

改进的迁移子结构方法

AN IMPROVED TRANSFER SUBSTRUCTURE METHOD

朱天国

Zhu Tianguo

(工程力学系)

摘 要 把迁移子结构方法推广应用于子结构之间具有不同对接方式的情况,从而扩大了该法的适用范围。几个算例验证了它的可行性和有效性。

关键词 迁移矩阵法;有限单元法;缩减阻抗组合法;结构动力学

中国图书资料分类法分类号 O 332

ABSTRACT The transfer substructure method is extended to application in substructures with different linking ways, thus the field of application of this method is expanded. Its reliability and efficacy are proved by some examples.

KEY WORDS transfer matrix method; finite element method; reduced impedance composition method; structural dynamics

0 前 言

传统的迁移子结构方法限于链式结构的动特性分析和在简谐力作用下的稳态响应分析^[1,2],作者将这种方法与直接积分法相结合,研究了一维和多维链式结构在任意激励下的瞬态响应问题^[3,4],以及非线性系统的动力响应计算^[5]。上述这些研究表明,迁移子结构方法是分析链式结构动力学问题的有效方法。但是,迁移子结构方法是子结构法的一个特例,对于一般的链式结构来说,它要求各子结构之间必须具有相同的对接方式,所谓对接方式相同是指对接自由度的性质和个数相同^[1]。由于这一严格的限制,使迁移子结构方法通常只适合于比较规则的链式结构,而对于那些形状比较复杂的链式结构则无能为力。本文的目的在于要解决迁移子结构方法中存在的这一问题,突破子结构之间必须对接方式相同这一限制,使改进后的方法不仅能容许各子结构内部具有不同的内部构造和自由度,而且还可容许各子结构之间具有不同的对接方式,从而扩大迁移子结构方法的适用范围。

1 子结构的迁移方程

将具有复杂形状的链式结构分成 N 个子结构,每个子结构用有限元法离散,建立起自由振动的动平衡方程

$$\{\bar{F}\}_i = ([k]_i - \omega^2[M]_i)\{\bar{q}\}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

* 收文日期1989-05-15

式中的下标 i 表示第 i 个子结构, 以下简记为 S_i 。

将 S_i 分成内域和交界面两大区域, 应用子结构缩减阻抗综合法^[6,7], 得到关于 S_i 交界面的聚缩动刚度方程

$$\{F\}_i = [Z]_i \{q\}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

式中 $[Z]_i$ 为 S_i 的缩减阻抗矩阵, $\{q\}_i$ 和 $\{F\}_i$ 分别为 S_i 交界面上的节点位移和力向量。

一般地, S_i 左、右侧对接面上节点的自由度数可能不等, 它有两种情况:

1.1 I 型子结构

设 S_i 左侧对接自由度为 g , 右侧对接自由度为 h , 若 $g \geq h$, 则称 S_i 为 I 型子结构。

把(2)式按 S_i 左、右侧交界面进行分块得

$$\begin{Bmatrix} {}^s F^L \\ {}^n F^L \\ F^R \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \\ Z_{31} & Z_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^L \\ q^R \end{Bmatrix}_i \quad (3)$$

这里 S_i 的左侧交界面节点力向量

$$\{F\}_i^L = ({}^s F^L \quad {}^n F^L)^T \quad (4)$$

式中, $\{{}^s F^L\}_i$ 称为 S_i 左侧对接力冗余向量 (Surplus force vector), $g-h$ 维; $\{{}^n F^L\}_i$ 称为 S_i 左侧对接力常规向量 (normal force vector), h 维。

现在把(3)式改写成迁移方程的形式。由文献[3]和[4]知, 此时只需在 S_i 左侧交界面节点力向量 $\{F\}_i^L$ 前冠以负号, 并整理方程(3), 即得

$$\begin{Bmatrix} O \\ F^R \\ q^R \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} I & -Z_{12}Z_{22}^{-1} & Z_{11} - Z_{12}Z_{22}^{-1}Z_{21} \\ O & -Z_{32}Z_{22}^{-1} & Z_{31} - Z_{32}Z_{22}^{-1}Z_{21} \\ O & -Z_{22}^{-1} & -Z_{22}^{-1}Z_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^s F^L \\ {}^n F^L \\ q^L \end{Bmatrix}_i \quad (5)$$

缩写成

$$\begin{Bmatrix} O \\ F \\ q \end{Bmatrix}_i^R = [A]_i \begin{Bmatrix} F \\ q \end{Bmatrix}_i^L \quad (6)$$

