \vec{b}_1) \end{cases} \tag{4}$$

不难得到：

命题1　若 $\vec{b}_1$ 不平行于 $\vec{b}_2$，$a + b \neq 1$，则曲线(3)在 $t = t_0$ 处与特征多边形第二边或其延长相切的充要条件为存在 λ，μ，τ，γ 满足

$$\begin{cases} G_1(t_0) + G_2(t_0) + (a+b)G_3(t_0) = 1 \\ G_1'(t0) + G_2'(t_0) + (a+b)G_3'(t_0) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t_0 < 1$$

显然，对任意给定的 $t_0 \in (0,1)$，方程组均有解。

两种特殊情况：

1．$\vec{b}_1$ 不平行于 $\vec{b}_2$，$a + b = 1$ 或 $\vec{b}_1$ 平行于 $\vec{b}_2$，$a + b \neq 1$，此时四个特征点有三个共线，只需取 $\lambda = 1$ 即可使曲线与第二边或其延长线相切。

2．$\vec{b}_1$ 平行于 $\vec{b}_2$，$a + b = 1$，此时四个特征点共线，曲线(1)也为过四点的直线。

要使切点真正落在第二边 b_1b_2 上而不是其延长线上，则需(4)中的 α 满足 $0 < \alpha < 1$，于是有：

命题2　若 $\vec{b}_1$ 不平行于 $\vec{b}_2$，$a + b \neq 1$，则曲线(3)在 $t = t_0(0 < t_0 < 1)$ 处与特征多边形第二边相切的充要条件为存在 λ，μ，τ，γ 满足

$$\begin{cases} G_1(t_0) + aG_3(t_0) \geqslant 0 \\ G_2(t_0) + bG_3(t_0) \geqslant 0 \\ G_1(t_0) + G_2(t_0) + (a+b)G_3(t_0) = 1 \\ G_1'(t_0) + G_2'(t_0) + (a+b)G_3'(t_0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

3.6　曲线与特征多边形三边均相切的条件

1．端点在 $\vec{b}_0$，$\vec{b}_3$：此时曲线与特征多边形三边均相切的条件为 $\mu = 2$，$\tau = 3$，$\gamma = 2$ 且存在 λ、$t_0 \in (0,1)$ 满足(5).

注　此时方程组的解一定存在，但不一定满足不等式组，可将基函数代入求出要满足不等式组 a、b 应满足的条件。

2、端点在第一、第三边上：此时条件为

$(\mu-1)\tau+1-2\mu=0$ 且 λ,μ,τ,γ 满足(5)。

对满足不等式组的任一 t_0，方程组均有解。

注 1　可仿照曲线与第二边相切的讨论方法，讨论曲线在 $t_0(0<t_0<1)$ 处与特征多边形第一、第三边相切的条件。

注 2　上述讨论是在假定 $\vec{b}_0=0$ 之下进行的，若 $\vec{b}_0\neq 0$，且 $\vec{b}_1-\vec{b}_0$ 不平行于 $\vec{b}_2-\vec{b}_0$，则令

$$\vec{b}_3-\vec{b}_0=a(\vec{b}_1-\vec{b}_0)+b(\vec{b}_2-\vec{b}_0)$$

前述的有关结论仍然成立。

注3　如果不考虑曲线的对称性，则可讨论8个参量的情形，那时曲线的灵活性将更大、更容易满足实际需要，但参量不易控制。

曲线的凸包性、保凸性等性质将另文讨论。

参考文献

1 苏步青，刘鼎元．计算几何．上海：上海科技出版社，1980

2 张永曙等．计算机辅助几何设计的数学方法．西安：西北工业大学出版社，1986

3 杨松林．四参量三次参数曲线．全国计算数学第五次学术会议资料，1987

4 赵学军．一类B样条型三次参数曲线，四川省数学会年会资料，1989

5 Faux I D, Pratt M J. Computational Geometry for Design and Manufacture. Ellis Horwood, Chichester, UK(1979)

6 Forrest A R. The Twisted Cubic Curre. a Computer-aided geometric design approach. CAD, 1980, 12(4): 165—172