这就是 I 型子结构的迁移方程。

1.2 II 型子结构

若 $g \leq h$, 则称 S_i 为 II 型子结构。将(2)式按 S_i 的左、右侧交界面分块成

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}^L \\ {}^s\mathbf{F}^R \\ \dots \\ {}^n\mathbf{F}^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^L \\ \mathbf{q}^R \end{Bmatrix}_i \quad (7)$$

式中, $\{{}^s\mathbf{F}^R\}_i$ 是 S_i 右侧对接力冗余向量, $h-g$ 维; $\{{}^n\mathbf{F}^R\}_i$ 是 S_i 右侧对接力常规向量, g 维。且

$$\{\mathbf{F}\}_i^R = ({}^s\mathbf{F}^R \quad {}^n\mathbf{F}^R)_i^T \quad (8)$$

是 S_i 右侧交界面的节点力向量。

(7)式改写为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} {}^n\mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_i^R &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{22}\mathbf{Z}_{12}^{-1} & \mathbf{Z}_{21} - \mathbf{Z}_{22}\mathbf{Z}_{12}^{-1}\mathbf{Z}_{11} \\ \mathbf{Z}_{12}^{-1} & -\mathbf{Z}_{12}^{-1}\mathbf{Z}_{11} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^L \\ {}^s\mathbf{F}^R \\ \mathbf{q}^L \end{Bmatrix}_i \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^L \\ {}^s\mathbf{F}^R \\ \mathbf{q}^L \end{Bmatrix}_i \end{aligned} \quad (9)$$

$\{\mathbf{F}\}_i^R$ 前冠以负号, 增广后得

$$\begin{Bmatrix} {}^s\mathbf{F} \\ {}^n\mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}_{12} & -\mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{13} \\ \mathbf{D}_{22} & -\mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{23} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} {}^s\mathbf{F}^R \\ \mathbf{F}^L \\ \mathbf{q}^L \end{Bmatrix}_i \quad (10)$$

简记为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_i^R = [\mathbf{B}]_i \begin{Bmatrix} {}^s\mathbf{F}^R \\ \mathbf{F}^L \\ \mathbf{q}^L \end{Bmatrix}_i \quad (11)$$

至此, 我们已将 I 型子结构的缩减阻抗方程(7)转换成了迁移方程(11)。

2 结构的迁移方程

下面推导结构的迁移方程。由于子结构之间的迁移方程有两种形式, 因此子结构之间的对接也分两种情况来讨论。

2.1 S_{i-1} 为 II 型子结构, S_i 为 I 型子结构:

根据(6)式和(11)式, 以及交界面对接条件

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{R}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{L}} \tag{12}$$

有

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{R}} = [\mathbf{A}]_i \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{L}} = [\mathbf{A}]_i \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{R}} = [\mathbf{A}]_i [\mathbf{B}]_{i-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{\mathbf{R}} \\ \mathbf{F}^{\mathbf{L}} \\ \mathbf{q}^{\mathbf{L}} \end{Bmatrix}_{i-1} \tag{13}$$

2.2 S_{i-1} 为 I 型子结构, S_i 为 II 型子结构:

(6)式分块为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \dots \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \dots \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}_{i-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{L}} \tag{14}$$

分开写成

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \dots \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{R}} = [\mathbf{A}_1]_{i-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{L}} \tag{15}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{R}} = [\mathbf{A}_2]_{i-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{L}} \tag{16}$$

于是有

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i-1}^{\mathbf{R}} &= [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2]_i \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{\mathbf{R}} \\ \dots \\ \mathbf{F}^{\mathbf{L}} \\ \mathbf{q}^{\mathbf{L}} \end{Bmatrix}_i = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2]_i \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^{\mathbf{R}} \\ \dots \\ \mathbf{F}_{i-1}^{\mathbf{R}} \\ \mathbf{q}_{i-1}^{\mathbf{R}} \end{Bmatrix} \\ &= [[\mathbf{B}_1]_i \quad \dots \quad [\mathbf{B}_2]_i [\mathbf{A}_2]_{i-1}] \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^{\mathbf{R}} \\ \dots \\ \mathbf{F}_{i-1}^{\mathbf{L}} \\ \mathbf{q}_{i-1}^{\mathbf{L}} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

联立(15)、(17)两式,得

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_i^R = \begin{Bmatrix} \mathbf{O} & [\mathbf{A}_1]_{i-1} \\ [\mathbf{B}_1]_i & [\mathbf{B}_2]_i, [\mathbf{A}_2]_{i-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^*F \\ \mathbf{F}_{i-1}^L \\ \mathbf{q}_{i-1}^L \end{Bmatrix} \quad (18)$$

将(13)、(18)两式表示成统一的形式

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_i^R = [\mathbf{E}] \begin{Bmatrix} {}^*F \\ \mathbf{F}_{i-1}^L \\ \mathbf{q}_{i-1}^L \end{Bmatrix} \quad (19)$$

式中

$$\langle {}^*F \rangle = \langle {}^*F \rangle_{i-1}^R \quad \text{或} \quad \langle {}^*F \rangle = \langle {}^*F \rangle^R$$

下面还要进一步说明,无论 S_{i+1} 是 I 型子结构或是 II 型子结构,其累积后的迁移方程仍可以统一成与(19)式完全相同的形式。

4. 设 S_{i+1} 是 I 型子结构,则

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i+1}^R = [\mathbf{A}]_{i+1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i+1}^L = [\mathbf{A}]_{i+1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_i^R \quad (20)$$

同时将(19)式写成分块形式

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \dots \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_i^R = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \dots \\ \mathbf{E}_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^*F \\ \mathbf{F}_{i-1}^L \\ \mathbf{q}_{i-1}^L \end{Bmatrix} \quad (21)$$

即

$$\langle \mathbf{O} \rangle = [\mathbf{E}_1] \begin{Bmatrix} {}^*F \\ \mathbf{F}_{i-1}^L \\ \mathbf{q}_{i-1}^L \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_i^R = [\mathbf{E}_2] \begin{Bmatrix} {}^*F \\ \mathbf{F}_{i-1}^L \\ \mathbf{q}_{i-1}^L \end{Bmatrix} \quad (23)$$

将(23)式代入(20)式,再联立(22)和(20)式,得

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \vdots \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i+1}^R = \begin{Bmatrix} [\mathbf{E}_1] \\ \vdots \\ [\mathbf{A}]_{i+1}[\mathbf{E}_2] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^* \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_{i-1}^L \\ \mathbf{q}_{i-1}^L \end{Bmatrix} \quad (24)$$

我们注意到, I 型子结构使迁移方程左边状态向量的个数增加,新增加的个数恰等于 S_{i+1} 左、右侧对接自由度数之差。

设 S_{i+1} 是 I 型子结构,则

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i+1}^R = [\mathbf{B}_1 \ \vdots \ \mathbf{B}_2]_{i+1} \begin{Bmatrix} {}^* \mathbf{F}_{i+1}^R \\ \vdots \\ \mathbf{F}_i^R \\ \mathbf{q}_i^R \end{Bmatrix} \quad (25)$$

将(23)式代入上式并与(22)式联立得

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \vdots \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{i+1}^R = \begin{Bmatrix} \mathbf{O} & [\mathbf{E}_1] \\ [\mathbf{B}_1]_{i+1} & [\mathbf{B}_2]_{i+1}[\mathbf{E}_2] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^* \mathbf{F}_{i+1}^R \\ \vdots \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_{i-1}^L \\ \mathbf{q}_{i-1}^L \end{Bmatrix} \quad (26)$$

可见, I 型子结构使迁移方程右边状态向量中对接力冗余向量的维数增加,所增加的维数恰等于 S_{i+1} 右侧与左侧对接自由度数之差。

显然,(24)式和(26)式都可以在形式上进一步表达成与(19)式统一的格式。类似地,将 N 个子结构综合起来,得总体结构迁移方程的一般表达式

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_N^R = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & \mathbf{T}_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^* \mathbf{P} \\ \mathbf{F}_1^L \\ \mathbf{q}_1^L \end{Bmatrix} \quad (27)$$

式中, $\{{}^* \mathbf{P}\}$ 是诸子结构界面对接力冗余向量的合向量。

仿照传统的迁移子结构方法^[2],应用结构两端的边界条件,即可求出结构的固有频率和振型。

3 算 例

3.1 平面双层框架

此例曾是作者在文献^[4]里试图使用的一个例子,但是由于子结构(II)是属于本文所述的II型子结构,即其右侧界面的自由度数 h 大于左侧界面的自由度数 g (计算时是从下往上迁移的,即以下为左,上为右),所以对于改进前的迁移子结构方法来说,此例无法计算。这也是使作者进一步提出本文的一个原因。

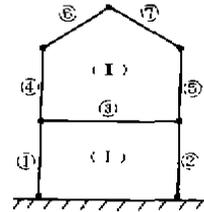


图1

表1 平面双层框架固有频率(HZ)

方 法 \ 阶 次	1	2	3	4	5
本方法解	115.4	406.7	451.0	892.9	1257.3
有限元精确解	113.7	398.8	440.4	872.0	1221.8
相对误差	1.5%	2.0%	2.4%	2.4%	2.9%

将图1所示的平面双层框架分成两个子结构,计算时所使用的参数为:材料弹性模量 $E=200\text{GPa}$, 密度 $\rho=7.951\text{kg/m}^3$ 矩形截面尺寸 $A=2\text{cm}\times 2\text{cm}$, 各杆长度分别为 $l_1=l_2=l_4=l_5=20\text{cm}$, $l_3=40\text{cm}$, $l_6=l_7=23.094\text{cm}$ 。计算的前五阶固有频率列于表1中,并与文献^[6]的结果作了比较。由表可见,本方法的计算精度是令人满意的。对于计算工作量,由于此例在文献^[5]中是用国产CJ709计算机计算的,而在本文中,此例是用IBM-PC微机计算的,所以没有比较它们的计算时间。

3.2 悬臂三角平板

图2所示的悬臂三角形平板,是无法用改进前的迁移子结构方法处理的,但可用本文的方法计算。将板从左到右划分成四个子结构,采用三角形平板单元和一致质量矩阵,各子结构的单元数分别是7,5,3,1。各子结构均属于本文所述的I型子结构,即每个子结构的左侧界面自由度数 g 都大于右侧界面的自由度数 h 。三角形平板左边界五个节点是固定的,右边界仅有的一个节点是自由的。计算时所取的参数值为:板厚 $t=0.5\text{cm}$, 密度 $\rho=7.951\text{kg/m}^3$, 材料弹性模量

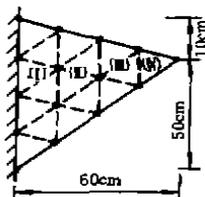


图2

$E=200\text{GPa}$, 泊松比 $\mu=0.3$ 。本文分别采用有限元法和本文方法在IBM-PC微机上计算了悬臂三角形平板的前五阶固有频率,其中有限元法用的是北大袁明武等人编的SAP4结构分析微机通用程序。计算结果列于表2中。由表可以看出本法的有效性和可靠性。在此例中,有限元法的计算时间为27分46秒,而本法的计算时间则为16分21秒,并且所占用的计算机内存量也比有限元法少得多。由此可见,本方法在计算工作量上优于有限元法。

表2 悬臂三角形平板的固有频率(Hz)

方 法 \ 阶 次	1	2	3	4	5
本方法	21.4	83.1	104.8	204.0	252.2
有限元精确解	21.1	81.9	103.0	200.5	246.7
相对误差	1.4%	1.5%	1.7%	1.8%	2.2%

4 结束语

迁移子结构方法对于链式结构的动态分析是十分有用的。这里所指的链式结构是其构件基本上沿着某一条轴线排列,这条轴线可以是直线,也可以是曲线^[1]。例如质量-弹簧系统、轴盘扭振系统、单跨或多跨的连续梁、多层连续刚架、窄长形平板以及圆柱壳等。大量的研究表明,这种方法不但能达到一定精度,而且具有占机内存少,计算速度快的优点,例如文献[7]用该法计算了焊有正交加强筋条的矩形平板的自振特性和正弦动力响应,其计算速度比有限元法快7倍。本文的目的在于突破原迁移子结构方法中要求各子结构左、右侧交界面上的自由度必须相等这一限制,使改进的迁移子结构方法能适用于形状较为复杂的链式结构的动力学问题。本文给出了这种算法的一般计算公式,并用两个典型的例子验证了它的可靠性和有效性,从而为迁移子结构方法的应用扩大了领域。

应该指出,对形状十分复杂的结构,虽然总可以用本方法计算,但若子结构过多,则单元划分、数据准备都较为复杂,不如有限元法方便。另外,虽算例表明,(5)式中的 Z_{22} 和(9)式中的 Z_{12} 并非奇异阵。但对其他更复杂的计算对象,是否会出现奇异的情况,还应进一步研究。

参 考 文 献

- 1 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论. 中国科学出版社, 1987
- 2 吴福光, 蔡承武, 徐兆. 振动理论. 高等教育出版社, 1987
- 3 朱天国. 瞬态响应分析中的迁移子结构方法. 重庆大学学报, 1986, (3)
- 4 朱天国. 结构动力响应计算的广义迁移子结构方法. 重庆大学学报, 1987, (1)
- 5 朱天国. 多自由度非线性系统时域响应分析. 重庆大学学报, 1988, (11)
- 6 朱天国. 结构自由振动的子结构缩减阻抗综合法. 重庆大学学报, 1983, (3)
- 7 McDaniel T J and Eversole K B. A combined finite element-transfer matrix structure analysis method. J. of Sound and Vib. , 1977, 51(2): 157~169